Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die dazugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen.

Von

Emil Hilb in Würzburg*).

Die folgenden Untersuchungen schließen sich an das erste Kapitel der gleichnamigen Arbeit von Weyl**) an. Es sei in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{ds^2} + (\lambda^2 + q(s))u = L(u) + \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_2 \neq 0$ und $q(s)$ für $s \geqq 0$ eine reelle stetige Funktion. $\eta(s)$ und $\vartheta(s)$ seien zwei partikuläre Integrale von (1), welche so gewählt sind, daß

$$\eta(0) = 0, \quad \left(\frac{d\eta(s)}{ds}\right)_{s=0} = 1, \quad \vartheta(0) = 1, \quad \left(\frac{d\vartheta(s)}{ds}\right)_{s=0} = 0 \tag{2}$$

ist. Als Greensche Funktion $G_a(s,t)$, welche für $s = 0$ verschwindet, für $s = a$ einer reellen Randbedingung

$$\left[\cos j\, G_a(s,t) + \sin j \frac{d}{ds} G_a(s,t)\right]_{s=a} = 0 \tag{3}$$

genügt, erhält man den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} G_a(s,t) &= \eta(s)\,\beta_{l_a}(t), \text{ wenn } s \leqq t \\ &= \eta(t)\,\beta_{l_a}(s), \text{ wenn } s \geqq t \end{aligned}\right\} 0 \leqq {s \atop t} \leqq a, \tag{4}$$

wobei

$$\beta_{l_a}(s) = \vartheta(s) + l_a\eta(s), \quad l_a = l_{a_1} + il_{a_2} \tag{5}$$

ist und $\beta_{l_a}(s)$ die Randbedingung (3) erfüllt. Weyl***) deutet l_a als einen Punkt der komplexen Zahlenebene $l_1 + il_2$; durchläuft dann j in (3) die Werte von 0 bis π, so durchläuft l_a einen Kreis vom Radius

$$r_a = \frac{1}{4\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^a |\eta|^2 ds}. \tag{6}$$

---

*) Herr O. Haupt in Karlsruhe unterstützte mich bei der rechnerischen Durchführung der asymptotischen Darstellungen.

) Math. Ann. 68, S. 220f. *) l. c. S. 225.

Dieser Kreis enthält alle anderen zu einem größeren Intervalle gehörigen Kreise in seinem Innern. Wächst a in das Unendliche, so nähern sich die Kreise einem *Grenzkreise* oder *Grenzpunkt*. Im Grenzkreisfalle sind alle Integrale von (1) im Intervalle $0\,\infty$ absolut quadratisch integrierbar, so daß man die gewöhnliche Theorie der Integralgleichungen anwenden kann. Speziell ergibt sich die Tatsache, daß man, wenn man für einen einzigen komplexen Wert von λ^2 auf den Grenzkreisfall kommt, dieses für jedes komplexe λ^2 geschieht.*)

Im Grenzpunktfall existiert dagegen nur eine einzige Lösung

$$\beta_L(s) = \vartheta(s) + L\eta(s), \tag{7}$$

welche im Intervalle $0\,\infty$ absolut quadratisch integrierbar ist. Die entsprechend (4) vermittelst $\beta_L(s)$ gebildete Greensche Funktion $G(s,t)$ führt auf eine *singuläre* Integralgleichung, deren ziemlich komplizierte Theorie Weyl heranzieht. *Wir wollen zeigen, wie einfach man ohne diese Theorie die gewünschten Entwicklungen direkt aus dem Cauchyschen Residuensatz**) erhält.*

§ 1.

Hilfsformeln.

Es sei $f(s)$ eine reelle Funktion, die im Intervalle $0\,\infty$ zweimal stetig differenzierbar ist und für $s=0$ verschwindet. Ist ferner für eine feste komplexe Zahl $\mu = \mu_1 + i\mu_2$

$$L(f) + \mu^2 f = -g(s), \tag{8}$$

so seien $|f(s)|$ und $|g(s)|$ im Intervall $0\,\infty$ quadratisch integrierbar. Dann ist

$$f(s) = \int_0^\infty G(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt, \tag{9}$$

wobei $G(\mu^2; s, t)$ die zum Intervalle $0\,\infty$ gehörige oben definierte Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) + \mu^2 u = 0$ ist.

