Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade.

Von

L. Kiepert in Hannover.

Bei den Untersuchungen über Transformation der elliptischen Functionen hat man sich, was die wirkliche Ausführung der Rechnungen betrifft, bisher meist auf den Fall beschränkt, wo der Transformationsgrad n eine *Primzahl* ist. Man unterliess es, die *zusammengesetzten* Zahlen noch besonders zu behandeln, weil man im Allgemeinen eine Transformation vom Grade ab erhält, indem man zuerst eine Transformation a^{ten} Grades und dann eine Transformation b^{ten} Grades ausführt.

Ausserdem häufen sich bei den bisher gebräuchlichen Methoden die Schwierigkeiten, welche die Ausführung der numerischen Rechnungen bietet, ungemein, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, weil dann der Grad der Modulargleichungen noch schneller wächst als der Transformationsgrad. So ist z. B. für $n = 30$ bei Anwendung der Jacobi'schen Bezeichnungen der Grad der Modulargleichung zwischen u und v in Bezug auf *jede* dieser beiden Veränderlichen gleich

$$(2+1)(3+1)(5+1) = 72.$$

Trotzdem ist diese Beschränkung des Transformationsproblems auf *Primzahlen* eine schädliche gewesen, denn erstens gewinnen die algebraischen Beziehungen, welche bei dieser Aufgabe auftreten, erhöhtes Interesse, wenn man zusammengesetzte Werthe von n berücksichtigt, und zweitens gewähren diese algebraischen Beziehungen auch Mittel, um die Rechnungen, welche für die Transformation vom Grade ab nothwendig sind, wesentlich einfacher zu gestalten als bei dem oben angedeuteten schrittweisen Vorgehen. Diese Mittel sollen in der hier folgenden Abhandlung angegeben werden.

Es besteht nämlich zwischen der absoluten Invariante J*) der

*) Die Bezeichnung J ist von Herrn Klein in seiner Abhandlung: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" (Math. Annalen, Band XIV, S. 111—172) eingeführt worden. Dabei ist

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2},$$

wo g_2 und g_3 die von Herrn Weierstrass benutzten Invarianten sind.

gegebenen elliptischen Function und der absoluten Invariante $\overline{J}$ der transformirten Function eine Gleichung, deren Rang*) ϱ leicht bestimmt werden kann und im Verhältniss zum Grade dieser Gleichung klein ist. Deshalb giebt es nach bekannten Sätzen aus der Algebra Hülfsgrössen ξ, welche dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ angehören (d. h. welche rationale Functionen von J und $\overline{J}$ sind), und die Eigenschaft besitzen, dass die Gleichungen

$$(1) \qquad F(\xi, J) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(\xi, \overline{J}) = 0,$$

welche zwischen ξ und J, bez. zwischen ξ und $\overline{J}$ bestehen, in Bezug auf J und $\overline{J}$ von niedrigerem Grade sind als die Gleichung zwischen J und $\overline{J}$.

In den Fällen, wo $\varrho = 0$ ist, d. h. in den Fällen, wo n eine der Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 13,$$

oder eine der zusammengesetzten Zahlen

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$$

ist, kann man sogar J und $\overline{J}$ als *rationale* Functionen einer solchen Hülfsgrösse ξ darstellen, und zwar fanden Herr Klein in der oben erwähnten Abhandlung und Herr Gierster in einer daran anschliessenden „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrade" (Math. Annalen, Band XIV, S. 537—544) eine solche Darstellung auf *rein algebraischem* Wege.

Eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens für die Fälle, in denen der Rang $\varrho = 1$ ist, lag sehr nahe. Da giebt es solche Hülfsgrössen ξ, für welche die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\overline{J}$ nur noch vom *zweiten* Grade sind. Die Auflösung der Gleichung (1) liefert dann eine Darstellung von J und $\overline{J}$ als *rationale* Functionen von ξ und von einer Quadratwurzel aus einer Function *dritten* oder *vierten* Grades von ξ. Die Versuche aber, eine solche Hülfsgrösse ξ auf *rein algebraischem* Wege zu finden, waren trotz der eifrigsten Bemühungen ganz vergeblich. Erst durch Mittel, welche die Theorie der elliptischen Functionen selbst bietet, ist es mir gelungen, diese Aufgabe für $\varrho = 1$, und ebenso die grösseren Werthen von ϱ entsprechende Aufgabe zu lösen**).

---

*) Die Bezeichnung „*Rang*" rührt von Herrn Weierstrass her und ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „Geschlecht", den Clebsch einführte. Die Zahl ϱ hat hier also denselben Werth wie bei Riemann die Zahl p.

**) Die zahlreichen weiteren Arbeiten, welche Herr Klein und seine Schüler über Transformation der elliptischen Functionen veröffentlicht haben (vergl. insbesondere das Referat in Bd. 26 dieser Annalen, S. 455—464), kommen für diese Entwicklungen nicht unmittelbar in Betracht, insofern es sich in ihnen nur ganz

Für $\varrho = 2$ z. B. giebt es nach Riemann (Seite 116 der ges. Werke) solche Hülfsgrössen ξ, für welche die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\overline{J}$ nur vom *zweiten* Grade werden, und andere Hülfsgrössen η, für welche die Gleichungen

$$(2) \qquad F_2(\eta, J) = 0 \quad \text{und} \quad F_3(\eta, \overline{J}) = 0$$

in Bezug auf J und $\overline{J}$ vom *dritten* Grade sind. Hierbei besteht zwischen ξ und η eine Gleichung, welche in Bezug auf ξ vom *dritten* und in Bezug auf η vom *zweiten* Grade ist. Ausserdem sind nicht nur ξ und η *rationale* Functionen von J und $\overline{J}$, sondern auch J und $\overline{J}$ sind *rationale* Functionen von ξ und η, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie sind rationale Functionen von ξ und von der Quadratwurzel aus einer Function *fünften* oder *sechsten* Grades von ξ.

Ist $\varrho > 2$ und *gerade*, so kann man den Grad der Gleichungen (1) nach Riemann auf $\frac{1}{2}(\varrho + 2)$, und ist $\varrho > 2$ und *ungerade*, so kann man den Grad auf $\frac{1}{2}(\varrho + 3)$ herabdrücken. In besonderen Fällen erniedrigt sich der Grad der Gleichungen (1) sogar noch weiter.

Eine solche Hülfsgrösse ξ möge in dem Folgenden ein „*Parameter*" und der Grad der Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\overline{J}$ möge der „*Charakter*" des Parameters ξ genannt werden.

Gelingt es also, Parameter mit möglichst niedrigem Charakter zu bestimmen, so erkennt man ohne Weiteres, wie sehr das Transformationsproblem dadurch vereinfacht werden kann, denn der Grad der Gleichungen, durch welche die Beziehung zwischen J und $\overline{J}$ gegeben wird, ist *wesentlich* kleiner als bei den Gleichungen, welche man bisher zur Vermittelung dieser Beziehung benutzte.

Dabei ist es für zusammengesetzte Transformationsgrade gar nicht nöthig, von der Herstellung der Gleichungen (1) auszugehen, man kommt vielmehr weit schneller zum Ziele, wenn man *mehrere* Parameter mit möglichst niedrigem Charakter bildet, die Form der Gleichungen feststellt, welche zwischen je zweien unter ihnen besteht, und die noch unbestimmten Zahlcoefficienten dadurch ausrechnet, dass man die beiden Parameter nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{n}} = z$ ent-

---

beiläufig um die Aufstellung der zwischen J und $\overline{J}$ bestehenden Gleichung handelt. Immerhin besteht zwischen diesen Arbeiten und meiner Untersuchung eine Uebereinstimmung im Princip: hier wie dort handelt es sich darum, bei der Construction von Gleichungssystemen auch im Falle höheren Ranges den Anschluss an die Theorie der algebraischen Functionen zu bewahren, andererseits geeignete Irrationalitäten der eigentlichen Theorie der elliptischen Functionen zu entnehmen. Vergl. insbesondere die Dissertation von Herrn Fricke (Leipzig 1886): *Ueber Systeme elliptischer Modulfunctionen von niederer Stufenzahl.*

wickelt. Aus diesen Gleichungen ergeben sich dann die Gleichungen (1) fast ohne Rechnung.

Um dieses Verfahren sogleich durch ein paar einfache Beispiele zu erläutern, betrachte man die Transformation vom Grade 12 und vom Grade 18. In beiden Fällen werden die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ vom *ersten* Grade, aber in Bezug auf ξ werden sie für $n = 12$ vom Grade 24, für $n = 18$ vom Grade 36. Wollte man daher die Gleichungen (1) direct bilden, so würde die Rechnung doch noch ziemlich umfangreich sein. Benutzt man dagegen den Umstand, dass man mehrere Parameter mit dem Charakter 1 angeben kann, und dass zwischen je zweien von ihnen, ξ_α und ξ_β, eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0$$

besteht, so kann man die Zahlcoefficienten a, b, c, d in wenigen Minuten durch Reihenentwickelung berechnen. Ist dann die Transformation für irgend einen Factor von n (z. B. für 2 oder für 3) bekannt, so ergiebt sich aus diesen linearen Gleichungen, wie später gezeigt werden soll, ohne Weiteres auch die Darstellung von J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von ξ_α oder von ξ_β.

Wenn auch die Rechnung in den Fällen, wo $\varrho > 0$ ist, nicht ganz so einfach wird wie in den eben besprochenen Beispielen, so war es doch dem Verfasser möglich, die im ersten Theile der Abhandlung hergeleitete Methode im zweiten Theile auf eine grosse Anzahl von Beispielen anzuwenden.

Nachdem nämlich in den *beiden ersten* Abschnitten die Eigenschaften der Transformationsgleichungen und der Parameter, (welche Wurzeln gewisser Transformationsgleichungen sind), untersucht worden sind, werden im *dritten* Abschnitte die Transformationen vom Grade 2, 4, 8, 16 und allgemein vom Grade 2^α erledigt.

Im *vierten* Abschnitte folgen dann die Transformationen vom Grade 3, 9, 27, 81, 243 und allgemein vom Grade 3^α.

Die Potenzen von Primzahlen a, welche von 2 und 3 verschieden sind, werden im *fünften* Abschnitte berücksichtigt, namentlich die Transformationen vom Grade 5, 25, 125, 7 und 49.

Der *sechste* Abschnitt behandelt allgemein die Transformationen vom Grade $2a$ und erledigt die besonderen Fälle

$$n = 6,\ 10,\ 14,\ 22 \text{ und } 26.$$

Ausserdem ist hier noch die Transformation 11[ten] Grades untersucht worden. Für $n = 11$ wird nämlich $\varrho = 1$, so dass es Parameter mit dem Charakter 2 geben muss. Das Auffinden solcher Parameter ist dem Verfasser aber erst dadurch geglückt, dass er die Transformation

22^{ten} Grades zu Hülfe nahm. Da für andere Primzahlen Aehnliches gilt, so ist dieser Umstand ein weiterer Beleg dafür, dass man das Transformationsproblem durchaus nicht auf *Primzahlen* beschränken darf, dass vielmehr erst die *zusammengesetzten* Zahlen die hinreichenden Hülfsmittel zur befriedigenden Lösung dieses Problems bieten.

Im *siebenten* Abschnitte werden die Transformationen vom Grade $4a$, insbesondere vom Grade 12, 20 und 28 ausgeführt.

Daran schliessen sich im *achten* Abschnitte die Transformationen vom Grade $8a$, $16a$, allgemein vom Grade $2^{\alpha}a$ mit den besonderen Fällen

$$n = 24,\ 48,\ 96, \ldots 40,\ 80, \ldots .$$

Die Transformation vom Grade $3a$ wird im *neunten* Abschnitte durch die besonderen Fälle $n = 15$ und $n = 21$, und die Transformation vom Grade $9a$ wird im *zehnten* Abschnitte durch die besonderen Fälle $n = 18$ und $n = 45$ erläutert.

Schliesslich handelt der *elfte* Abschnitt noch von der Transformation $6a^{\text{ten}}$ Grades, wofür der Fall $n = 30$ als Beispiel dient.

Bei diesen Anwendungen gelingt es häufig noch, die Resultate in besonders elegante Form zu bringen. Während nämlich die allgemeine Aufgabe nach den vorstehenden Angaben so lauten würde: „Man soll J und $\bar{J}$ als *rationale* Functionen *zweier* Parameter mit möglichst niedrigem Charakter darstellen, so dass die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ durch die viel einfachere Beziehung zwischen diesen Parametern ersetzt wird," kann man in vielen Fällen J als *rationale* Function *eines einzigen* Parameters ξ, und $\bar{J}$ als *dieselbe rationale* Function eines zweiten Parameters $\bar{\xi}$ darstellen, wobei dann zwischen ξ und $\bar{\xi}$ eine verhältnissmässig einfache Beziehung stattfindet.

Mit den durchgeführten Beispielen ist die Zahl der leicht zu bewältigenden Anwendungen durchaus nicht erschöpft; aber der Umfang der Abhandlung wäre zu gross geworden, hätte man noch mehr besondere Fälle herangezogen. Auch wird nicht das Hauptgewicht auf die Durchführbarkeit zahlreicher Beispiele gelegt, sondern auf die algebraischen Beziehungen, welche mit der angegebenen Methode in Zusammenhang stehen. Man hat es nämlich hier mit „Klassen" algebraischer Gleichungen zu thun, deren Verzweigung der Untersuchung leichter zugänglich ist als in den meisten bisher bekannten Beispielen. Ebenso finden die hier erläuterten Methoden, wie ich später zu zeigen hoffe, umfangreiche Verwendung bei der *complexen Multiplication der elliptischen Functionen.*

Was die Bezeichnungen betrifft, so werde ich ebenso wie in meinen früheren Arbeiten die Theorie der elliptischen Functionen nach den Methoden von Herrn Weierstrass zu Grunde legen. Da sich aber die hier folgenden Untersuchungen eng an meine Abhandlung: „Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen“ (Math. Annalen, Bd. 26, S. 369—454)*) anschliessen, so sollen mehrere Bezeichnungen, welche ich dort erklärt habe, auch hier benutzt werden.

Dem primitiven Periodenpaare 2ω, $2\omega'$ sollen wieder die Grössen

$$(3) \qquad h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}, \quad Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu}) = Q$$

entsprechen. Vertauscht man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit einem äquivalenten

$$(4) \quad 2\varpi = 2p\omega + 2q\omega',\ 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega', \quad (pq' - p'q = +1),$$

so ändert sich $Q(\omega, \omega')^{24}$ gar nicht, denn es ist

$$(5) \qquad Q(\varpi, \varpi')^{24} = Q(\omega, \omega')^{24} = \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Ferner war

$$(6) \qquad f(n) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')^n}, \quad L(n) = Q^{n-1} f(n),$$

es wird also, abgesehen von einer 24ten Wurzel der Einheit,

$$(6a) \qquad L(n) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}.$$

Noch etwas einfacher werden mehrere Ausdrücke in meiner vor. Abh., wenn man die von Herrn Weierstrass definirte Function σu für den vorliegenden Zweck durch eine andere Function, nämlich durch

$$(7) \qquad \tau(u) = \tau(u \,|\, \varpi, \varpi') = e^{-\frac{\eta u^2}{2\varpi}} \sigma(u \,|\, \varpi, \varpi')$$

ersetzt.**) Dabei ist

---

*) Diese Abhandlung wird daher in dem Folgenden öfters zu erwähnen sein. Deshalb soll sie nicht immer mit dem ausführlichen Titel, sondern nur durch die Worte: „meine vorige Abhandlung“ oder noch kürzer: „m. vor. Abh.“ citirt werden.

