

III.

Ueber Interpolationen in der Physik;

*in Bezug auf Hrn. Prof. Steinhäufers neuesten Aufsatz in die-
sen Annalen B. 61 S. 75.*

von dem

Prof. MOLLWEIDE in Leipzig.

1. Interpolationsformeln werden in der angewandten Mathematik und in der Physik da mit Nutzen gebraucht, wo entweder der Zusammenhang zwischen den verglichenen Größen zu verwickelt ist, als daß es entweder überhaupt thunlich wäre oder sich der Mühe lohnen sollte, ihn scharf darzustellen, oder wo wir aller Kenntniß über jenen Zusammenhang ermangeln. Beispiele der ersten Art dieses Gebrauchs liefert die Astronomie. Man interpolirt die in den Ephemeriden angeetzten Oerter des Mondes und der Planeten, weil der Unterschied der wahren und mittlern Bewegung dieser Körper, besonders des Mondes, eine höchst zusammengesetzte Function der Zeit ist. Indess, welches wohl zu bemerken ist, ist die theoretisch genaue Formel für jenen Unterschied durch die Zeit der Form nach von der angewandten Interpolationsformel nicht verschieden, und diese Uebereinstimmung der Grund, daß die

Interpolation hier gut von Statten geht. Nicht immer so glücklich kommt man mit der Interpolation fort, wenn man von gar keiner Theorie geleitet wird. Auch hier leistet eine solche, wenn auch nur probable, ungleich bessere Dienste, als bloße Erfahrungssätze. Als Beispiel hierzu dienen die von Hrn. Prof. Schmidt in Gießen und vom Hrn. Hofrath Mayer in Göttingen gegebenen Ausdrücke für die Elasticität der Dämpfe unter verschiedenen Temperaturen.

2. Es kommt also hauptsächlich auf die Form an, welche man dem Ausdrücke für das allgemeine Glied einer Reihe giebt, welche die durch die Erfahrung gegebenen Größen als eben so viele Glieder, deren Stellenzahlen bekannt sind, enthalten soll. Zur Entdeckung dieser schicklichsten Form sind graphische Darstellungen sehr wohl geeignet, indem sie den Gang, welchen die zu interpolirende Function nimmt, auf einmal und im Ganzen übersehen lassen. Lambert hat sich ihrer mehrmals nicht ohne Erfolg bedient.

5. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen komme ich zur Sache selbst, nämlich zur Darstellung der Abweichung der Magnetnadel an einem gewissen Orte durch eine Formel. Da die Beobachtungen hierbei etwas periodisches anzuzeigen scheinen, so legt man mit Lambert (Astronom. Jahrb. für 1776 und Beiträge Th. III. S. 74) und La Grange (Astronomisches Jahrbuch für 1783) am besten eine Formel wie

$A_x = a \sin (\alpha + x\varphi) + b \sin (\beta + x\vartheta) + \&c.$
oder

$$A_x = a + b \sin (\alpha + x\varphi) + \&c.$$

welche sich wechselseitig einschließen, zum Grunde.

Die einfachste Formel dieser Art, welche eine einzige periodische Ungleichheit voraussetzt, ist

$$A_x = a + b \sin (\alpha + x\varphi)$$

worin A_x das allgemeine, der Stelle x zugehörige Glied ist, und a , b , α , φ unveränderliche Größen sind, deren Bestimmung am leichtesten durch vier gleich weit von einander abstehende und gegebene Glieder geschieht. Lambert lehrt diese Bestimmung in dem astronomischen Jahrbuche für 1776. Da aber seine Formeln zur Berechnung mit Logarithmen noch etwas bequemer gemacht werden können, so gebe ich hier diese Formeln mit einiger Umformung.

4. Es seyen also A , A_1 , A_2 , A_3 die vier gegebenen, beziehungsweise den Stellenzahlen $x=0, 1, 2, 3$ entsprechenden Glieder, so ist

$$\sin \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{A - 3A_1 + 3A_2 - A_3}{4(A_2 - A_1)}$$

$$\tan \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{A - 3A_1 + 3A_2 - A_3}{-A - A_1 + A_2 + A_3}$$

Man suche den Hülfswinkel ψ , so daß

$$\frac{A_2 - A_1}{A_3 - A} = \tan (45^\circ - \psi)$$

so hat man

$$\tan (\alpha + \varphi) = \tan \psi \cot \frac{1}{2} \varphi$$

und hierdurch α , ferner

$$b = \frac{A_1 - A}{2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos(\alpha + \frac{1}{2} \varphi)} = \frac{A_2 - A_1}{2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos(\alpha + \frac{1}{2} \varphi)} \&c.$$

und $a = A - b \sin \alpha = A_1 - b \sin(\alpha + \varphi) \&c.$

5. Läßt man z. B. A, A_1, A_2, A_3 die Abweichungen der Magnetnadel zu Paris in den Jahren 1580, 1640, 1700, 1760 seyn, und nimmt solche, wie sie in Gehlers physikal. Wörterbuche Th. 1 S. 19, verzeichnet sind, womit Hrn. Steinhäufers Angabe dieser Abweichungen bis auf Kleinigkeiten übereinstimmt, so findet sich

$$A_x = 4^\circ 22', 6 + 18^\circ 36', 3 \sin(-58^\circ 34', 4 + \frac{x}{60} \cdot 35^\circ 13')$$

wo x die Zahl der seit 1580 verfloßenen Jahre, und die westliche Abweichung als positiv genommen ist.

6. Nach dieser Formel war die Abweichung im Jahre 1657 Null, und das Maximum der westlichen Abweichung, welches $22^\circ 59'$ beträgt, wird nach ihr im Jahr 1833 Statt haben. Ferner braucht die Nadel von der größten östlichen Abweichung $14^\circ 14'$ zu der größten westlichen oder umgekehrt zu kommen 307 Jahre, von einer bestimmten Abweichung aber bis wieder zu derselben 614 Jahre.