Um (9) zu beweisen, wählen wir $G_a(\mu^2; s, t)$ so, daß entsprechend (3)

$$\left[f(s)\frac{dG_a(\mu^2; s, t)}{ds} - \frac{df(s)}{ds}\, G_a(\mu^2; s, t)\right]_{s=a} = 0$$

ist. Dann wird

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^a G_a(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt \\ &= \int_0^a G(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt + (l_a - L)\int_0^a \eta(s)\,\eta(t)\, g(t)\, dt. \end{aligned} \tag{10}$$

---

*) l. c. S. 238.

**) Vgl. auch Hellinger, Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen, J. f. Math. 136, § 9.

Da L innerhalb des Kreises vom Radius r_a liegt, so ist

$$|l_a - L| < \frac{1}{2\mu_1\mu_2\int\limits_0^a |\eta|^2\,dt}; \tag{11}$$

$\int\limits_0^a |\eta|^2\,dt$ wird aber mit wachsendem a in dem vorliegenden Grenzpunktfalle unendlich, es folgt daher aus der Schwarzschen Ungleichung, daß der zweite Summand in (10) mit wachsendem a nach 0 konvergiert, so daß (10) in die zu beweisende Gleichung (9) übergeht. Analog zeigt man, daß

$$G(\lambda^2; s, t) = G(\mu^2; s, t) + (\lambda^2 - \mu^2)\int\limits_0^\infty G(\lambda^2; s, \tau)\, G(\mu^2; t, \tau)\, d\tau \tag{12}$$

und

$$\frac{f(s)}{\lambda^2 - \mu^2} = \int\limits_0^\infty \frac{G(\lambda^2; s, t)}{\lambda^2 - \mu^2}\, g(t)\, dt - \int\limits_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, f(t)\, dt \tag{13}$$

ist. Aus (12) ergibt sich vermittelst der *Neumannschen Reihe*, daß $G(\lambda^2; s, t)$, speziell auch L, für alle Werte λ^2 mit von 0 verschiedenem positiven imaginären Teile eine analytische Funktion von λ^2 ist, so daß wir den Cauchyschen Satz anwenden können.

§ 2.

Asymptotische Darstellungen.*)

Wir denken uns in $\int\limits_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, g(t)\, dt$ die reelle Größe s fest und a um eine endliche feste Zahl größer als $2s$. Dann gestattet die von Weyl herrührende geometrische Interpretation des Grenzpunktfalles eine bequeme asymptotische Darstellung dieses Ausdruckes für große Werte von $|\lambda|^2$.

Es ist nämlich für jeden Punkt des zum Intervalle $0\,a$ gehörigen Kreises analog zu (11)

$$|l_a - L| < \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^a |\eta|^2\,dt}, \tag{14}$$

ferner ist

$$\eta = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda s + \frac{1}{\lambda^2} R(s)\, e^{\lambda_2 s}, \tag{15}$$

wenn $\lambda_2 > 0$ und $|R(s)|$ unterhalb einer endlichen, von λ unabhängigen Grenze liegt; für eine solche Größe wollen wir im folgenden generell M

*) Will man das Entwicklungstheorem nur für 4mal stetig differenzierbare Funktionen, so kann man die asymptotischen Darstellungen fast vollständig umgehen.

einführen, so daß M in den folgenden Ungleichungen als Symbol für verschiedene Größen dient. Um

$$(16)\quad \left|\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, g(t)\, dt\right| = \left|\beta_L(s)\int_0^s \eta(t)\, g(t) dt + \eta(s)\int_s^\infty \beta_L(t)\, g(t)\, dt\right|$$

abzuschätzen, führen wir zunächst $\beta(s, \lambda, a)$ als Lösung von (1) ein, welche die Form (5) hat und in a verschwindet, so daß also

$$\beta(s, \lambda, a)_{s=a} = 0, \quad \left(\frac{d\beta(s, \lambda, a)}{ds}\right)_{s=a} = \frac{-1}{\eta(a)}$$

und

$$\beta(s, \lambda, a) = -\frac{e^{i\lambda(a-s)} - e^{-i\lambda(a-s)} + \frac{1}{\lambda} R_2(s)\, e^{\lambda_2(a-s)}}{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a} + \frac{1}{\lambda} R_3(a)\, e^{\lambda_2 a}}$$

ist.