**) Aus einer mündlichen Mittheilung des Herrn Weierstrass schliesse ich, dass er bei seinen eigenen, nicht veröffentlichten Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen vermuthlich denselben oder doch einen ähnlichen Ausdruck wie $\tau(u)$ benutzt. Nach den Bezeichnungen von Jacobi (ges. Werke, Bd. 1, S. 501) wird

$$\tau(u \,|\, \varpi, \varpi') = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Q(\varpi, \varpi')^3} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\varpi}, e^{\frac{\varpi' \pi i}{\varpi}}\right).$$

(4a) $\qquad 2\overline{\eta} = 2p\eta + 2q\eta', \quad 2\overline{\eta}' = 2p'\eta + 2q'\eta'.$

Es folgt dann aus der bekannten Formel

$$\sigma(u+2\overline{\omega}) = (-1)^{pq+p+q}\, e^{2\overline{\eta}(u+\overline{\omega})}\, \sigma u,$$

weil in diesem Falle $pq+p+q$ immer eine *ungerade* Zahl ist,

(8) $\qquad \tau(u+2\overline{\omega}) = -\tau(u), \quad \tau(2\overline{\omega}-u) = -\tau(-u) = \tau(u),$

und wenn man

$$u = \frac{2\alpha\overline{\omega}}{n}$$

setzt,

$$(9)\quad \begin{cases} \tau\left(\dfrac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right) = e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \overline{\eta}\overline{\omega}}\, \sigma\left(\dfrac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right), \\ \tau\left(\dfrac{2(n-\alpha)\overline{\omega}}{n}\right) = \tau\left(\dfrac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right), \quad \tau\left(\dfrac{2(n+\alpha)\overline{\omega}}{n}\right) = -\tau\left(\dfrac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right). \end{cases}$$

Der Vortheil, welchen diese Function $\tau(u)$ für die Transformation der elliptischen Functionen bietet, ergiebt sich z. B. schon aus den folgenden Formeln. Nach Gleichung (17a) m. vor. Abh. war für $n = 2m+1$

$$(10)\quad \overline{\sigma}(u) = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\overline{\omega}}{n}, \overline{\omega}'\right) = e^{\frac{1}{2}B_1u^2}\, \sigma(u)^n \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right)\right];\text{*)}$$

führt man aber die Functionen $\tau(u)$ und $\overline{\tau}(u)$ statt $\sigma(u)$ und $\overline{\sigma}(u)$ ein, so erhält diese Gleichung die einfachere Form

$$(10a)\quad \overline{\tau}(u) = \tau\left(u \,\middle|\, \frac{\overline{\omega}}{n}, \overline{\omega}'\right) = \tau(u)^n \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right)\right].$$

Ist n eine *gerade* Zahl, also $n = 2m+2$, so wird nach Gleichung (17b) m. vor. Abh.

$$(11)\quad \overline{\sigma}(u) = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\overline{\omega}}{n}, \overline{\omega}'\right) = e^{\frac{1}{2}B_1u^2}\, \sigma_\lambda(u)\sigma(u)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\overline{\omega}}{n}\right)\right],$$

eine Gleichung, welche durch Einführung der Functionen $\tau(u)$ und $\overline{\tau}(u)$ die einfachere Form

---

*) Hierbei genügt die Grösse B_1 der Gleichung

$$2B_1\overline{\omega} = 2n(\overline{\eta} - \tilde{\eta}),$$

in der $\overline{\eta}$ aus $\tilde{\eta}$ entsteht, indem man das primitive Periodenpaar $2\overline{\omega}, 2\overline{\omega}'$ mit

$$2\overline{\omega} = \frac{2\overline{\omega}}{n}, \quad 2\overline{\omega}' = 2\overline{\omega}',$$

vertauscht. Ersetzt man nun in Gleichung (10) das Argument u durch

$$u + 2\overline{\omega} = u + 2n\overline{\omega},$$

so erhält man ohne Schwierigkeit den angegebenen Werth von B_1. In gleicher Weise wird B_1 für *gerade* Werthe von n erklärt.

$$(11a)\quad \bar{\tau}(u) = \tau\left(u \,\middle|\, \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \tau_\lambda(u)\, \tau(u)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]$$

annimmt. Dabei geht $\tau_\lambda(u)$ in ähnlicher Weise aus $\sigma_\lambda(u)$ hervor, wie $\tau(u)$ aus $\sigma(u)$, es ist nämlich

$$(12)\qquad \tau_\lambda(u) = \tau_\lambda(u \,|\, \varpi, \varpi') = e^{-\frac{\eta u^2}{2\varpi}} \sigma_\lambda(u) = \frac{\tau(\varpi - u)}{\tau(\varpi)}.$$

Aus Gleichung (24) m. vor. Abh. folgt sodann, dass die Grösse, welche dort $\sigma_{\alpha p, \alpha q}$ genannt wurde, mit $-\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ identisch ist, so dass also

$$(13)\qquad \sigma_{\alpha p, \alpha q} \doteq -\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$$

wird, wodurch die Gleichungen (26) und (32) ebendaselbst die einfachere Form

$$(14)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \frac{\tau\left(\frac{2(\beta-\alpha)\varpi}{n}\right) \tau\left(\frac{2(\beta+\alpha)\varpi}{n}\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2 \tau\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)^2},$$

$$(15)\qquad f(n)^2 = f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^2 = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$$

erhalten.

Erster Theil.

Allgemeine Untersuchungen.

I. Abschnitt.

Eigenschaften der Transformationsgleichungen.

§ 1.

Zurückführung der reducirten Theilungsgleichung auf Transformationsgleichungen.*)

Es sei n eine beliebig zusammengesetzte Zahl, also

$$(16)\qquad n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

und es seien wieder die Zahlen $\varphi(n)$ und $T(n)$ definirt durch die Gleichungen

*) Was hier unter der *reducirten Theilungsgleichung* zu verstehen ist, findet sich in § 2 m. vor. Abh.

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi = \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots, \\ T = T(n) = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots; \end{cases}$$

ferner sei wieder

$$(18)\qquad w = w_{\lambda,\mu} = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n},$$

wobei die beiden ganzen Zahlen λ und μ keinen Factor gemein haben sollen, der auch ein Factor von n ist, dann gilt bekanntlich der Satz:

I. *Ist S eine symmetrische Function der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$, wo l alle Werthe annimmt, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$, so ist S die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{ten}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.*

Der Satz hat nur einen Sinn, wenn n von 2 verschieden ist, und kann dann bewiesen werden, wie folgt:

Da l relativ prim ist zu n, so gehören die Grössen $\wp(lw)$ sämmtlich zu dem reducirten System der Theilwerthe von $\wp(u)$ (vergl. § 2 m. vor. Abh.); ihre Anzahl ist daher $\frac{1}{2}\varphi(n)$. Dieselben Theilwerthe, nur in anderer Aufeinanderfolge, erhält man, indem man w mit mw vertauscht, wenn m zu n relativ prim ist. Es sind nämlich die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Theilwerthe $\wp(lmw)$ sämmtlich von einander verschieden, weil aus

$$\wp(l_1 mw) = \wp(l_2 mw)$$

folgen würde, dass

$$l_1 mw \mp l_2 mw = mw(l_1 \mp l_2) = 2p\omega + 2q\omega'$$

eine ganze Periode wäre. Dies ist aber nur möglich, wenn $l_1 \mp l_2$ durch n theilbar ist, d. h. wenn

$$\wp(l_1 w) = \wp(l_2 w).$$

Sind die ganzen Zahlen l und m gegeben, so kann man aber immer eine ganze Zahl l_1, welche kleiner als $\frac{n}{2}$ ist, so bestimmen, dass

$$l_1 m \mp l \equiv 0 \pmod{n}$$

und deshalb

$$\wp(l_1 mw) = \wp(lw)$$

wird. Da nun $\wp(lu)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist, so kann S auch als eine rationale Function von $\wp(w)$ allein dargestellt werden. Deshalb ist

$$S = R(\wp(w))$$

sicher die Wurzel einer Gleichung

$$(19)\qquad F(S, g_2, g_3) = 0,$$

deren Grad in Bezug auf S gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$ ist, und deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Setzt man nämlich für $\wp(w)$ die sämmtlichen Theilwerthe des reducirten Systems und bildet die zugehörigen Werthe von $R(\wp(w))$, so sind die symmetrischen Functionen von diesen $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$ Grössen rationale Functionen von g_2 und g_3. Deshalb entsprechen auch die Wurzeln der Gleichung (19) den $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$ verschiedenen Theilwerthen des reducirten Systems.

In diesem Falle sind aber je $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Wurzeln einander gleich, denn S ändert sich gar nicht, wenn man $\wp(w)$ mit $\wp(mw)$ vertauscht. Man erhält daher, von welchem Werthe w man auch ausgehen mag,

$$S = R(\wp(w)) = R(\wp(mw)),$$

wobei m alle Werthe annehmen darf, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$; folglich muss $F(S, g_2, g_3)$ die $\frac{1}{2}\varphi(n)^{\text{te}}$ Potenz einer *ganzen* rationalen Function von S sein, die nur noch vom Grade $T(n)$ ist, d. h. S ist die Wurzel einer Gleichung T^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Dieser Satz findet sich auch in der inhaltsreichen Abhandlung von Herrn H. Weber: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ (Acta mathematica, Bd. 6, S. 375), natürlich mit der Modification, dass es sich dort nicht um symmetrische Functionen der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$, sondern um symmetrische Functionen der $\varphi(n)$ Grössen $\sin \operatorname{am}(s\Omega)$ handelt, wobei

$$\Omega = \frac{4\mu K + 4\mu' K'}{n}$$

ist und s alle zu n relativ primen Zahlen durchläuft, die kleiner als n sind. Deshalb sind dann auch die Coefficienten der Gleichung bei Herrn Weber rationale Functionen von k^2.

Herr Weber nennt eine solche Gleichung *eine zum Transformationsgrad n* (oder kurz *zu n*) *gehörige Transformationsgleichung.*

Diese Bezeichnung soll auch hier benutzt werden, und ebenso die beiden Sätze, welche Herr Weber für solche Transformationsgleichungen angiebt, nämlich:

II. *Jede Transformationsgleichung ist entweder irreducibel oder sie ist die Potenz einer irreduciblen Gleichung.*

III. *Durch die Wurzeln einer beliebigen irreduciblen Transformationsgleichung sind die entsprechenden Wurzeln aller Transformationsgleichungen rational darstellbar.*

Der Beweis dieser Sätze ist für die vorliegende Modification ganz in derselben Weise zu führen möglich wie bei Herrn Weber, soll aber erst bei der hier folgenden Verallgemeinerung gegeben werden.

Der Begriff der Transformationsgleichung lässt sich nämlich noch wesentlich erweitern. Schon in § 3 m. vor. Abh. hatte ich folgenden Satz bewiesen:

IV. *Ist $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1}w)$, wo w wieder gleich $w_{\lambda,\mu}$ und wo $\varkappa$ die kleinste Zahl ist, für welche $k^\varkappa \equiv \pm 1$ (mod. n) ist, so wird $C_{\lambda,\mu}$ die Wurzel einer Gleichung vom Grade $\frac{1}{2\varkappa}\varphi(n)T(n)$, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.*

Ist n oder $\frac{n}{2}$ die Potenz einer Primzahl p, die von 2 verschieden ist, oder hat n einen der Werthe 2 und 4, so giebt es primitive Wurzeln g von n. Setzt man in diesem Falle $k = g$, so wird $2\varkappa$ gleich $\varphi(n)$ und $C_{\lambda,\mu}$ die Wurzel einer Resolvente vom Grade $T(n)$, welche dieselben Eigenschaften besitzt wie eine Transformationsgleichung. Auch in einigen anderen Fällen kann man durch *einmalige* Anwendung des Satzes IV Resolventen vom Grade $T(n)$ bilden. Wenn dies aber nicht möglich ist, wenn man also auf diesem Wege nur Resolventen erhält, deren Grad ein *Vielfaches* von $T(n)$ ist, so lässt sich folgendes Verfahren einschlagen.

Da $2\varkappa < \varphi(n)$ ist, so kann man unter den Zahlen, die zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$, eine Zahl s so auswählen, dass sie den $2\varkappa$ Zahlen

$$\pm 1, \pm k, \pm k^2, \ldots \pm k^{\varkappa-1}$$

modulo n *nicht* congruent ist. Es sind dann die $\varkappa$ Grössen

(20) $$\wp(sw), \wp(ksw), \wp(k^2sw), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}sw)$$

von einander und von den $\varkappa$ Grössen

(21) $$\wp(w), \wp(kw), \wp(k^2w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}w)$$

verschieden. Wäre nämlich

$$\wp(k^\alpha sw) = \wp(k^\beta sw)$$

und ist z. B. $\alpha < \beta$, so müsste

$$k^\alpha sw \mp k^\beta sw = k^\alpha sw(1 \mp k^{\beta-\alpha}) = 2p\omega + 2q\omega'$$

eine ganze Periode sein. Da w aber den Nenner n hat, und die Zahlen k und s zu n relativ prim sind, so müsste

$$k^{\beta-\alpha} \equiv \pm 1 \text{ (mod. } n)$$

sein, und dies ist unmöglich, da α und β beide kleiner als n sind.

Wäre dagegen

(22) $$\wp(k^\alpha sw) = \wp(k^\beta w),$$

so kann man auch hier voraussetzen, dass $\alpha < \beta$ ist, denn wäre $\alpha > \beta$, so könnte man β mit $\beta + \varkappa$ vertauschen. In beiden Fällen ist

$$0 < \beta - \alpha < \varkappa.$$

Aus Gleichung (22) würde folgen, dass

$$k^\alpha s w \mp k^\beta w = k^\alpha w (s \mp k^{\beta-\alpha}) = 2p\omega + 2q\omega'$$

eine ganze Periode ist, dass also $s \mp k^{\beta-\alpha}$ durch n theilbar ist. Dies widerstreitet aber der Wahl von s.

Bildet man jetzt die Grössen

(23) $$\wp(s^2 w),\ \wp(k s^2 w),\ \wp(k^2 s^2 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} s^2 w),$$

so können zwei Fälle eintreten. Entweder ist $\wp(s^2 w)$ eine der Grössen $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2 w)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1} w)$ in der Reihe (21), oder $\wp(s^2 w)$ ist von ihnen verschieden. Im ersten Falle ist die Reihe (23) nur eine cyklische Vertauschung der Reihe (21); im zweiten Falle aber enthalten die Reihen (20), (21) und (23) lauter *verschiedene* Theilwerthe des $\wp$, was man in ähnlicher Weise zeigen kann, wie es vorhin bei den Reihen (20) und (21) geschehen ist.

Bildet man in dem zweiten Falle noch die Reihe

(24) $$\wp(s^3 w),\ \wp(k s^3 w),\ \wp(k^2 s^3 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} s^3 w),$$

so können wieder zwei Fälle eintreten: Entweder ist die Reihe (24) nur eine cyklische Vertauschung der Reihe (21), oder sie enthält lauter Theilwerthe von $\wp$, die in den vorhergehenden Reihen noch nicht enthalten sind. In dem zweiten Falle ist das Verfahren noch weiter fortzusetzen, schliesslich wird man aber immer zu einer Reihe

(25) $$\wp(s^\sigma w),\ \wp(k s^\sigma w),\ \wp(k^2 s^\sigma w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} s^\sigma w)$$

kommen müssen, welche nur eine cyklische Vertauschung der Reihe (21) ist. Bezeichnet man mit σ die kleinste Zahl, welche dieser Forderung entspricht, so muss $2\varkappa\sigma$ ein Theiler von $\varphi(n)$ sein, denn die $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta w)$ sind sämmtlich Grössen von der Form $\wp(lw)$, wo l alle Zahlen durchläuft, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$, so dass $\wp(lw)$ im Ganzen $\frac{1}{2}\varphi(n)$ verschiedene Werthe hat. Wenn nun $\varkappa\sigma$ nicht *gleich*, sondern *kleiner* ist als $\frac{1}{2}\varphi(n)$, so wähle man l_1 so, dass $\wp(l_1 w)$ von den $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta w)$ verschieden ist. Vertauscht man jetzt w mit $l_1 w$, so erhält man ein zweites System von $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta l_1 w)$, welche von einander und von den $\varkappa\sigma$ Grössen des ersten Systems verschieden sind.

Entweder sind damit die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$ erschöpft, so dass $2\varkappa\sigma = \frac{1}{2}\varphi(n)$ wird, oder man kann durch passende Wahl von l_2

noch ein drittes System von $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta l_2 w)$ bilden und so fortfahren, bis sämmtliche Grössen $\wp(lw)$ vorgekommen sind.

Braucht man im Ganzen m solche Systeme, so ist also

$$\frac{1}{2}\varphi(n) = m\varkappa\sigma,$$

folglich ist $\frac{1}{2}\varphi(n)$ ein Vielfaches von $\varkappa\sigma$.