7. Man setze in der gefundenen Formel $c + t$ statt x und bestimme c so, daß

$$58^\circ 34', 4 - \frac{c}{60} \cdot 35^\circ 13' = 90^\circ$$

so wird $c = 55\frac{1}{2}$, und

$$A_t = 4^\circ 22', 6 - 18^\circ 36', 3 \cdot \cos \frac{t}{60} \cdot 35^\circ 13'.$$

wo t die seit 1633 verfloßene Anzahl Jahre, und A^t die Abweichung am Ende dieser Zeit anzeigt. Diese Form hat Hr. Prof. Steinhäuser seiner Formel (S. 81) gegeben. Sie ist aber auf einem andern Wege als dem hier gewiesenen gefunden. Hr. Steinhäuser nimmt die Zeit, welche die Nadel braucht, um von einem Maximo der Abweichung zu dem andern zu kommen, als bekannt an, wodurch ϕ in der obigen Formel gegeben ist, und sucht nun nach einem von Lambert angegebenen Verfahren die übrigen Constanten der Formel so zu bestimmen, daß dadurch einer größern Zahl von Beobachtungen, als eigentlich zu der Bestimmung der Constanten unumgänglich nöthig ist, auf eine wahrscheinliche Art ein Genüge geschieht. Allein Lamberts Verfahren enthält zu viel willkürliches; an seiner Statt hätte die Methode der kleinsten Quadrate gebraucht werden sollen. Aber, so lange man nicht gewiß ist, daß die zum Grunde gelegte Form der Function der Sache angemessen sey, wird man es nicht leicht unternehmen, diese Methode, welche gerade hier zu etwas umständlichen und verwickelten Rechnungen führt, anzuwenden. Mich hat von dieser Anwendung hauptsächlich ein Versuch, die Abweichung der Magnetnadel zu London durch die Formel

$$A_x = a + b \sin (\alpha + x \phi)$$

darzustellen, abgeschreckt.

8. Die westliche Abweichung der Magnetnadel war nämlich zu London

im Jahr 1700 ; 1735 ; 1770 ; 1805

$8^{\circ} 0'$; $14^{\circ} 16'$; $20^{\circ} 35'$; $24^{\circ} 8'$

Setzt man diese Werthe = A, A_1, A_2, A_3 , so wird
 $A^x = 14^{\circ} 22', 2 + 9^{\circ} 59', 6 \sin (x \times 1^{\circ} 5', 16 - 39^{\circ} 36', 2)$

Nach dieser Formel kann die Abweichung nie 0, und noch weniger östlich werden, indem das Minimum der westlichen Abweichung nach ihr $4^{\circ} 23'$ beträgt. Die gefundene Interpolationsformel läßt sich also höchstens in dem Bezirk der Jahre 1700 — 1805 brauchen, allgemein ist sie nicht, wofern man sich nicht starke Reductionen der Beobachtungen erlauben will, sie kann folglich auch nicht gebraucht werden, Schlüsse über die Periode, welche die Abweichung der Magnetnadel in ihrer Veränderlichkeit hält, darauf zu gründen.

9. Noch weniger aber darf man auf eine solche empirisch gefundene Formel, selbst, wenn die Beobachtungen sich auch genauer ihr anschließen, als sie thun, Schlüsse über die Ursache, welche die durch die Beobachtungen gegebenen Wirkungen hervorbringt, gründen. Hr. Steinhäuser vergleicht die Curve, welche die Endpunkte der die Abweichung darstellenden Ordinaten verbindet, zu denen die seit einem gewissen Zeitpunkte verflossenen Jahre als Abscissen gehören, nicht ganz richtig mit der Cykloide, da sie mehr der Gefährtin dieser Linie ähnlich ist, und nimmt, so viel ich ihn verstehe, den erzeugenden Kreis dieser Linie selbst für die Bahn des unterirdischen Planeten, der die Veränderung der Abweichung bewirken soll. Das ist nun freilich ein ge-

waltiger Sprung im Schließsen, der mir hauptsächlich daraus hervorgegangen zu seyn scheint, daß Hr. Prof. Steinhäuser seine, so wie die oben gegebenen Formeln zur Darstellung der Abweichung nicht für *Interpolationsformeln* ansieht, sondern glaubt, diese müssen immer die Gestalt

$$y = a + bx + cx^2 + \&c.$$

haben. Sie sind aber nichts mehr oder weniger als diese, nämlich empirische Formeln, die man wohl brauchen kann, eine Zwischengröße zu berechnen, aber nicht leicht über den Bezirk der ihnen zum Grunde liegenden Erfahrungsdata ausdehnen darf. Dies erhellt schon daraus, daß, wie Euler gezeigt hat, es immer möglich ist, durch mehrere gegebene Punkte unendlich viel krumme Linien zu ziehen, oder mit andern Worten in Bezug auf den vorliegenden Gegenstand: mehrere Erfahrungsdata auf unendlich viel Arten durch eine Relation mit einander zu verknüpfen. So lange also Hr. Prof. Steinhäuser sich nicht über die Lage, Gestalt und Größe der Bahn seines unterirdischen Planeten, und das Bewegungsgesetz in ihr, so wie über die Art, wie dieser unterirdische Planet auf die Magnetnadel wirkt, *bestimmt* erklärt, und daraus die Veränderungen der Abweichung auf eine *deutliche* und *überzeugende* Art hergeleitet hat; wird es wohl erlaubt seyn, an dem Daseyn jenes Planeten zu zweifeln, und die Erde einstweilen noch immer als eine solide Kugel oder als ein solides Sphäroid zu betrachten.