Ist also $0 < \lambda_2 \leqq 1$, so ist

$$|\beta(s, \lambda, a)| < \frac{M}{\lambda_2},$$

ist $1 \leqq \lambda_2$, so ist

$$|\beta(s, \lambda, a)| < M e^{-\lambda_2 s}.$$

Ferner ist, wenn wir statt $\beta_L(s)$ vorübergehend $\beta_L(s, \lambda)$ schreiben,

$$|\beta(s, \lambda, a) - \beta_L(s, \lambda)| = |l_a - L|\,|\eta(s)|$$

$$= \left|\frac{\eta(s)\lambda^2}{2\lambda_1\lambda_2\left\{\frac{\sin 2i\lambda_2 a}{4i\lambda_2} - \frac{\sin 2\lambda_1 a}{4\lambda_1} + \frac{R(a)}{\lambda} e^{\lambda_2 a}\right\}}\right|,$$

also

$$|l_a - L|\,|\eta(s)| < \frac{M|\lambda|}{\lambda_1\lambda_2}, \text{ wenn } \lambda_2 < 1,$$

$$< \frac{M|\lambda|\, e^{-\lambda_2(2a-s)}}{\lambda_1}, \text{ wenn } \lambda_2 > 1 \text{ ist.}$$

Es sei nun $\int_0^\infty |g(t)|^2 dt \leqq 1$, dann wird

$$\left|\int_0^s \eta(t) g(t)\, dt\right| < \sqrt{\int_0^s |\eta(t)|^2 dt} < \frac{M}{|\lambda|}, \text{ wenn } \lambda_2 < 1,$$

$$< \frac{M}{|\lambda|}\frac{e^{\lambda_2 s}}{\sqrt{\lambda_2}}, \text{ wenn } \lambda_2 > 1.$$

Es folgt also

$$(17)\quad \left|\beta_L(s)\int_0^s \eta(t) g(t)\, dt\right| < \frac{M}{\lambda_1\lambda_2}, \text{ wenn } \lambda_2 < 1 \text{ ist,}$$

$$< \frac{M}{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}}, \text{ wenn } \lambda_2 > 1 \text{ ist.}$$

Um den zweiten Summanden in (16) abzuschätzen, benutzen wir die Ungleichung*)

$$(18)\qquad \int_s^\infty |\beta_L(t,\lambda)|^2\,dt \leqq \frac{1}{8\lambda_1^2\lambda_2^2\int\limits_0^s |\eta|^2\,dt},$$

also ist

$$(19)\qquad \left|\eta(s)\int_s^\infty \beta_L(t,\lambda)\,g(t)\,dt\right| < \frac{|\eta(s)|}{\sqrt{8}\,\lambda_1\lambda_2\sqrt{\int\limits_0^s|\eta|^2\,dt}} < \frac{M}{\lambda_1\lambda_2},\ \text{wenn } \lambda_2 < 1,$$
$$< \frac{M}{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}},\ \text{wenn } \lambda_2 > 1.$$

Es ist also schließlich

$$(20)\qquad \left|\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\,g(t)\,dt\right| < \frac{M}{\lambda_1\lambda_2},\ \text{wenn } \lambda_2 < 1,$$
$$< \frac{M}{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}},\ \text{wenn } \lambda_2 > 1.$$

Dabei ist M eine endliche, von λ unabhängige Größe, die im Laufe der Abschätzung als Symbol für ganz verschiedene Größen dieses Charakters geschrieben wurde.

§ 3.