Bezeichnet man jetzt mit $C^{(\alpha)}$ die cyklische Function der Grössen $\wp(s^\alpha w)$, $\wp(ks^\alpha w)$, $\wp(k^2 s^\alpha w)$, $\ldots$ $\wp(k^{\varkappa-1}s^\alpha w)$, welche aus $C_{\lambda,\mu}$ (oder kürzer aus C) durch Vertauschung von w mit $s^\alpha w$ hervorgeht, so kann man eine cyklische Function C' der cyklischen Functionen

(26) $$C,\ C^{(1)},\ C^{(2)}, \ldots C^{(\sigma-1)}$$

bilden*) und kann C' wieder als eine cyklische Function der $\varkappa$ Grössen

$$\wp(w),\ \wp(kw),\ \wp(k^2 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}w)$$

betrachten, weil $\wp(s^\alpha u)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist. Deshalb kann man auf C' den Satz IV anwenden, nach welchem C' zunächst die Wurzel einer Resolvente vom Grade $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa}$ wird.

Bei dieser Resolvente sind aber je σ Wurzeln einander gleich, denn durch Vertauschung von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2w)$, $\ldots$ $\wp(k^{\varkappa-1}w)$ mit $\wp(s^\alpha w)$, $\wp(ks^\alpha w)$, $\wp(k^2 s^\alpha w)$, $\ldots$ $\wp(k^{\varkappa-1}s^\alpha w)$ geht C in $C^{(\alpha)}$, $C^{(1)}$ in $C^{(\alpha+1)}$, $\ldots$ über, so dass sich die cyklische Function C' gar nicht ändert. Der Grad der Resolvente, von welcher C' abhängt, lässt sich also auf $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa\sigma}$ reduciren, und es gilt der Satz:

V. *Ist $C^{(\alpha)}$ eine cyklische Function der $\varkappa$ Grössen*

$$\wp(s^\alpha w),\ \wp(ks^\alpha w),\ \wp(k^2 s^\alpha w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}s^\alpha w),$$

wo $\varkappa$ der kleinste Exponent ist, für welchen $k^\varkappa \equiv \pm 1$ modulo n wird, und ist C' eine cyklische Function der σ Functionen

$$C,\ C^{(1)},\ C^{(2)}, \ldots C^{(\sigma-1)},$$

wo σ der kleinste Exponent ist, für welchen

$$s^\sigma \equiv \pm k^\alpha \ (mod.\ n)$$

wird, während α noch irgend einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots \varkappa - 1$ haben darf, so ist C' die Wurzel einer Resolvente vom Grade $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa\sigma}$, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, muss man schliesslich zu einer Resolvente vom Grade $T(n)$ gelangen, die auch noch „*eine zu n gehörige Transformationsgleichung*“ heissen soll.

*) Eine solche Function möge „*eine mehrfach cyklische Function von den Theilwerthen der $\wp$-Function*“ heissen.

An Stelle der symmetrischen Functionen von $\wp(lw)$ im Satz I sind jetzt also ein oder mehrere Cyklen dieser Grössen getreten.

Die Sätze II und III gelten auch noch für den so erweiterten Begriff der Transformationsgleichung.

Dass nämlich eine solche Transformationsgleichung irreducibel oder die Potenz einer irreduciblen Gleichung ist, folgt daraus, dass sich g_2 und g_3 gar nicht ändern, wenn man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \; 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \quad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht. Dagegen kann man die Zahlen p, q, p', q' so wählen, dass aus *einer* Wurzel der Transformationsgleichung *alle übrigen* durch solche Vertauschungen hervorgehen. Wenn also die Wurzel einer Transformationsgleichung irgend einer Gleichung genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, so müssen derselben Gleichung auch alle übrigen Wurzeln der Transformationsgleichung genügen.

Sind ferner

$$x_1, x_2, \ldots x_T$$

die Wurzeln einer bestimmten Transformationsgleichung und

$$y_1, y_2, \ldots y_T$$

die entsprechenden Wurzeln irgend einer andern Transformationsgleichung, so sind auch

$$y_1 x_1^\alpha, \; y_2 x_2^\alpha, \ldots y_T x_T^\alpha$$

die Wurzeln einer Transformationsgleichung, denn $x_1{}^\alpha$ kann als eine Function von $\wp(w)$ allein angesehen werden, deren Werth sich gar nicht ändert, wenn man $\wp(w)$ mit einer der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$ vertauscht. Dasselbe gilt von y_1, folglich auch von $y_1 x_1{}^\alpha$.

Deshalb sind die Ausdrücke

$$(27) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_T = a_0, \\ y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_T x_T = a_1, \\ y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + \cdots + y_T x_T^2 = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 x_1^{T-1} + y_2 x_2^{T-1} + \cdots + y_T x_T^{T-1} = a_{T-1} \end{cases}$$

als rationale Functionen von g_2 und g_3 darstellbar. Setzt man nun

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_T)$$

und

$$\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = F_0(x_1) + xF_1(x_1) + x^2 F_2(x_1) + \cdots + x^{T-1} F_{T-1}(x_1),$$

so wird

$$(28) \quad y_1 F'(x_1) = a_0 F_0(x_1) + a_1 F_1(x_1) + a_2 F_2(x_1) + \cdots + a_{T-1} F_{T-1}(x_1).$$

Der Kürze wegen möge ein Ausdruck, welcher die Wurzel einer Transformationsgleichung ist, eine *Transformationsgrösse* heissen.

In ähnlicher Weise lässt sich auch der Satz beweisen:

VI. *Sind x_1 und y_1 beide cyklische Functionen von*

$$\wp(w),\ \wp(kw),\ \wp(k^2 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} w),$$

so lässt sich y_1 als rationale Function von x_1 und den Invarianten g_2 und g_3 darstellen.

Ist nämlich $\nu = \frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa}$, und sind

$$x_1,\ x_2, \ldots x_\nu$$

die Wurzeln der Resolvente für x, und

$$y_1,\ y_2, \ldots y_\nu$$

die entsprechenden Wurzeln der Resolvente für y, so sind die Ausdrücke

$$(29)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu = b_0, \\ y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_\nu x_\nu = b_1, \\ y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + \cdots + y_\nu x_\nu^2 = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 x_1^{\nu-1} + y_2 x_2^{\nu-1} + \cdots + y_\nu x_\nu^{\nu-1} = b_{\nu-1} \end{cases}$$

als rationale Functionen von g_2 und g_3 darstellbar, weil $y_1 x_1^\alpha$ gleichfalls eine cyklische Function von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} w)$ ist. Setzt man also

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\nu)$$

und

$$\frac{G(x) - G(x_1)}{x - x_1} = G_0(x_1) + x G_1(x_1) + x^2 G_2(x_1) + \cdots + x^{\nu-1} G_{\nu-1}(x_1),$$

so wird

$$(30)\quad y_1 G'(x_1) = b_0 G_0(x_1) + b_1 G_1(x_1) + b_2 G_2(x_1) + \cdots + b_{\nu-1} G_{\nu-1}(x_1).$$

Man erkennt ohne Weiteres, wie man diesen Satz auch noch verallgemeinern kann auf zwei Grössen x_1 und y_1, welche *mehrfach cyklische Functionen* von Theilwerthen der $\wp$-Function sind.

§ 2.

Berechnung der Theilwerthe n^{ten} Grades der Function $\wp u$.

Wie nützlich die vorstehende Erweiterung des Satzes I von *symmetrischen* auf *cyklische* Functionen ist, erkennt man daraus, dass man jetzt sehr leicht die Theilwerthe der $\wp$-Function durch Wurzelausziehen berechnen kann, sobald man die Auflösung *einer* Transformationsgleichung besitzt. Nach Gleichung (28) kennt man dann die Auflösung *aller* Transformationsgleichungen und man kann (unter Beibehaltung der im vorigen Paragraphen erklärten Bezeichnungen) setzen für $\alpha = 0, 1, 2, \cdots \varkappa - 1$

$$(31) \quad C_\alpha = \left[\wp(w) + e^{\frac{2\alpha\pi i}{\varkappa}} \wp(kw) + e^{\frac{4\alpha\pi i}{\varkappa}} \wp(k^2 w) + \cdots + e^{\frac{2(\varkappa-1)\alpha\pi i}{\varkappa}} \wp(k^{\varkappa-1} w)\right]^\varkappa.$$

Es sind dann $\sqrt[\varkappa]{C_0}$, C_1, C_2, $\cdots$ $C_{\varkappa-1}$ *cyklische* Functionen von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2 w)$, $\cdots$ $\wp(k^{\varkappa-1} w)$ und deshalb Wurzeln von Resolventen des $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa}$ten Grades. Aus den Gleichungen (31) folgt aber

$$(32) \quad \begin{cases} \varkappa\wp(w) = \sqrt[\varkappa]{C_0} + \sqrt[\varkappa]{C_1} + \sqrt[\varkappa]{C_2} + \cdots + \sqrt[\varkappa]{C_{\varkappa-1}}, \\ \varkappa\wp(kw) = \sqrt[\varkappa]{C_0} + e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}} \sqrt[\varkappa]{C_1} + e^{-\frac{4\pi i}{\varkappa}} \sqrt[\varkappa]{C_2} + \cdots + e^{-\frac{2(\varkappa-1)\pi i}{\varkappa}} \sqrt[\varkappa]{C_{\varkappa-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dabei kann man noch $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\cdots$ rational durch eine *einzige* Wurzelgrösse, z. B. durch $\sqrt[\varkappa]{C_1}$ ausdrücken, denn $\sqrt[\varkappa]{C_0}$ und $\sqrt[\varkappa]{\frac{C_\alpha}{C_1^\alpha}}$ sind cyklische Functionen von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2 w)$, $\cdots$ $\wp(k^{\varkappa-1} w)$ und deshalb nach Satz VI in § 1 *rationale* Functionen von C_1, g_2 und g_3.

Setzt man ferner für $\beta = 0, 1, 2, \cdots \sigma - 1$

$$(33) \quad C'_{\alpha,\beta} = \left[C_\alpha + e^{\frac{2\beta\pi i}{\sigma}} C_\alpha^{(1)} + e^{\frac{4\beta\pi i}{\sigma}} C_\alpha^{(2)} + \cdots + e^{\frac{2(\sigma-1)\beta\pi i}{\sigma}} C_\alpha^{(\sigma-1)}\right]^\sigma,$$

wobei $C_\alpha^{(\gamma)}$ aus C_α hervorgeht, indem man w mit $s^\gamma w$ vertauscht, so ist $C'_{\alpha,\beta}$ die Wurzel einer Resolvente vom Grade $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa\sigma}$, und man erhält aus den Gleichungen (33)

$$(34) \quad \begin{cases} \sigma C_\alpha = \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,0}} + \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,1}} + \sqrt[\sigma]{C_{\alpha,2}} + \cdots + \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,\sigma-1}}, \\ \sigma C_\alpha^{(1)} = \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha\,0}} + e^{-\frac{2\pi i}{\sigma}} \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,1}} + e^{-\frac{4\pi i}{\sigma}} \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,2}} + \cdots + e^{-\frac{2(\sigma-1)}{\sigma}} \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,\sigma-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Auch hier lassen sich die vorkommenden Wurzelgrössen *rational* durch eine einzige ausdrücken.

Indem man so fortfährt, kann man schliesslich die Theilwerthe der $\wp$-Function, welche dem reducirten System angehören, durch Transformationsgrössen ausdrücken. Dabei hat man genau ebenso viele Wurzelausziehungen nöthig, als Cyklen zu den betreffenden Transformationsgrössen führen, und das Product der Wurzelexponenten ist gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

Die Auflösung der Transformationsgleichungen durch algebraische Operationen ist möglich für die singulären Werthe von $\frac{\omega'}{\omega}$, bei denen complexe Multiplication stattfindet. Dann giebt also die vorstehende Methode einen Weg an, auf dem man die Theilwerthe der $\wp$-Function leicht berechnen kann.

§ 3.

Einige Sätze über die Bildung von Transformationsgrössen.

Bei der Bildung von Transformationsgrössen, wie sie in § 1 durch die Sätze I bis VI angegeben ist, kann man noch dadurch eine Modification herbeiführen, dass jede *symmetrische* Function auch eine *cyklische* Function ist. Deshalb kann man den Satz I mit den Sätzen IV und V in der Weise combiniren, dass man z. B. zunächst die *cyklische* Function C von den Grössen $\wp(w), \wp(kw), \wp(k^2 w), \cdots \wp(k^{\varkappa-1} w)$ bildet, dann aber für C' eine *symmetrische* Function von $C, C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots C^{(\sigma-1)}$ setzt.

Der Vortheil, welchen die Benutzung *symmetrischer* Functionen bietet, liegt in dem Umstande, dass man mehrere Schritte auf einmal machen kann, die man bei *cyklischen* Functionen *nach* einander machen müsste. Ist z. B. $2\varkappa\sigma < \varphi(n)$, ist also

$$\varphi(n) = 2\nu\varkappa\sigma,$$

so kann man der Zahl s im Ganzen ν verschiedene Werthe $s_1, s_2, \cdots s_\nu$ geben, so dass die Theilwerthe $\wp(k^\alpha s_\gamma^\beta w)$ sämmtlich von einander verschieden sind, wenn α die Zahlen 0 bis $\varkappa - 1$, β die Zahlen 0 bis $\sigma - 1$ und γ die Zahlen 1 bis ν durchläuft. Dadurch werden aber die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$ erschöpft.

Geht nun durch Vertauschung von w mit $s_\gamma^\beta w$ die cyklische Function C in $C_\gamma^{(\beta)}$ über, und bildet man eine *symmetrische* Function dieser $\nu\sigma$ Grössen $C_\gamma^{(\beta)}$, so ist sie eine *Transformationsgrösse.*

Bisher waren bei der Bildung der Transformationsgrössen diejenigen Theilwerthe $\wp(lw)$ der $\wp$-Function ausgeschlossen, bei denen l einen gemeinsamen Theiler mit n hat. Auch diese Beschränkung kann noch aufgehoben werden, weil $\wp(au)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist. Wenn also a der grösste gemeinsame Theiler von l und n ist, so wird eine cyklische Function der Grössen

$$\wp(aw),\ \wp(kaw),\ \wp(k^2 aw),\ \cdots \wp(k^{\varkappa-1} aw)$$

auch eine cyklische Function von

$$\wp(w),\ \wp(kw),\ \wp(k^2 w),\ \cdots \wp(k^{\varkappa-1} w)$$

sein. Dabei kann freilich der Umstand eintreten, dass $\varkappa$ nicht die kleinste Zahl ist, für welche

$$ak^{\varkappa-1} \equiv \pm a \,(\text{mod.}\, n), \quad \text{oder} \quad k^{\varkappa} \equiv \pm 1 \left(\text{mod.}\, \frac{n}{a}\right),$$

ist. Wird z. B. schon

$$k^{t} \equiv \pm 1 \left(\text{mod.}\, \frac{n}{a}\right),$$

so ist t ein Factor von $\varkappa$, also $\varkappa = rt$. Deshalb wird man es in Wirklichkeit nur mit einer cyklischen Function der t Theilwerthe

$$\wp(aw),\ \wp(kaw),\ \cdots\ \wp(k^{t-1}aw)$$

zu thun haben; man kann sie aber doch noch als eine cyklische Function der $\varkappa$ Grössen

$$\wp(aw),\ \wp(kaw),\ \cdots\ \wp(k^{\varkappa-1}aw)$$

betrachten. Bezeichnet man nämlich mit $C^{(\alpha)}$ diejenige cyklische Function, welche aus C durch Vertauschung von aw mit $k^{\alpha t}aw$ hervorgeht, so wird

$$C^{(\alpha)} = C \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{r}\left(C + C^{(1)} + C^{(2)} + \cdots + C^{(r-1)}\right)$$

eine *cyklische* Function der $\varkappa$ Grössen $\wp(aw)$, $\wp(kaw)$, $\cdots$ $\wp(k^{\varkappa-1}aw)$.

Beschränkt man sich bei dieser Betrachtung auf *symmetrische* Functionen, was für die späteren Untersuchungen ausreicht, so gilt zunächst der folgende Satz:

I. *Durchläuft l alle ganzzahligen Werthe, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2a}$, wo a ein beliebiger Factor von n ist, so kann man jede symmetrische Function X der $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{n}{a}\right) = n_a$ Theilwerthe $\wp(law)$ auch darstellen als eine symmetrische Function der $\frac{1}{2}\varphi(n) = n_1$ Theilwerthe $\wp(lw)$.*

Beweis. Die (rationale) symmetrische Function X der n_a Theilwerthe $\wp(law)$ lässt sich bekanntlich als rationale Function der Potenzsummen

$$S_1 = \sum \wp(law), \quad S_2 = \sum \wp(law)^2, \quad S_3 = \sum \wp(law)^3, \ \cdots$$

darstellen, wobei sich die Summen nur über n_a Werthe von l erstrecken.

Nun wird aber

$$\wp(l_1 aw) = \wp(l_2 aw), \quad \text{wenn} \quad l_1 \equiv \pm l_2 \left(\text{mod.}\, \frac{n}{a}\right)$$

ist. Deshalb darf man die Summation über alle zu n theilerfremden Werthe von l erstrecken, die kleiner sind als $\frac{n}{2}$, ohne dass sich die

Werthe von S_1, S_2, S_3, ..., von dem Factor $\frac{n_1}{n_a}$ abgesehen, ändern. Man kann also X auch als symmetrische Function der n_1 Theilwerthe $\wp(law)$ betrachten und folglich auch als symmetrische Function der n_1 Theilwerthe $\wp(lw)$, weil $\wp(au)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist.

Da bei diesem Satze a ein ganz beliebiger Theiler von n ist, so ergiebt sich daraus auch noch der folgende allgemeinere Satz:

II. *Sind $a, b, c, \ldots$ beliebige Factoren von n und durchlaufen $l_a, l_b, l_c, \ldots$ alle zu n theilerfremden Zahlen, welche bez. kleiner sind als $\frac{n}{2a}$, $\frac{n}{2b}$, $\frac{n}{2c}$, ..., so kann man eine rationale Function der Theilwerthe $\wp(l_a a w)$, $\wp(l_b b w)$, $\wp(l_c c w)$, ..., welche symmetrisch ist in Bezug auf die n_a Theilwerthe $\wp(l_a a w)$, ebenso in Bezug auf die n_b Theilwerthe $\wp(l_b b w)$, ebenso in Bezug auf die n_c Theilwerthe $\wp(l_c c w)$, u. s. w., als symmetrische Function der n_1 Theilwerthe $\wp(lw)$ darstellen.*

Dabei darf sich unter den Factoren $a, b, c, \ldots$ auch der Factor 1 befinden.

Verwendet man bei Bildung einer Transformationsgrösse *nur* Theilwerthe der $\wp$-Function von der Form $\wp(l_a a w)$, so gehört sie eigentlich zur Transformation vom Grade $\frac{n}{a}$. Deshalb wird in diesem Falle die Transformationsgleichung *reducibel*, d. h. sie ist die Potenz einer *irreducibeln* Gleichung niedrigeren Grades, so dass durch eine solche Transformationsgrösse die übrigen *nicht* mehr rational darstellbar sind.

Der Unterschied zwischen den beiden Grössen

$$w = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n} \quad \text{und} \quad \frac{2\varpi}{n} = \frac{2p\omega + 2q\omega'}{n}$$

besteht darin, dass p und q zu einander relativ prim sind, während λ und μ noch einen gemeinsamen Factor haben dürfen, der aber zu n relativ prim sein muss. Die Allgemeinheit der vorliegenden Untersuchungen erleidet jedoch keine Beschränkung, wenn λ und μ derselben Bedingung unterworfen werden wie p und q. Deshalb soll in dem Folgenden der Kürze wegen

$$(35) \qquad \frac{2\varpi}{n} = \frac{2p\omega + 2q\omega'}{n} = w$$

gesetzt werden.

§ 4.

Wirkliche Herleitung einiger Transformationsgrössen.

Unter den Transformationsgrössen, bei deren Bildung hauptsächlich symmetrische Functionen verwendet werden, möge an erster

Stelle diejenige genannt werden, welche Herr Weierstrass angegeben hat*), nämlich die Grösse

$$(36)\qquad G_1 = \wp(w) + \wp(2w) + \cdots + \wp\left(\frac{n-1}{2}\, w\right),$$

wobei n als eine *ungerade* Zahl vorausgesetzt wird. Man kann aber diesen Ausdruck ohne Weiteres so umgestalten, dass er auch noch für *gerade* Zahlen anwendbar ist, indem man setzt

$$(36\text{a})\quad B_1 = 2G_1 = \wp(w) + \wp(2w) + \wp(3w) + \cdots + \wp((n-1)w).\text{**})$$

Nach Gleichung (14) wird

$$\wp(\alpha w) - \wp(2\alpha w) = \frac{\tau(3\alpha w)}{\tau(\alpha w)\,\tau(2\alpha w)^2};$$

ferner erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) für $n = 2m + 1 = 6l \pm 1$

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \tau(2\alpha w) = \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w), \qquad \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(3\alpha w) = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w)$$

und deshalb

$$(37)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m} [\wp(\alpha w) - \wp(2\alpha w)] = \frac{(-1)^l}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w)^2}.$$

Setzt man also

$$(38)\qquad f = \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w),$$

so ist

$$(38\text{a})\qquad f^2 = \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w)^2 = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau(\alpha w)$$

als symmetrische Function der m Theilwerthe $\wp(\alpha w)$ eine *Transformationsgrösse.*

Die Grösse f^2 habe ich schon in meinen früheren Abhandlungen über Transformation der elliptischen Functionen***) benutzt. Auch in der folgenden Untersuchung wird dieser Ausdruck eine wichtige Rolle spielen.

---

*) Vergl. Felix Müller, de transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867.

**) Dieser Ausdruck ist schon in Gleichung (13) m. vor. Abh. erklärt worden.

***) Vergl. Journal für Mathematik, Bd. 87, S. 199—216, Bd. 88, S. 205—212 und Bd. 95, S. 218—231. Math. Annalen, Bd. 26, S. 369—454.

Ist n durch 2 oder durch 3 (oder gar durch 6) theilbar, so soll f^2 auch dann noch durch die Gleichung

$$f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^2 = f^2 = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau(\alpha w) \tag{39}$$

definirt werden. In diesem Falle ist aber nicht f^2, sondern erst eine Potenz davon eine *Transformationsgrösse.*

Entwickelt man f, bez. f^2, nach Potenzen von $h = e^{\frac{\varpi' \pi i}{\varpi}}$, so findet man (vergl. § 7 m. vor. Abh.), dass für beliebige Werthe von n

$$f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')^n}. \tag{40}$$

Auf die Grösse f^3 wird man für *ungerade* Werthe von n, also für $n = 2m + 1$ auch auf folgende Weise geführt. Bekanntlich ist

$$\wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4} = -\frac{\tau(2u)}{\tau(u)^4}, \tag{41}$$

folglich ist

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \wp'(\alpha w) = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{\tau(2\alpha w)}{\tau(\alpha w)^4} = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\tau(\alpha w)^3},$$

oder

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \wp'(\alpha w) = (-1)^m f^{-3}. \tag{42}$$

Daraus folgt z. B., dass für $n = 6l + 3$ die Grösse f^6 eine *Transformationsgrösse* ist.

Für $n = 9$ ist sogar schon f^3 eine Transformationsgrösse (vergl. § 31 m. vor. Abh.), denn da ist

$$f^{-3} = \wp'\left(\frac{2\varpi}{9}\right) \wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right) \wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right) \cdot \wp'\left(\frac{6\varpi}{9}\right) \tag{43}$$

eine *cyklische* Function der Grössen $\wp\left(\frac{2\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{4\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{8\varpi}{9}\right)$.

Ein anderes Beispiel für die Benutzung cyklischer Functionen und zwar für die Benutzung *mehrfach* cyklischer Functionen liefert § 23 m. vor. Abhandlung. Ist nämlich n das Quadrat einer ungeraden Primzahl $a = 2b + 1 = 6l \pm 1$, und ist g eine primitive Wurzel in Bezug auf den Modul n, so ist b die kleinste Zahl, für welche

$$\begin{cases} g^{2b} \equiv 1 \ (\text{mod. } a), & g^b \equiv -1 \ (\text{mod. } a), \\ g^{2ab} \equiv 1 \ (\text{mod. } n), & g^{ab} \equiv -1 \ (\text{mod. } n). \end{cases} \tag{44}$$

Setzt man jetzt

$$g^\alpha w = w_\alpha \quad \text{und} \quad k = g^b,$$

so lässt sich zeigen, dass

$$(45)\qquad x_\alpha = \frac{\wp(aw_\alpha) - \wp(2aw_\alpha)}{\wp'(aw_\alpha)} \prod_{\beta=0}^{a-1} \frac{\wp(k^\beta w_\alpha) - \wp(2k^\beta w_\alpha)}{\wp'(k^\beta w_\alpha)}$$

eine cyklische Function der a Theilwerthe

$$\wp(w_\alpha),\ \wp(kw_\alpha),\ \wp(k^2 w_\alpha), \cdots \wp(k^{a-1} w_\alpha)$$

wird. Wegen der Congruenzen (44) ist nämlich

$$\begin{array}{llll} \wp(k^a w_\alpha) = \wp(w_\alpha), & & \wp(2k^a w_\alpha) = \wp(2w_\alpha), \\ \wp(kaw_\alpha) = \wp(aw_\alpha), & & \wp(2kaw_\alpha) = \wp(2aw_\alpha), \\ \wp'(k^a w_\alpha) = -\wp'(w_\alpha), & & \wp'(kaw_\alpha) = -\wp'(aw_\alpha), \end{array}$$

folglich sind

$$[\wp(aw_\alpha) - \wp(2aw_\alpha)] \prod_{\beta=0}^{a-1} [\wp(k^\beta w_\alpha) - \wp(2k^\beta w_\alpha)]$$

und

$$\wp'(aw_\alpha) \prod_{\beta=0}^{a-1} \wp'(k^\beta w_\alpha)$$

rationale Functionen von $\wp(w_\alpha)$, die sich gar nicht ändern, wenn man $\wp(w_\alpha)$ mit $\wp(kw_\alpha)$ vertauscht. Deshalb ist (nach Satz IV in § 1) x_α die Wurzel einer Resolvente vom Grade

$$b \cdot T(n) = ba(a+1).$$

Schliesslich wird

$$(46)\qquad y = \prod_{\alpha=1}^{b} x_\alpha$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{b} \left[\frac{\wp(aw_\alpha) - \wp(2aw_\alpha)}{\wp'(aw_\alpha)} \prod_{\beta=0}^{a-1} \frac{\wp(k^\beta w_\alpha) - \wp(2k^\beta w_\alpha)}{\wp'(k^\beta w_\alpha)} \right]$$

eine symmetrische, also auch eine cyklische Function von $x_1, x_2, \ldots x_b$ und deshalb (nach Satz V in § 1) die Wurzel einer Resolvente vom Grade $T(n)$, d. h. y ist eine *Transformationsgrösse.*

Man kann jetzt noch zeigen, dass y gleich $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ ist; denn es ist

$$(47)\qquad \begin{cases} y = \prod\limits_{\alpha=1}^{b} \left[\dfrac{\wp(ag^\alpha w) - \wp(2ag^\alpha w)}{\wp'(ag^\alpha w)} \prod\limits_{\beta=0}^{a-1} \dfrac{\wp(g^{b\beta+\alpha} w) - \wp(2g^{b\beta+\alpha} w)}{\wp'(g^{b\beta+\alpha} w)} \right] \\ \quad = \prod\limits_{\alpha=1}^{2b(b+1)} \dfrac{\wp(\alpha w) - \wp(2\alpha w)}{\wp'(\alpha w)} = \dfrac{f^{-2}}{f^{-3}} = f. \end{cases}$$

Uebrigens erkennt man ohne Weiteres, dass man das vorstehende Beispiel als eine Combination zweier anderen erhält; das eine findet man, indem man

$$x_\alpha = [\wp(a w_\alpha) - \wp(2 a w_\alpha)] \prod_{\beta=0}^{a-1} [\wp(k^\beta w_\alpha) - \wp(2 k^\beta w_\alpha)],$$

$$y = \prod_{\alpha=1}^{b} x_\alpha = f^{-2}$$

setzt, und das andere, wenn

$$x_\alpha = \wp'(a w_\alpha) \prod_{\beta=0}^{a-1} \wp'(k^\beta w_\alpha), \quad y = \prod_{\alpha=1}^{b} x_\alpha = f^{-2}$$

ist. Dabei bleibt f auch dann noch eine Transformationsgrösse, wenn a *keine* Primzahl ist. (Vergl. m. vor. Abh. § 23 und 24.)

Von besonderem Interesse für das Folgende sind auch die Ausdrücke, welche die Form

(48) $$R = \prod \wp'(lw)$$

haben, wo l alle zu n theilerfremden Werthe durchläuft, welche kleiner sind als $\frac{n}{2}$. Nach Satz I in § 1 ist dann R^2 sicher eine *Transformationsgrösse.* Fügt man jetzt aber noch die Voraussetzung hinzu, dass sich n in zwei Factoren a und b zerlegen lässt, welche zu einander relativ prim und grösser als 2 sind, dann gilt der Satz, *dass R selbst eine Transformationsgrösse ist.*

Beweis. Da a und b relativ prim sind, so giebt es zwei ganze Zahlen x und y, für welche

(49) $$ax - by = 2$$

wird. Setzt man jetzt

$$ax - 1 = r,$$

so ist

$$ax = r + 1, \quad by = r - 1, \quad abxy = r^2 - 1,$$

also

(50) $$r^2 \equiv 1 \pmod{n}.$$

Die Zahl r ist daher sicher theilerfremd zu n; ferner sind auch die Zahlen $r + 1 = ax$ und $r - 1 = by$ kein Vielfaches von n; denn wäre

$$r + 1 = ax = cn = abc,$$

so wäre

$$ax - by = b(ac - y) = 2;$$

das ist aber unmöglich, weil b grösser als 2 vorausgesetzt ist. Ebenso würde aus

$$r - 1 = by = cn = abc$$

folgen, dass

$$ax - by = a(x - bc) = 2$$

wäre, und das ist gleichfalls nicht möglich, weil a nach Voraussetzung grösser als 2 ist.

Da a und b beide grösser als 2 sind, so sind $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ beide durch 2 theilbar, folglich ist

$$\varphi(n) = \varphi(a)\,\varphi(b) = 4\nu$$

durch 4 theilbar. Die Anzahl der Factoren auf der rechten Seite von Gleichung (48) ist daher gleich 2ν, so dass man diese Factoren paarweise ordnen kann, und zwar vereinige man

$$\wp'(lw) \quad \text{mit} \quad \wp'(lrw).$$

Diese beiden Grössen sind, auch vom Vorzeichen abgesehen, von einander verschieden, weil $r \pm 1$ nicht durch n theilbar ist. Es geht jetzt also Gleichung (48) über in

$$\text{(48a)} \qquad R = \pm \prod_{\alpha=1}^{\nu} \wp'(l_\alpha w)\,\wp'(l_\alpha r w),$$

wobei die 4ν Zahlen

$$\pm l_1,\ \pm l_1 r,\ \pm l_2,\ \pm l_2 r,\ \cdots \pm l_\nu,\ \pm l_\nu r$$

modulo n zu den $\varphi(n)$ Zahlen l congruent werden, welche kleiner sind als n und keinen Factor mit n gemeinsam haben.

Nun ist wegen der Congruenz (50)

$$\wp'(lw)\,\wp'(lrw) = \wp'(lrw)\,\wp'(lr^2 w)$$

eine rationale Function von $\wp(lw)$, deren Werth sich gar nicht ändert, wenn man $\wp(lw)$ mit $\wp(lrw)$ vertauscht, d. h. $\wp'(lw)\,\wp'(lrw)$ ist eine cyklische Function von $\wp(lw)$ und $\wp(lrw)$ und ist deshalb die Wurzel einer Resolvente vom Grade

$$\frac{1}{4}\,\varphi(n)\cdot T(n) = \nu \cdot T(n).$$

Da nun R eine symmetrische Function der ν Grössen $\wp'(l_\alpha w)\,\wp'(l_\alpha r w)$ ist, so wird R selbst die Wurzel einer Resolvente vom Grade $T(n)$, d. h. *R ist eine Transformationsgrösse.*

Die Voraussetzung, welche für den Beweis des vorstehenden Satzes erforderlich war, dass sich nämlich n in zwei Factoren a und b zerlegen lässt, welche zu einander theilerfremd und grösser als 2 sind, ist für die meisten Zahlen erfüllt; ausgenommen sind nur die folgenden Fälle

$$n = a, \quad n = a^\alpha, \quad n = 2a \quad \text{und} \quad n = 2a^\alpha,$$

wo a eine ungerade *Primzahl* ist. Aber auch in diesen Fällen ist, wie schon oben erwähnt wurde, R^2 sicher eine Transformationsgrösse. Ist z. B. $n = 2a$ und $a = 2b + 1$, so wird

$$R^2 = \prod_{\alpha=1}^{b} \wp'((2\alpha - 1)\,w)^2 = \pm \prod_{\alpha=0}^{a-2} \wp'(g^\alpha w),$$

wo g eine primitive Wurzel modulo n sein soll.