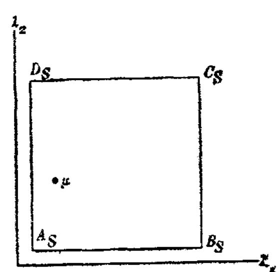
Der Cauchysche Residuensatz.

Wir betrachten in der komplexen λ-Ebene ein Quadrat Q_S von der Seitenlänge S, dessen Seiten zu den Achsen $\lambda_1\lambda_2$ parallel sind, speziell sei für die Ecke A_S

$$(21)\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = e^{-S^{\frac{5}{4}}}.$$

Es ist

$$(22)\qquad \int_0^\infty G(\mu^2; s, t)\,g(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{Q_S}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\,g(t)\,dt.$$



Wächst S, so konvergiert der Beitrag, den die Seiten $B_S C_S$ und $C_S D_S$ zu dem Integrale der rechten Seite von (22) liefern, nach 0, so daß also, *wenn wir den Weg $D_S A_S B_S$ mit W_S bezeichnen,*

*) l. c. S. 228 vor Gleichung (30).

$$(23)\qquad \int_0^\infty G(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, g(t)\, dt$$

wird. Analog ist

$$(24)\qquad 0 = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, g(t)\, dt,$$

also folgt durch Addition von (23) und (24) unter Benutzung von (9) und (13)

$$(25)\qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{2\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, g(t)\, dt$$

$$= \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{W_S} \frac{2\lambda\, d\lambda\, f(s)}{\lambda^2 - \mu^2} + \int_{W_S} 2\lambda\, d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, f(t)\, dt \right].$$

$f(s)$ ist reell, es kommt also in (25) nur der rein imaginäre Teil der Integrale in Betracht. Da nun, wenn $\Re h(z)$ den reellen Teil einer Funktion $h(z)$ bedeutet,

$$(26)\qquad \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{2\lambda\, d\lambda\, f(s)}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{1}{2} f(s),$$

so folgt

$$(27)\qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 2\lambda\, d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, f(t)\, dt$$

$$= \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 2\lambda\, d\lambda \left[\int_0^s \big(\eta(t)\, \vartheta(s) - \vartheta(t)\, \eta(s)\big) f(t)\, dt \right.$$

$$\left. + \eta(s) \int_0^\infty \big(\vartheta(t) + L\eta(t)\big) f(t)\, dt \right].$$

Nun ist

$$(28)\qquad \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 2\lambda\, d\lambda \left[\int_0^s \big(\eta(t)\, \vartheta(s) - \vartheta(t)\, \eta(s)\big) f(t)\, dt \right] = 0.$$

Um dieses zu zeigen, ist noch der imaginäre Teil u_2 der Funktion

$$u_1 + i u_2 = \eta(t)\, \vartheta(s) - \vartheta(t)\, \eta(s)$$

abzuschätzen. Es ist

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + (q(s) + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, u_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 u_1 = 0$$

und $(u_2(t))_{t=s} = 0$, $\left(\frac{d u_2(t)}{dt}\right)_{t=s} = 0$, also, wenn v und w zwei partikuläre Integrale der Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dt^2} + (q(s) + \lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2)\,u = 0$,

$$u_2 = \frac{1}{w(t)\frac{d}{dt}v(t) - v(t)\frac{d}{dt}w(t)}\, 2\lambda_1\lambda_2 \int\limits_s^t \big(w(t)\,v(\sigma) - w(\sigma)\,v(t)\big)\,u_1(\sigma)\,d\sigma,$$

wobei nach (21) $\lambda_1\lambda_2 < S\,e^{-S^{\frac{5}{4}}}$. Da nun die Funktionen v, w, u_1 von dem Charakter e^{Ss} sind, so folgt durch eine leichte Rechnung (28). Also ist schließlich*)

$$(29) \qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{2}{\pi i} \int\limits_{W_S} \lambda\, \eta(s) \int\limits_0^\infty \big(\vartheta(t) + L\,\eta(t)\big)\, f(t)\, dt\, d\lambda.$$

---

*) Den Polen von L entsprechen gewöhnliche Eigenfunktionen, die man, sofern dieses zweckmäßig erscheint, in bekannter Weise isolieren kann.