Gerade für $n = 2a$ kann man aber noch einige andere Transformationsgrössen herleiten, die später mehrfach benutzt werden sollen. Es sei also $n = 2a$ und $a = 2b + 1$, *wobei aber a auch eine zusammengesetzte Zahl sein darf*, dann setze man

$$(51) \qquad S = \prod_{\alpha=1}^{2b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \prod_{\alpha=1}^{2b} \wp'\left(\frac{\alpha\varpi}{a}\right) = \prod_{\alpha=1}^{2b} \frac{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^4}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (39)

$$\prod_{\alpha=1}^{2b} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) = \prod_{\alpha=1}^{a-1} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) = f\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^2 = f(a)^2,$$

$$\prod_{\alpha=1}^{2b} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2 = \frac{1}{\tau(\varpi)} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^2}{f\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^2} = \frac{f(n)^2}{f(2)^2},$$

folglich wird

$$(51\text{a}) \qquad S = \frac{f(a)^2 f(2)^4}{f(n)^4}.$$

Zum Beweise, dass S eine Transformationsgrösse ist, benutze man die bekannte Formel

$$\wp(u - \omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(u) - e_1} = \wp(\omega) + \frac{\wp''(\omega)}{2[\wp(u) - \wp(\omega)]}.$$

Daraus folgt, indem man noch ω mit ϖ vertauscht,

$$(52) \qquad \wp'(\varpi - u) = \frac{\wp''(\varpi)\,\wp'(u)}{2[\wp(u) - \wp(\varpi)]^2}.$$

Setzt man in dieser Formel $u = \frac{2\alpha\varpi}{a}$, so erhält man

$$\wp'\left(\frac{a - 2\alpha}{a}\varpi\right)\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) = \frac{\wp''(\varpi)\,\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2}{2\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) - \wp(\varpi)\right]^2},$$

folglich wird

$$(53) \qquad S = \prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{a - 2\alpha}{a}\varpi\right)\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$$

$$= \frac{\wp''(\varpi)^b}{2^b} \prod_{\alpha=1}^{b} \frac{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2}{\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) - \wp(\varpi)\right]^2}.$$

S ist also eine rationale Function von $\wp(\varpi)$ und eine symmetrische Function von den b Theilwerthen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$, folglich ist S eine *Transformationsgrösse.*

Noch wichtiger für das Folgende ist die Grösse T, welche durch die Gleichung

$$(54)\qquad T^3 = \pm \prod_{\alpha=1}^{b} \frac{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\varpi, \varpi'\right)}{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)}$$

definirt werden soll. Es ist nämlich, wie bekannt,

$$\wp'\left(u\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right) = \wp'(u) + \wp'(u-\varpi),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (52)

$$(55)\qquad \wp'\left(u\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right) = \wp'(u)\left(1 - \frac{\wp''(\varpi)}{2[\wp(u)-\wp(\varpi)]^2}\right).$$

Nun ist nach Gleichung (42)

$$\prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\varpi, \varpi'\right) = (-1)^b f(a)^{-3} = \frac{(-1)^b\, Q(\varpi, \varpi')^{3a}}{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^3},$$

und wenn man in dieser Gleichung ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht,

$$\prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right) = \pm \prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)$$

$$= \frac{(-1)^b\, Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{3a}}{Q\left(\frac{\varpi}{2a}, \varpi'\right)^3} = (-1)^b\, \frac{f(2)^{3a}}{f(n)^3}.$$

Deshalb wird bei passender Wahl des Vorzeichens

$$(56)\qquad T^3 = \frac{f(n)^3}{f(a)^3 f(2)^{3a}}, \quad T = \frac{f(n)}{f(a)\, f(2)^a}.$$

Jetzt folgt aber aus Gleichung (55), dass T^3 *immer eine Transformationsgrösse* ist, denn es wird

$$(57)\qquad T^{-3} = \pm \prod_{\alpha=1}^{b} \left(1 - \frac{\wp''(\varpi)}{2\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) - \wp(\varpi)\right]^2}\right)$$

eine rationale Function von $\wp(\varpi)$ und eine symmetrische Function von den b Theilwerthen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$.

Ist die Zahl a nicht durch 3 theilbar, so ist sogar schon T *selbst eine Transformationsgrösse.* Es ist dann nämlich

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{a}\right)\right]=\frac{\pm 1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{b}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^{2}},$$

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp(\varpi)\right]=\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\tau\left(\frac{a-2\alpha}{a}\varpi\right)\tau\left(\frac{a+2\alpha}{a}\varpi\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^{2}\tau(\varpi)^{2}}$$

$$=\frac{1}{\tau(\varpi)^{2b}}\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\tau\left(\frac{2(2\alpha-1)\varpi}{n}\right)^{2}}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^{2}},$$

folglich wird

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{a}\right)}=\frac{\pm 1}{\tau(\varpi)^{2b}}\prod_{\alpha=1}^{b}\tau\left(\frac{2(2\alpha-1)\varpi}{n}\right)^{2}$$

$$=\frac{\pm 1}{\tau(\varpi)^{a}}\prod_{\alpha=1}^{a}\tau\left(\frac{2(2\alpha-1)\varpi}{n}\right),$$

oder

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{a}\right)}=\frac{\pm 1}{\tau(\varpi)^{a}}\frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{n-1}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\prod\limits_{\alpha=1}^{a-1}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)}$$

$$=\pm\frac{f(n)^{2}}{f(a)^{2}f(2)^{2a}}=\pm T^{2}.$$

Deshalb ist auch T^2 eine rationale Function von $\wp(\varpi)$ und eine symmetrische Function der b Theilwerthe $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$; wenn also a nicht durch 3 theilbar ist, so sind T^3 und T^2 Transformationsgrössen, folglich auch

$$\frac{T^3}{T^2}=T.$$

Fassen wir diese Beispiele zusammen, so haben wir folgende Tabelle von Transformationsgrössen:

$$(58)\quad\begin{cases} 1)\ f(n)^{2}=\prod\limits_{\alpha=1}^{n-1}\tau(\alpha w)\quad\text{für}\quad n=6l\pm 1, \\ 2)\ f(n)^{6}=\prod\limits_{\alpha=1}^{n-1}\tau(\alpha w)^{3}\quad\text{für}\quad n=6l+3, \\ 3)\ f(9)^{3}=\prod\limits_{\alpha=1}^{4}\tau(\alpha w)^{3}\quad\text{für}\quad n=9, \end{cases}$$

$$(58)\left\{\begin{array}{ll}
4) & f(n)=\prod\limits_{\alpha=1}^{6l(3l+1)}\tau(\alpha w) \quad \text{für} \quad n=a^2=(6l\pm 1)^2,\\
5) & R=\prod \wp'(lw), \Big(\text{wo } l \text{ alle Werthe durchläuft, welche zu } n \text{ theilerfremd und kleiner sind als } \frac{n}{2}\Big), \text{ wenn sich } n \\
 & \text{in zwei theilerfremde Factoren } a \text{ und } b \text{ zerlegen lässt, die grösser sind als } 2,\\
6) & R^2=\prod \wp'(lw)^2 \quad \text{für } \textit{alle} \text{ Werthe von } n,\\
7) & S=\prod\limits_{\alpha=1}^{2b}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=\frac{f(a)^2 f(2)^4}{f(n)^4} \quad \text{für} \quad n=2a=4b+2,\\
8) & T=\frac{f(n)}{f(a)\,f(2)^a} \quad \text{für} \quad n=2a=2(6l\pm 1),\\
9) & T^3 \quad \text{für} \quad n=2a=4b+2.
\end{array}\right.$$

Die Zahl dieser Beispiele wird in den späteren Paragraphen noch wesentlich vermehrt werden. Aus der Form der vorstehenden Transformationsgrössen erkennt man auch schon, wie man in analoger Weise noch andere wird bilden können. Bezeichnet man nämlich mit

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \cdots$$

beliebige Theiler von n und mit

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \cdots$$

positive oder negative ganze Zahlen, so haben die gefundenen Transformationsgrössen alle die Form

$$x=f(D_1)^{\delta_1}f(D_2)^{\delta_2}f(D_3)^{\delta_3}\cdots. \tag{59}$$

Es liegt deshalb die Frage nahe: „Wie muss man die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$ bestimmen, damit x eine Transformationsgrösse wird?“ Die Beantwortung dieser Frage wird der Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein.

§ 5.

Transformationsgleichungen nullter Dimension, oder invariante Multiplicatorgleichungen.

Ist eine Transformationsgrösse, sie heisse x, gleichzeitig auch eine *homogene* Function m^{ten} Grades der Grössen $\wp(lw)$, so kann man dadurch noch eine Vereinfachung herbeiführen, dass man die Theilwerthe $\wp(lw)$ sämmtlich durch

$$Q^4=Q(\omega,\omega')^4=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 h^{\frac{1}{3}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^4$$

dividirt. Dadurch wird die Function x selbst durch Q^{4m} dividirt. Setzt man jetzt noch, wie das schon in meinen früheren Arbeiten geschehen ist,

(59) $$g_2 = Q^8\gamma_2, \quad g_3 = Q^{12}\gamma_3, \quad x = Q^{4m}\xi,$$

so erhält man aus der Transformationsgleichung

(60) $$F(x, g_2, g_3) = 0$$

unmittelbar die Gleichung

(60a) $$F(\xi, \gamma_2, \gamma_3) = 0,$$

in welcher die Grösse Q nicht mehr vorkommt.

Ein Beispiel für diese Umformung liefert § 19 m. vor. Abh., wo der Uebergang von der f-Gleichung zur L-Gleichung erklärt wurde. Die Vereinfachung, welche man durch diese Umformung erreicht, besteht nämlich darin, dass man jetzt γ_2 als die *einzige* unabhängige Veränderliche betrachten kann, denn es ist $27\gamma_3^2 = \gamma_2^3 - 1$, während die Transformationsgrösse x eine algebraische Function der *beiden* Veränderlichen g_2 und g_3 war.

Auf der anderen Seite ist es aber wieder störend, dass durch die Factoren

$$Q^8 = \sqrt[3]{g_2^3 - 27g_3^2}, \qquad Q^{12} = \sqrt{g_2^3 - 27g_3^2},$$

welche man zur Erklärung von γ_2 und γ_3 nothwendig hat, *Irrationalitäten* benutzt werden, so dass ξ im Allgemeinen nicht mehr eine Transformationsgrösse ist. Auch die Irrationalität

$$3\gamma_3\sqrt{3} = \sqrt{\gamma_2^3 - 1}$$

muss man zu vermeiden suchen.

Dies geschieht, wenn man noch die Beschränkung hinzufügt, dass die Zahl m (nämlich der Grad der Homogenität) durch 6 theilbar ist, dass also $m = 6r$; dann *bleibt*

(61) $$\xi = \frac{x}{Q^{24r}} = \frac{x}{(g_2^3 - 27g_3^2)^r}$$

noch eine Transformationsgrösse. Die Coefficienten der zugehörigen Transformationsgleichung sind erstens rationale Functionen von g_2 und g_3, sodann aber auch von der *nullten Dimension*, folglich sind die Coefficienten *rationale* Functionen von

(62) $$\gamma_2^3 = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = J, \text{ bez. von } 27\gamma_3^2 = \frac{27g_3^2}{g_2^3 - 27g_3^2} = J - 1.$$

Auf diese Weise gelangt man zu einer Transformationsgleichung nullter Dimension, welche eine „*invariante Multiplicatorgleichung*“ heissen soll. (Vergl. die oben citirte Abhandlung von Herrn Weber, S. 384).

Von solchen invarianten Multiplicatorgleichungen wird in dem Folgenden ausschliesslich die Rede sein.

Setzt man, wie es bereits in Gleichung (59) geschehen ist,

$$(63) \qquad x = f(D_1)^{\delta_1} f(D_2)^{\delta_2} f(D_3)^{\delta_3} \cdots$$

$$= \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_1}, \varpi'\right)^{\delta_1}}{Q(\varpi, \varpi')^{D_1 \delta_1}} \cdot \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_2}, \varpi'\right)^{\delta_2}}{Q(\varpi, \varpi')^{D_2 \delta_2}} \cdot \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_3}, \varpi'\right)^{\delta_3}}{Q(\varpi, \varpi')^{D_3 \delta_3}} \cdots,$$

so wird nach § 19 m. vor. Abh.

$$(64) \qquad -4m = (D_1 - 1)\,\delta_1 + (D_2 - 1)\,\delta_2 + (D_3 - 1)\,\delta_3 + \cdots;$$

diese Gleichung enthält eine erste Bedingung für die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$, und zwar muss nach der getroffenen Festsetzung die Zahl $4m$ durch 24 theilbar sein. Aus x erhält man jetzt durch Multiplication mit $Q(\omega, \omega')^{-4m} = Q(\varpi, \varpi')^{-4m}$

$$(65) \qquad \xi = \prod \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)^{\delta}}{Q(\varpi, \varpi')^{\delta}} = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \cdots.$$

Eine solche Hülfsgrösse ξ soll, wenn sie eine *Transformationsgrösse* ist, ein „*Parameter*" für die Transformation n^{ten} Grades heissen. Zwischen J und jedem Parameter ξ besteht nach den früheren Sätzen eine invariante Multiplicatorgleichung, welche in Bezug auf ξ vom Grade

$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \cdots$$

ist, wenn ξ wirklich zum Transformationsgrade

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots$$

gehört. Jede andere Transformationsgrösse lässt sich dann, wie früher gezeigt wurde, rational durch ξ, g_2 und g_3 darstellen. *Ist aber die andere Transformationsgrösse auch ein Parameter, so ist sie sogar schon durch die Grössen ξ und J rational darstellbar.*

Zu den Transformationsgrössen gehören auch die Invarianten $\overline{g_2}$ und $\overline{g_3}$ der transformirten Function, die sich nach den Angaben in § 10 m. vor. Abh. als rationale Functionen von $f(n)^2$, g_2 und g_3 darstellen lassen. Deshalb lassen sich $\overline{g_2}$ und $\overline{g_3}$ auch als rationale Functionen von ξ, g_2 und g_3 darstellen, wobei ξ ein beliebiger Parameter ist. Daraus folgt, dass die absolute Invariante

$$\overline{J} = \frac{\overline{g_2}^3}{\overline{g_2}^3 - 27\,\overline{g_3}^2}$$

der transformirten Function sich gleichfalls rational durch ξ und J darstellen lässt; d. h. auch $\overline{J}$ ist die Wurzel einer Transformationsgleichung

$$(66) \qquad F(\overline{J}, J) = 0,$$

welche die „*Invariantengleichung*" heissen soll. (Vergl. die oben citirte Abhandlung von Herrn Weber, S. 383.)

§ 6.

Eigenschaften der Invariantengleichung $F(\overline{J}, J) = 0.$*)

Zu der Invariantengleichung und ihren Eigenschaften kann man auch auf folgendem Wege gelangen. Es sei nach den Bezeichnungen von Herrn Weierstrass

(67) $$\frac{\omega'}{\omega} = \tau, \text{**})$$

dann ist bekanntlich die absolute Invariante J eine *eindeutige* Function von τ, welche mit $J(\tau)$ bezeichnet werden möge. Diese Function ändert sich gar nicht, wenn man τ mit

(68) $$\tilde{\tau} = \frac{p' + q'\tau}{p + q\tau} \qquad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht. Die beiden Grössen τ und $\tilde{\tau}$ mögen *äquivalent* heissen, und das Zeichen für diese Aequivalenz sei

(69) $$\tilde{\tau} \sim \tau.$$

Eine Transformation n^{ten} Grades führt man aus, indem man $\tilde{\tau}$ mit

(70) $$\overline{\tau} = n\tilde{\tau}$$

vertauscht. Dadurch verwandelt sich die absolute Invariante J oder $J(\tau)$ in $J(\overline{\tau})$, ein Ausdruck, welcher der Kürze wegen auch mit $\overline{J}$ bezeichnet werden möge, und es gilt der Satz:

I. *Zu jedem Werthe von J gehören im Ganzen $T(n)$ von einander verschiedene Werthe von $\overline{J}$.*

Beweis. Nach den Gleichungen (68) und (70) ist

$$\overline{\tau} = n\tilde{\tau} = \frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau}.$$

Bezeichnet man nun den grössten gemeinsamen Factor von n und q mit D, ist also

(71) $$n = AD, \quad q = \beta D, \quad Aq' = \delta,$$

so sind die ganzen Zahlen β und δ zu einander relativ prim, und man kann zwei ganze Zahlen α_0 und γ_0 finden, für welche

$$\alpha_0\delta - \beta\gamma_0 = +1$$

wird. Setzt man jetzt noch

---

*) Dieser Paragraph enthält zum Theil Untersuchungen, welche in ähnlicher Weise schon von den Herren Dedekind (Journal für Mathematik, Bd. 83), Gierster und Hurwitz (Mathematische Annalen) und H. Weber (Acta mathematica, Bd. 6) ausgeführt sind.

**) Diese Veränderliche τ ist nicht zu verwechseln mit der Function $\tau(u)$, die in der Einleitung definirt wurde.

$$\alpha = \alpha_0 + \beta x, \quad \gamma = \gamma_0 + \delta x, \quad C = np'\alpha - p\gamma,$$

so ist auch

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1,$$

und es wird

(72) $$C = np'\alpha_0 - p\gamma_0 + Ax(p'q - pq') = np'\alpha_0 - p\gamma_0 - Ax.$$

Man kann also die ganze Zahl x immer so bestimmen, dass

(73) $$0 \leqq C < A.$$

Setzt man jetzt

(74) $$\tau' = \frac{C + D\tau}{A},$$

so erhält man mit Rücksicht auf die vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{\gamma + \delta\tau'}{\alpha + \beta\tau'} = \frac{A\gamma + C\delta + D\delta\tau}{A\alpha + C\beta + D\beta\tau} = \frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau} = n\tilde{\tau} = \bar{\tau}.$$

Daraus folgt

(75) $$J(\bar{\tau}) = J\left(\frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau}\right) = J\left(\frac{C + D\tau}{A}\right).$$

Um alle verschiedenen Werthe von $J(\bar{\tau})$ zu erhalten, welche demselben Werthe von $J(\tau)$ entsprechen, genügt es daher, für $\bar{\tau}$ alle Grössen $\frac{C + D\tau}{A}$ zu setzen, für welche

(76) $$AD = n \quad \text{und} \quad 0 \leqq C < A$$

ist. Dabei dürfen A und D noch einen gemeinsamen Theiler t haben, aber C muss zu t relativ prim sein, denn ein Theiler, der den drei Zahlen A, C und D gemeinsam ist, wäre auch ein Theiler von

$$p = A\alpha + C\beta \quad \text{und} \quad q = D\beta.$$

Da aber $pq' - p'q = +1$ ist, so dürfen p und q keinen gemeinsamen Factor haben.

Die von einander verschiedenen Werthe von $\frac{C + D\tau}{A}$, welche man durch die vorstehenden Angaben erhält, sollen die „$\bar{\tau}$-*Repräsentanten*" heissen. Es bleibt nur noch übrig, ihre Anzahl zu bestimmen.

Da C nur die Werthe annehmen darf, welche zu t relativ prim und kleiner sind als A, so gehören zu jedem Werthe von A

$$\frac{A}{t}\,\varphi(t)$$

Werthe von C; die Anzahl der $\bar{\tau}$-Repräsentanten ist daher

(77) $$\psi(n) = \sum \frac{A}{t}\,\varphi(t),$$

wobei sich die Summirung über alle Zahlen A erstreckt, durch welche n theilbar ist (die Zahlen 1 und n eingeschlossen).

Sind nun n' und n'' zu einander relativ prim, und ist

$$n = n'n'', \quad n' = A'D', \quad n'' = A''D'',$$

sind ferner t' und t'' die grössten gemeinsamen Theiler von A' und D', bez. von A'' und D'', so wird

$$(78) \qquad \begin{aligned} \psi(n) &= \sum \frac{A}{t}\,\varphi(t) = \sum \frac{A'A''}{t'\,t''}\,\varphi(t'\,t'') \\ &= \sum \frac{A'}{t'}\,\varphi(t') \cdot \sum \frac{A''}{t''}\,\varphi(t'') = \psi(n')\,\psi(n''). \end{aligned}$$

Man hat daher nur nöthig, die Zahl $\psi(n)$ zu bestimmen, wenn n die Potenz einer Primzahl a ist. Dann wird

$$\psi(a^\alpha) = \sum \frac{A}{t}\,\varphi(t) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\alpha-1} \frac{a^\lambda}{a^\mu} \cdot a^{\mu-1}(a-1) + a^\alpha = a^\alpha\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

Hieraus folgt, dass für

$$n = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \,\cdots$$

$$(79) \qquad \begin{cases} \psi(n) = a^\alpha\left(1+\frac{1}{a}\right) \cdot b^\beta\left(1+\frac{1}{b}\right) \cdot c^\gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) \cdots \\ \quad = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \cdots = T(n) \end{cases}$$

wird.

Diese T Werthe von $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ sind, so lange der Werth von τ beliebig ist, wirklich von einander verschieden, denn $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ und $J\left(\frac{C_1+D_1\tau}{A_1}\right)$ können nur dann einander gleich sein, wenn $\frac{C+D\tau}{A}$ und $\frac{C_1+D_1\tau}{A_1}$ zu einander äquivalent sind, d. h., wenn es vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ giebt, für welche

$$\frac{C_1+D_1\tau}{A_1} = \frac{A\gamma + C\delta + D\delta\tau}{A\alpha + C\beta + D\beta\tau} \quad \text{und} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

ist. Dies giebt nothwendiger Weise

$$\beta = 0, \quad \alpha\delta = +1, \quad A_1 = A\alpha.$$

Da A und A_1 beide positiv sind, so muss

$$\alpha = +1, \quad \delta = +1, \quad A_1 = A, \quad D_1 = D, \quad C_1 = A\gamma + C$$

sein. Hierbei ist aber γ sicher gleich 0, weil C und C_1 beide zwischen 0 und $A-1$ liegen sollen. Aus der Gleichheit von $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ und $J\left(\frac{C_1+D_1\tau}{A_1}\right)$ folgt also

$$\frac{C_1+D_1\tau}{A_1} = \frac{C+D\tau}{A}.$$

Die T verschiedenen $\overline{\tau}$-Repräsentanten liefern daher, wie zu beweisen war, T verschiedene Werthe von $\overline{J} = J\left(\frac{C + D\tau}{A}\right)$, welche

$$(80) \qquad \overline{J}_1(\tau),\ \overline{J}_2(\tau),\ \cdots\ \overline{J}_T(\tau)$$

heissen mögen, da sie sämmtlich Functionen von τ sind.

Bezeichnet man nun mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier beliebige ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ genügen, und vertauscht man τ mit $\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$, so sind die T Grössen

$$(81) \qquad \overline{J}_1\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right), \overline{J}_2\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right),\ \cdots\ \overline{J}_T\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right)$$

gleichfalls von einander verschieden. Da nun aber

$$\frac{np' + nq'\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right)}{p + q\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right)} = \frac{n(\alpha p' + \gamma q') + n(\beta p' + \delta q')\tau}{(\alpha p + \gamma q) + (\beta p + \delta q)\tau} = \frac{np_1' + nq_1'\tau}{p_1 + q_1\tau}$$

ist, wobei bekanntlich $p_1 q_1' - p_1' q_1$ wieder gleich 1 wird, so sind die T Grössen (81), abgesehen von der Reihenfolge, identisch mit den T Grössen (80). Deshalb wird das Product

$$\prod_{\alpha=1}^{T} (\overline{J} - \overline{J}_\alpha(\tau))$$

eine eindeutige Function von τ, welche ungeändert bleibt, wenn man τ mit $\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$ vertauscht. Daraus folgt bekanntlich, dass dieses Product eine rationale Function $F(\overline{J}, J)$ von $\overline{J}$ und J ist, und man erhält den Satz:

II. *Die T Grössen $\overline{J}_1(\tau), \overline{J}_2(\tau), \cdots \overline{J}_T(\tau)$ sind die Wurzeln einer Gleichung T^{ten} Grades*

$$(82) \qquad F(\overline{J}, J) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von J sind.

Diese Gleichung soll wieder die „*Invariantengleichung*" heissen. Von ihr gilt der Satz:

III. *Die Invariantengleichung ist irreducibel.*

Beweis. Ist $J(n\tau)$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$(83) \qquad G(J(n\tau), J(\tau)) = 0,$$

so hat man eine Identität für alle Werthe von τ, für welche die Reihenentwickelungen von $J(\tau)$ und $J(n\tau)$ convergiren, d. h. für alle Werthe von τ mit positivem imaginären Bestandtheil. Dieselbe muss auch befriedigt werden, wenn man τ mit $\tilde{\tau} = \frac{p' + q'\tau}{p + q\tau}$ vertauscht.

Da nun aber $J(\widetilde{\tau})$ gleich $J(\tau)$ ist, so ist $J(n\widetilde{\tau})$ eine Wurzel derselben Gleichung (83), d. h. die T verschiedenen Grössen

$$\overline{J}_1,\ \overline{J}_2,\ \ldots\ \overline{J}_T$$

müssen sämmtlich Wurzeln der Gleichung (83) sein, folglich ist die Invariantengleichung *irreducibel.*

Unter den Werthen von $\overline{J}$ mögen die beiden

$$J(n\tau) \quad \text{und} \quad J\left(\frac{\tau}{n}\right)$$

besonders hervorgehoben werden; dadurch erhält man aus Gleichung (82) die beiden Gleichungen

$$F(J(n\tau),\ J(\tau)) = 0 \tag{84}$$

und

$$F\left(J\left(\frac{\tau}{n}\right),\ J(\tau)\right) = 0. \tag{84a}$$

Vertauscht man jetzt in Gleichung (84a) die Grösse τ mit $n\tau$, so wird

$$F(J(\tau),\ J(n\tau)) = 0. \tag{85}$$

Die Gleichung (84) bleibt daher noch richtig, wenn man $J(n\tau)$ mit $J(\tau)$, oder $\overline{J}$ mit J vertauscht. Da aber die Gleichung (82) irreducibel ist, so gilt dies nicht nur für $J(n\tau)$, sondern für jedes beliebige $\overline{J}$, und man erhält

$$F(\overline{J},\ J) = \pm F(J,\ \overline{J}).$$

Hierbei muss aber das obere Zeichen gelten, weil für das untere Zeichen die Gleichung (82) auch für $\overline{J} = J$ befriedigt werden müsste, was für beliebige Werthe von τ nicht möglich ist. Dies giebt den Satz:

IV. *In Gleichung* (82) *ist die linke Seite* $F(\overline{J},\ J)$ *eine symmetrische Function der beiden Jnvarianten* $\overline{J}$ und J.

Zu jedem primitiven Periodenpaar gehört ein einziger $\overline{\tau}$-Repräsentant, wie vorher gezeigt wurde, zu jedem $\overline{\tau}$-Repräsentanten gehören aber unendlich viele primitive Periodenpaare

$$2p\omega + 2q\omega',\ \ 2p'\omega + 2q'\omega'.$$

Ist der τ-Repräsentant $\frac{C + D\tau}{A}$ gegeben, so kann man die ganzen Zahlen $p,\ q,\ p',\ q'$ z. B. in folgender Weise bestimmen.

Man wähle die ganze Zahl α so, dass

$$p = A\alpha + C \quad \text{und} \quad q = D \tag{86}$$

relativ prim sind; ferner wähle man die ganzen Zahlen p' und q' so, dass

$$pq' - p'q = +1.$$

Setzt man dann

$$(87)\qquad \beta = 1,\ \ \gamma = A\alpha q' - 1,\ \ \delta = Aq',\ \ \tau' = \frac{C + D\tau}{A},$$

so wird in der That

$$\frac{\gamma + \delta\tau'}{\alpha + \beta\tau'} = \frac{A^2\alpha q' - A + Aq'C + Aq'D\tau}{A\alpha + C + D\tau} = \frac{A(pq' - 1) + nq'\tau}{p + q\tau} = \frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau}$$

und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

§ 7.

Der Rang der Invariantengleichung.

Die Gleichung, welche zwischen $\overline{J}$ und J besteht, wirklich zu bilden, ist bis jetzt selbst bei den kleineren Werthen von n unterlassen worden, weil man sie durch wesentlich einfachere Gleichungen ersetzen kann. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, giebt es in dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ Hülfsgrössen ξ, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Gleichungen

$$(1)\qquad F(\xi, J) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(\xi, \overline{J}) = 0,$$

welche zwischen ξ und J, bez. zwischen ξ und $\overline{J}$ bestehen, in Bezug auf J und $\overline{J}$ von niedrigerem Grade sind als die Invariantengleichung.

Dieser Grad der Gleichungen (1) ist eine für ξ charakteristische Zahl und soll deshalb der „*Charakter*“ von ξ heissen. Ist nämlich η irgend eine andere Grösse des Rationalitätsbereiches $(J, \overline{J})$, so kann man auch eine Gleichung zwischen ξ und η herleiten, deren Grad in Bezug auf η *im Allgemeinen* gleich dem Charakter von ξ ist. Ebenso ist der Grad dieser Gleichung in Bezug auf ξ gleich dem Charakter von η. Nur ausnahmsweise kann sich der Grad dieser Gleichung zwischen ξ und η erniedrigen. Dies geschieht z. B., wenn man für η eine rationale Function von ξ wählt.*)

Ist $\varrho = 0$, so giebt es solche Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter 1, d. h. es giebt Hülfsgrössen ξ, durch welche sich J und $\overline{J}$ *rational* darstellen lassen. Ist ξ eine solche Grösse, so haben alle übrigen die Form

$$\frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

Ist $\varrho = 1$, so giebt es unendlich viele Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter 2. Zwischen je zweien besteht eine Gleichung, welche in Bezug auf jede der beiden Grössen vom *zweiten* Grade ist, wenn nicht

*) Man vergleiche die von Riemann gegebenen Sätze aus der Theorie der Abel'schen Functionen (ges. Werke, Seite 81 bis 135).

etwa die eine *linear* abhängig ist von der anderen. Deshalb lassen sich J und $\overline{J}$ *rational* darstellen durch eine solche Hülfsgrösse ξ und durch die Quadratwurzel aus einer Function *dritten* oder *vierten* Grades von ξ.

Ist $\varrho = 2$, so giebt es unendlich viele Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter 2, die *aber sämmtlich linear von einander abhängig sind.* Durch zwei solche Hülfsgrössen ξ lassen sich daher J und $\overline{J}$ nicht rational darstellen. Dagegen giebt es ausserdem noch unendlich viele Hülfsgrössen η mit dem Charakter 3, so dass J und $\overline{J}$ sich als rationale Functionen von ξ und η darstellen lassen. Da nun die Gleichung zwischen ξ und η in Bezug auf ξ vom *dritten* und in Bezug auf η vom *zweiten* Grade ist, so kann man J und $\overline{J}$ rational ausdrücken durch ξ und durch die Quadratwurzel aus einer Function *fünften* oder *sechsten* Grades von ξ.

Ist $\varrho > 2$ und *gerade*, so giebt es nach Riemann (ges. Werke, Seite 116) Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter $\frac{1}{2}(\varrho+2)$;

ist $\varrho > 2$ und *ungerade*, so giebt es nach Riemann Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter $\frac{1}{2}(\varrho+3)$.

In Ausnahmefällen kann der Charakter noch niedriger werden. So wird z. B. die Invariantengleichung bei der Transformation 30ten Grades den Rang $\varrho = 3$ haben. Der Riemann'schen Angabe entsprechend müsste dann der Charakter jeder Hülfsgrösse des Rationalitätsbereiches $(J, \overline{J})$ mindestens 3 sein. Es giebt aber in Wirklichkeit schon Hülfsgrössen mit dem Charakter 2, die sämmtlich *linear* von einander abhängig sind; man hat also den sogenannten hyperelliptischen Fall. Hülfsgrössen mit dem Charakter 3 giebt es in diesem Falle überhaupt nicht. Dagegen findet man noch Hülfsgrössen mit dem Charakter 4, so dass sich J und $\overline{J}$ rational durch ξ und die Quadratwurzel aus einer Function *siebenten* oder *achten* Grades von ξ darstellen lassen.

In *allen* Fällen giebt es aber Hülfsgrössen ξ, deren Charakter gleich oder kleiner ist als $\frac{1}{2}(\varrho+3)$. Indem man also J und $\overline{J}$ als *rationale Functionen* von zwei solchen Hülfsgrössen ξ und η darstellt, kann man die Invariantengleichung durch die Gleichung zwischen ξ und η ersetzen. Dadurch wird eine um so grössere Vereinfachung herbeigeführt, je niedriger der Charakter von ξ und η ist.

Um zu entscheiden, ob der Charakter einer Hülfsgrösse möglichst klein ist, muss man zunächst den *Rang* ϱ der Invariantengleichung bestimmen.

Dies kann man verhältnissmässig leicht ausführen, weil man die singulären Werthe von J genau kennt. Man weiss nämlich, wie z. B. Herr Klein in seiner oben citirten Abhandlung zeigt, dass für $J = 0$ immer nur je *drei* Werthe von $\overline{J}$ einander gleich werden, dass für $J = 1$ immer nur je *zwei* Werthe von $\overline{J}$ einander gleich werden, und dass für $J = \infty$ die Verzweigung je nach den Werthen von n eine verschiedenartige ist. Dies sind die *einzigen* singulären Werthe von J, so dass man von diesen singulären Punkten nur noch die Ordnungszahlen, deren Summe s heissen möge, aufzusuchen hat. Kennt man aber die Zahl s, so erhält man auch die Zahl ϱ aus der bekannten Formel

$$2\varrho = s - 2T + 2. \tag{88}$$

Es sei der Kürze wegen ζ eine dritte Wurzel der Einheit, also

$$2\zeta = -1 + i\sqrt{3}, \tag{89}$$

dann wird $J = 0$, wenn τ mit ζ äquivalent ist. Um nun zu untersuchen, welche von den T Grössen $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ für diesen Werth von τ einander gleich werden, heisse D' der grösste gemeinsame Theiler von A und $C - D$, es sei also

$$A = D'\beta \quad \text{und} \quad C - D = D'\delta, \tag{90}$$

wobei β und δ relativ prim sind. Deshalb kann man zwei ganze Zahlen α_0 und γ_0 so bestimmen, dass

$$\alpha_0\delta - \beta\gamma_0 = +1$$

wird. Setzt man jetzt

$$\alpha = \alpha_0 + x\beta, \quad \gamma = \gamma_0 + x\delta, \quad A' = D\beta, \quad C' = -D\alpha, \tag{90a}$$

so wird

$$A'D' = AD = n, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1,$$

und man kann die ganze Zahl x so bestimmen, dass

$$0 \leqq -\alpha < \beta, \quad \text{oder} \quad 0 \leqq C' < A'.$$

Deshalb ist

$$\tau'' = \frac{C' + D'\tau}{A'}$$

auch einer der T $\bar{\tau}$-Repräsentanten. Dabei folgt aber aus

$$\frac{\gamma + \delta\tau''}{\alpha + \beta\tau''} = \frac{A'\gamma + C'\delta + D'\delta\tau}{A'\alpha + C'\beta + D'\beta\tau} = \frac{-D + (C-D)\tau}{A\tau},$$

dass für $\tau = \zeta$

$$\tau'' \sim \frac{-D + (C-D)\zeta}{A\zeta} = \frac{C + D\zeta}{A} = \tau'. \tag{91}$$

Ferner sei D'' der grösste gemeinsame Theiler von A und C, also

$$A = D''\beta', \quad C = D''\delta',$$

dann kann man zwei ganze Zahlen α_0' und γ_0' so bestimmen, dass

$$\alpha_0'\delta' - \beta'\gamma_0' = 1$$

wird. Setzt man jetzt

$$\alpha' = \alpha_0' + x\beta', \quad \gamma' = \gamma_0' + x\delta', \quad A'' = A\delta' - (C-D)\beta',$$
$$C'' = (C-D)\alpha' - A\gamma',$$

so ist auch $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = +1$, und man kann die ganze Zahl x so bestimmen, dass

$$C'' = (C-D)\alpha_0' - A\gamma_0' - A''x$$

nur einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots A''-1$ hat. Da nun ausserdem

$$A''D'' = AC - AC + AD = AD = n,$$

und die drei Zahlen A'', C'', D'' keinen gemeinsamen Factor haben, so wird

$$\tau''' = \frac{C'' + D''\tau}{A''}$$

gleichfalls einer der T $\bar{\tau}$-Repräsentanten, und es folgt aus

$$\frac{\gamma' + \delta'\tau'''}{\alpha' + \beta'\tau'''} = \frac{A''\gamma' + C''\delta' + D''\delta'\tau}{A''\alpha' + C''\beta' + D''\beta'\tau} = \frac{C - D + C\tau}{A + A\tau},$$

dass für $\tau = \zeta$

$$\tau''' \sim \frac{C - D + C\zeta}{A(1+\zeta)} = \frac{C + D\zeta}{A} = \tau'. \tag{92}$$

Damit ist bewiesen, dass für $\tau = \zeta$ die drei Grössen τ', τ'', τ''' einander äquivalent werden, so dass die drei zugehörigen Werthe $J(\tau')$, $J(\tau'')$ und $J(\tau''')$ einander gleich sind.

Da τ' aus den $\bar{\tau}$-Repräsentanten beliebig ausgewählt war, so werden für $\tau = \zeta$ je drei Werthe von $\bar{J}$ einander gleich. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn die drei $\bar{\tau}$-Repräsentanten τ', τ'' und τ''' für *alle* Werthe von τ einander gleich sind. Dies geschieht, wenn

$$A = A' = A'', \quad C = C' = C'', \quad D = D' = D'', \tag{93}$$

wenn also nach den Gleichungen (90) und (90a)

$$A = D\beta, \quad C = -D\alpha, \quad C - D = D\delta.$$

Da aber A, C und D keinen gemeinsamen Factor haben, so muss

$$D = 1, \quad A = \beta = n, \quad \alpha = -C, \quad \delta = C - 1$$

sein. Daraus folgt

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -C(C-1) - n\gamma = 1,$$

oder

$$C^2 - C + 1 \equiv 0 \pmod{n}, \text{ oder } (2C-1)^2 \equiv -3 \pmod{4n}. \tag{94}$$

Ist $\tau' = \frac{C + \tau}{n}$, und genügt C der Congruenz (94), so werden in der That die Gleichungen (93) befriedigt, d. h. die Grössen τ'' und τ''' werden mit τ' identisch.

Bezeichnet man also mit ε_0 die Anzahl der Werthe von C, welche der Congruenz (94) genügen und kleiner sind als n, so bilden die T Werthe von $\overline{J}$, welche dem Werthe $J = 0$ zugeordnet sind, $\frac{1}{3}(T - \varepsilon_0)$ Cyklen zu je drei, während ε_0 Werthe von einander verschieden bleiben.

Deshalb ist $J = 0$ ein singulärer Werth von der Ordnung $\frac{2}{3}(T - \varepsilon_0)$.

Für $\tau \sim i$ wird $J = 1$; um nun zu untersuchen, welche von den T Grössen $J\left(\frac{C + D\tau}{A}\right)$ für diesen Werth von τ einander gleich werden, heisse D' der grösste gemeinsame Theiler von A und C, es sei also

$$(95)\quad \begin{cases} A = D'\beta, \quad C = D'\delta, \quad \alpha_0\delta - \beta\gamma_0 = +1, \\ \alpha = \alpha_0 + x\beta, \quad \gamma = \gamma_0 + x\delta, \quad A' = D\beta, \quad C' = -D\alpha, \end{cases}$$

dann wird

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \quad A'D' = AD = n,$$

und man kann x so bestimmen, dass

$$0 \leqq -\alpha < \beta$$

und deshalb

$$0 \leqq C' < A'.$$

Daraus folgt, dass $\tau'' = \frac{C' + D'\tau}{A'}$ auch einer der $\bar{\tau}$-Repräsentanten ist, und dass

$$\frac{\gamma + \delta\tau''}{\alpha + \beta\tau''} = \frac{A'\gamma + C'\delta + D'\delta\tau}{A'\alpha + C'\beta + D'\beta\tau} = \frac{-D + C\tau}{A\tau}$$

wird. Dies giebt für $\tau = i$

$$(96)\qquad \tau'' \sim \frac{-D + Ci}{Ai} = \frac{C + Di}{A} = \tau'.$$

Die beiden Grössen $J(\tau')$ und $J(\tau'')$ werden daher für $\tau = i$ einander gleich. Wenn also τ' und τ'' zwei von einander verschiedene $\bar{\tau}$-Repräsentanten sind, so sind auch $J(\tau')$ und $J(\tau'')$ von einander verschieden ausser für $\tau = i$. Die beiden Grössen τ' und τ'' können aber nur dann identisch sein, wenn

$$(97)\qquad A = A', \quad C = C', \quad D = D',$$

wenn also nach den Gleichungen (95)

$$A = D\beta, \quad C = D\delta = -D\alpha.$$

Da aber die drei Grössen A, C und D keinen gemeinsamen Theiler haben dürfen, so wird

$$D = 1, \quad A = \beta = n, \quad C = \delta = -\alpha,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = -C^2 - n\gamma = +1,$$

also

(98) $$C^2 \equiv -1 \pmod{n}.$$

Ist $\tau' = \frac{C+\tau}{n}$, und genügt C der Congruenz (98), so werden in der That die Gleichungen (97) befriedigt, d. h. die Grössen τ' und τ'' sind identisch.

Bezeichnet man also mit ε_1 die Anzahl der Werthe von C, welche der Congruenz (98) genügen und kleiner sind als n, so bilden die T Werthe von $\overline{J}$, welche dem Werthe $J = 1$ zugeordnet sind, $\frac{1}{2}(T - \varepsilon_1)$ Cyklen zu je zwei, während ε_1 Werthe von einander verschieden bleiben.

Deshalb ist $J = 1$ ein singulärer Werth von der Ordnung $\frac{1}{2}(T - \varepsilon_1)$.

Bei jeder Umkreisung des Punktes $J = \infty$ wächst die Veränderliche τ um 1; bei μ Umkreisungen geht also

$$\tau' = \frac{C + D\tau}{A}$$

über in

$$\tau'' = \frac{C + D\mu + D\tau}{A}.$$

Ist t wieder der grösste gemeinsame Theiler von A und D, ist also

$$A = at, \quad D = dt,$$

so wird erst für $\mu = a$ die Grösse $\tau'' = \tau' + d$ mit τ' äquivalent. Man erhält also an dieser Stelle, wenn man von dem Repräsentanten τ' ausgeht, einen Cyklus von $a = \frac{A}{t}$ Repräsentanten, die für $J = \infty$ denselben Werth von $\overline{J}$ liefern.

Jedem Nenner A entsprechen zunächst $\frac{A}{t}\varphi(t)$ Werthe von C, die also $\varphi(t)$ solche Cyklen zu je $\frac{A}{t}$ bilden. *Deshalb ist der Werth $J = \infty$ ein singulärer Werth von der Ordnung*

(99) $$\sum\left(\frac{A}{t} - 1\right)\varphi(t) = \sum\frac{A}{t}\varphi(t) - \sum\varphi(t) = T - \sum\varphi(\tau).$$

Damit sind alle singulären Werthe von J erschöpft, so dass die Anzahl der singulären Punkte mit Rücksicht auf ihre Ordnungszahl gleich

(100) $$\begin{cases} s = \frac{2}{3}(T - \varepsilon_0) + \frac{1}{2}(T - \varepsilon_1) + T - \Sigma\varphi(t) \\ \quad = \frac{13}{6}T - \frac{2}{3}\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \Sigma\varphi(t) \end{cases}$$

ist. Deshalb findet man aus Gleichung (88)

(101) $$12\varrho = T + 12 - 4\varepsilon_0 - 3\varepsilon_1 - 6\Sigma\varphi(t).$$

Diese wichtige Formel hat schon Herr Gierster in seiner Notiz über

Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrade (Math. Annalen, Bd. 14, S. 537—544) gegeben. Die Andeutungen über ihre Ableitung sind aber so knapp, dass eine ausführliche Darstellung nicht überflüssig erschien.

§ 8.

Tabelle.

Da bei den Anwendungen, welche in den späteren Abschnitten folgen sollen, der Rang ϱ für eine grössere Reihe von Werthen der Zahl n gebraucht wird, so war es nothwendig, aus der Formel (101) eine Tabelle für ϱ herzustellen, welche die weiter unten behandelten Fälle umfasst, und welche hier folgen möge:

n	Bedingungen.	ϱ
$12\nu+1$	$12\nu+1$ ist eine Primzahl	$\nu-1$
$12\nu+5$	$12\nu+5$ „ „ „	ν
$12\nu+7$	$12\nu+7$ „ „ „	ν
$12\nu+11$	$12\nu+11$ „ „ „	$\nu+1$
$(12\nu+1)^2$	$12\nu+1$ „ „ „	$12\nu^2-3\nu-1$
$(12\nu+5)^2$	$12\nu+5$ „ „ „	$12\nu^2+5\nu$
$(12\nu+7)^2$	$12\nu+7$ „ „ „	$12\nu^2+9\nu+1$
$(12\nu+11)^2$	$12\nu+11$ „ „ „	$12\nu^2+17\nu+6$
4^r	$r>1$	$2\cdot 4^{r-2}+1-3\cdot 2^{r-2}$
$2\cdot 4^r$	$r>0$	$4\cdot 4^{r-2}+1-4\cdot 2^{r-2}$
$2(4c\pm 1)$	$4c\pm 1$ „ „ „	$c-1$
$4^r(2b+1)$	$2b+1$ „ „ „ , $r>0$	$4^{r-1}(b+1)+1-3\cdot 2^{r-1}$
$2\cdot 4^r(2b+1)$	$2b+1$ „ „ „ , $r>0$	$2\cdot 4^{r-1}(b+1)+1-4\cdot 2^{r-1}$
$3(6l\pm 1)$	$6l\pm 1$ „ „ „	$2l-1$
$9a$	a „ „ „	$a-2$

Insbesondere findet man für die Zahlen 1 bis 61 folgende Tabelle

n	ε_0	ε_1	$\Sigma\varphi(t)$	ϱ
2	0	1	2	0
3	1	0	2	0
4	0	0	3	0
5	0	2	2	0

n	ε_0	ε_1	$\Sigma\varphi(t)$	ϱ
6	0	0	4	0
7	2	0	2	0
8	0	0	4	0
9	0	0	4	0
10	0	2	4	0
11	0	0	2	1
12	0	0	6	0
13	2	2	2	0
14	0	0	4	1
15	0	0	4	1
16	0	0	6	0
17	0	2	2	1
18	0	0	8	0
19	2	0	2	1
20	0	0	6	1
21	2	0	4	1
22	0	0	4	2
23	0	0	2	2
24	0	0	8	1
25	0	2	6	0
26	0	2	4	2
27	0	0	6	1
28	0	0	6	2
29	0	2	2	2
30	0	0	8	3
31	2	0	2	2
32	0	0	8	1
33	0	0	4	3
34	0	2	4	3
35	0	0	4	3
36	0	0	12	1
37	2	2	2	2
38	0	0	4	4
39	2	0	4	3
40	0	0	8	3

n	ε_0	ε_1	$\Sigma\varphi(t)$	ϱ
41	0	2	2	3
42	0	0	8	5
43	2	0	2	3
44	0	0	6	4
45	0	0	8	3
46	0	0	4	5
47	0	0	2	4
48	0	0	12	3
49	2	0	8	1
50	0	2	12	2
51	0	0	4	5
52	0	0	6	5
53	0	2	2	4
54	0	0	12	4
55	0	0	4	5
56	0	0	8	5
57	2	0	4	5
58	0	2	4	6
59	0	0	2	5
60	0	0	12	7
61	2	2	2	4

II. Abschnitt.

Eigenschaften der Parameter.

§ 9.

Bildung von Parametern.

Nach den Ausführungen der beiden vorhergehenden Paragraphen kommt es darauf an, Hülfsgrössen ξ zu bilden, welche dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ angehören und einen möglichst niedrigen Charakter besitzen.

Auf *rein algebraischem* Wege würde die Lösung dieser Aufgabe schon deshalb grosse Schwierigkeiten bieten, weil die Invariantengleichung, d. i. die Gleichung zwischen J und $\overline{J}$, selbst gar nicht bekannt ist. Dagegen gelangt man durch Anwendung der schon früher (§ 5, Gleichung (65)) erklärten Producte

$$(102)\qquad \xi = \prod \left(\frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')} \right)^{\delta} = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \ldots,$$

welche der Kürze wegen „*L-Producte*" genannt werden sollen, zum Ziele. Dabei waren $D_1, D_2, D_3, \ldots$ beliebige Theiler von n, und die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ waren positive oder negative *ganze* Zahlen. Sind diese Exponenten so bestimmt, dass ξ eine Transformationsgrösse wird, so wurde ξ ein *Parameter* genannt, weil dann ξ dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ angehört.

Dies folgt schon aus Satz III in § 1 (Seite 10), nach welchem die Transformationsgrösse ξ durch g_2, g_3 und die Transformationsgrösse $\overline{J}$ *rational* darstellbar ist. In dem vorliegenden Falle ist aber ξ von der nullten Dimension, folglich kommen g_2 und g_3 nur in der Verbindung

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = J$$

und

$$\frac{27 g_3^2}{g_2^3 - 27 g_3^2} = J - 1$$

vor, d. h. ξ ist eine rationale Function von J und $\overline{J}$.

Es ist also zunächst die Frage, wie man die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ bestimmen muss, damit ξ wirklich ein Parameter wird.

Die Antwort auf diese Frage findet man entweder auf dem Wege, der bei der Bildung der Transformationsgrössen eingeschlagen wurde, indem man

$$(103)\qquad x = f(D_1)^{\delta_1} f(D_2)^{\delta_2} f(D_3)^{\delta_3} \ldots$$

rational durch die Theilwerthe der $\wp$-Function auszudrücken versucht. Man kann aber auch den Umstand benutzen, dass jeder Parameter ξ als rationale Function von $J = J(\tau)$ und $\overline{J} = J(n\tau)$ darstellbar ist. Nun ändert sich $J(\tau)$ gar nicht, wenn man τ mit der äquivalenten Grösse $\frac{p' + q'\tau}{p + q\tau}$ vertauscht.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass bei dieser Vertauschung auch die absolute Invariante $J(n\tau)$ der transformirten elliptischen Function ungeändert bleibt, ist bekanntlich

$$q \equiv 0 \text{ (mod. } n) \quad \text{oder} \quad q = nr.$$

Jede eindeutige, analytische Function ξ der Grösse τ, welche bei der Vertauschung von τ mit $\frac{p' + q'\tau}{p + nr\tau}$ gleichfalls ungeändert bleibt, und als Function von J überall algebraischen Charakter hat, ist eine rationale Function von J und $\overline{J}$. Dabei ist natürlich

(104) $$pq' - p'nr = +1.$$

Vertauscht man nun das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit dem äquivalenten

(105) $$2\varpi = 2p\omega + 2nr\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega',$$

so verwandelt sich

$$Q(\omega, \omega') \quad \text{in} \quad Q(\varpi, \varpi') = \varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega'),$$

wobei $\varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix}$ eine 24te Wurzel der Einheit ist, welche in § 11—15 m. vor. Abh. bestimmt worden ist. Bezeichnet man $\frac{n}{D}$ mit A, so geht bei derselben Vertauschung der Perioden

$$Q\left(\frac{\omega}{D}, \omega'\right) \text{ in } Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right) = \varrho\begin{pmatrix} p, & Ar \\ Dp', & q' \end{pmatrix} Q\left(\frac{\omega}{D}, \omega'\right)$$

über. Deshalb verwandelt sich bei dieser Vertauschung

(106) $$L(D) \quad \text{in} \quad \varrho\begin{pmatrix} p, & Ar \\ Dp', & q' \end{pmatrix} L(D) : \varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix}.$$

Setzt man also

$$A_1 D_1 = A_2 D_2 = A_3 D_3 = \cdots = AD = n,$$

so verwandelt sich ξ bei dieser Vertauschung der Perioden in sich selbst, multiplicirt mit dem Factor

(107) $$\frac{\varrho\begin{pmatrix} p, & A_1 r \\ D_1 p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_1} \varrho\begin{pmatrix} p, & A_2 r \\ D_2 p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_2} \varrho\begin{pmatrix} p, & A_3 r \\ D_3 p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_3} \cdots}{\varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots}}.$$

Da ξ als Function von J nirgendwo eine wesentlich singuläre Stelle hat, so heisst die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ξ ein Parameter ist: *Der Factor* (107) *muss immer gleich* 1 *sein, wenn man für die ganzen Zahlen p, r, p', q' alle möglichen Werthsysteme einsetzt, welche der Gleichung* (104) *genügen.*

Ist z. B.

$$p = 1, \quad r = 0, \quad p' = 1, \quad q' = 1,$$

so wird nach Gleichung (134) m. vor. Abh.

$$\varrho\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ D, & 1 \end{pmatrix} = e^{\frac{D\pi i}{12}},$$

folglich ist in diesem Falle der Factor (107) gleich

$$e^{\frac{\pi i}{12}[(D_1 - 1)\delta_1 + (D_2 - 1)\delta_2 + (D_3 - 1)\delta_3 + \cdots]}$$

und wird nur dann gleich 1, wenn

$$(108)\begin{cases} \Sigma(D-1)\delta \\ = (D_1-1)\delta_1+(D_2-1)\delta_2+(D_3-1)\delta_3+\cdots\equiv 0 \pmod{24}. \end{cases}$$

Diese Bedingung, der die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ genügen müssen, ist übrigens schon in Gleichung (64) ausgesprochen worden, als man verlangte, dass die Zahl m durch 6 theilbar ist.

Eine zweite Bedingungsgleichung findet man, indem man

$$p=1,\quad r=1,\quad p'=0,\quad q'=1$$

setzt. Dann wird

$$\varrho\begin{pmatrix}1, & A\\ 0, & 1\end{pmatrix}=e^{-\frac{A\pi i}{12}},$$

folglich ist hier der Factor (107) gleich

$$e^{\frac{\pi i}{12}[n(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots)-A_1\delta_1-A_2\delta_2-A_3\delta_3-\cdots]}$$

und wird nur dann gleich 1, wenn

$$(n-A_1)\delta_1+(n-A_2)\delta_2+(n-A_3)\delta_3+\cdots\equiv 0 \pmod{24},$$

oder

$$(109)\quad (D_1-1)A_1\delta_1+(D_2-1)A_2\delta_2+(D_3-1)A_3\delta_3+\cdots\equiv 0 \pmod{24}.$$

Diese Bedingungen (108) und (109) sind *nothwendig;* sie sind aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend*, wenn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sämmtlich *gerade* und auch n *gerade* ist.

Sind die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sämmtlich *gerade*, aber n *ungerade*, so tritt noch eine dritte Bedingung hinzu.

Die Untersuchung wird nämlich wesentlich einfacher, wenn man sich auf den Fall beschränkt, wo die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ lauter *gerade* Zahlen sind, weil man es dann nur mit 12^{ten} Wurzeln der Einheit zu thun hat, welche sich viel leichter bestimmen lassen als die 24^{ten} Wurzeln der Einheit ϱ. Nach den Angaben von Herrn Hurwitz (Grundlagen einer independenten Theorie der Modulfunctionen u. s. w., Math. Annalen, Bd. 18, S. 528) wird nämlich

$$\varrho\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}^2=\begin{bmatrix}a, & b\\ c, & d\end{bmatrix}=e^{\frac{E\pi i}{6}},$$

wobei

$$(110)\qquad E=(1-c^2)[bd+3(c-1)d+c+3]+c(a+d-3).$$

Deshalb verwandelt sich $L(D)^2$ bei der Vertauschung des primitiven Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ mit 2ϖ, $2\varpi'$ in

$$L(D)^2 e^{\frac{\pi i}{6}(E'-E'')},$$

wobei

$$E' = (1-D^2p'^2)[Arq'+3q'(Dp'-1)+Dp'+3]+Dp'(p+q'-3),$$
$$E'' = (1-p'^2)\quad[nrq'+3q'(p'-1)+p'+3]+p'(p+q'-3).$$

Daraus folgt

$$(111)\begin{cases} E'-E''=(D-1)[-nrp'^2q'-p'^3(3q'+1)+3p'^2(q'-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +p'(p+4q'-2)] \\ \qquad -rq'A(D-1)+3p'^2[q'-1-p'(3q'+1)]D(D-1) \\ \qquad -p'^3(3q'+1)D(D-1)(D-2). \end{cases}$$

Damit ξ ein Parameter ist, muss

(112) $$\Sigma(E'-E'')\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

sein. Nun ist aber nach den Congruenzen (108) und (109) nothwendiger Weise

(108a) $$\Sigma(D-1)\delta = 24a,$$

(109a) $$\Sigma(D-1)A\delta = 24b,$$

wo a und b beliebige ganze Zahlen sind, folglich reducirt sich die Bedingung (112) auf

$$(112\text{a})\quad \begin{cases} 3p'^2[(q'-1)(p'+1)-4p'q']\Sigma D(D-1)\delta \\ -p'^3(3q'+1)\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}. \end{cases}$$

Dabei ist $-12p'^3q'D(D-1)\delta$ sicher durch 24 theilbar; ist p' *gerade*, so ist schon $3p'^2(q'-1)$ durch 24 theilbar, und ist p' *ungerade*, so ist $3(p'+1)D(D-1)\delta$ durch 24 theilbar. Die Congruenz (112a) reducirt sich also weiter auf

(112b) $$p'^3(3q'+1)\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Ist n eine *gerade* Zahl, so wird auch $q = nr$ *gerade*, also q' *ungerade;* deshalb muss in diesem Falle

$3q'+1$ durch 2, $D(D-1)(D-2)$ durch 6 und δ durch 2

theilbar sein, so dass die Congruenz (112b) ganz von selbst befriedigt wird. Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so kann man q' so wählen, dass $p'^3(3q'+1)$ die Factoren 2 und 3 nicht enthält, dann tritt also noch die Bedingung

(113) $$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

hinzu. Dadurch erhält man also den folgenden Satz:

I. *Die Hülfsgrösse*

$$\xi = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \ldots$$

ist ein Parameter, wenn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ *sämmtlich gerade Zahlen sind, und wenn*

1) $$\Sigma(D-1)\delta = 24a,$$

2) $$\Sigma(D-1)A\delta = 24b,$$

3) $$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta = 24c.$$

Die letzte Bedingung kommt noch in Wegfall, wenn n eine gerade Zahl ist.

II. *Sind die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ zum Theil ungerade Zahlen, so kann ξ nur dann ein Parameter sein, wenn auch hier die beiden ersten Bedingungen, dass nämlich $\Sigma(D-1)\delta$ und $\Sigma(D-1)A\delta$ durch 24 theilbar sind, erfüllt werden. Diese Bedingungen sind nothwendig, aber noch nicht hinreichend,* wie sich aus den später folgenden Beispielen ergiebt.

§ 10.

Definition und Berechnung des Charakters, welchen ein Parameter besitzt.

Ist ξ ein Parameter, d. h. ist ξ eine rationale Function von $\bar{J}$ und J, so besteht zwischen ξ und J eine Gleichung, welche in § 5 eine „invariante Multiplicatorgleichung" genannt wurde. Der Grad dieser Gleichung in Bezug auf J wurde der *Charakter* des Parameters ξ genannt und möge mit *ch* bezeichnet werden. Es besteht nämlich zwischen ξ und jeder anderen Grösse η des Rationalitätsbereiches $(\bar{J}, J)$ eine Gleichung, welche in Bezug auf η wieder den Grad *ch* besitzt, wie aus bekannten algebraischen Sätzen hervorgeht.

Um nun den Werth von *ch* für einen Parameter ξ zu berechnen, entwickele man die $T(n)$ verschiedenen Werthe von ξ nach Potenzen von

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}.$$

Dies geschieht, indem man die Entwickelung für die einzelnen Factoren von ξ vornimmt. Setzt man zu diesem Zwecke wieder, wie in den Gleichungen (86),

$$p = A\alpha + C \quad \text{und} \quad q = D,$$

wo α so gewählt ist, dass p und q relativ prim sind, so entspricht das primitive Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

nach § 6 dem $\bar{\tau}$ Repräsentanten $\dfrac{C + D\tau}{A}$. Jetzt sei t_ν der grösste gemeinsame Theiler von D und D_ν, es sei also

$$q = D = t_\nu v, \quad D_\nu = t_\nu v_\nu, \tag{114}$$

wobei v und v_ν relativ prim sind. Deshalb giebt es zwei ganze Zahlen d und x, für welche

$$d v_\nu = p + x v \tag{115}$$

wird. Nach diesen Bestimmungen setze man

$$a = v_\nu q', \quad b = -v, \quad c = -p' t_\nu - x q', \tag{116}$$

dann wird

$$ad - bc = +1,$$

(117) $$a\frac{\varpi}{D_\nu} + b\varpi' = \frac{\omega}{t_\nu}, \quad c\frac{\varpi}{D_\nu} + d\varpi' = \frac{-x\omega}{t_\nu v_\nu} + \frac{\omega'}{v_\nu},$$

folglich wird

(118) $$Q\left(\frac{\omega}{t_\nu}, \frac{-x\omega}{t_\nu v_\nu} + \frac{\omega'}{v_\nu}\right) = \varrho\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{D_\nu}, \varpi'\right).$$

Bezeichnet man also die Grösse, welche aus h durch Vertauschung von ω, ω' mit $\frac{\omega}{t_\nu}$, $\frac{-x\omega}{t_\nu v_\nu} + \frac{\omega'}{v_\nu}$ hervorgeht, mit h_ν, so ist

(119) $$h_\nu = e^{-\frac{x\pi i}{v_\nu}} h^{\frac{t_\nu}{v_\nu}}.$$

Da nun die Entwickelung von $Q(\omega, \omega')$ mit $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}$ beginnt, so ist das erste Glied in der Entwickelung von $Q\left(\frac{\varpi}{D_\nu}, \varpi'\right)$, wenn man mit K_ν eine Constante bezeichnet, auf deren Werth es hier gar nicht ankommt,

(120) $$K_\nu h^{\frac{t_\nu}{12 v_\nu}} = K_\nu h^{\frac{t_\nu^2}{12 D_\nu}} = K_\nu h^{\frac{1}{12n} A_\nu t_\nu^2}.$$

Ist z. B.

$$D_\nu = 1, \text{ also } t_\nu = 1, \ A_\nu = n,$$

so wird das erste Glied in der Entwickelung von $Q(\varpi, \varpi')$

$$K_\nu h^{\frac{1}{12}} = \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}},$$

wie zu erwarten war. Die Entwickelung von

$$L(D_\nu) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_\nu}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}$$

fängt also mit

(121) $$K_\nu' h^{\frac{1}{12n}(A_\nu t_\nu^2 - n)} = K_\nu' h^{\frac{A_\nu}{12n}(t_\nu^2 - D_\nu)}$$

an, wo K_ν' wieder eine unwesentliche Constante ist.

Die Entwickelung des Parameters ξ, oder genauer von $\xi\left(\frac{C + D\tau}{A}\right)$, beginnt daher, abgesehen von einem constanten Factor, mit

$$h^{\frac{1}{12n}[A_1\delta_1(t_1^2 - D_1) + A_2\delta_2(t_2^2 - D_2) + A_3\delta_3(t_3^2 - D_3) + \cdots]}.$$

Dagegen beginnt die Entwickelung von J nach steigenden Potenzen von h mit $\frac{1}{1728 h^2}$. Nimmt man nun noch hinzu, dass ξ wegen der

Productdarstellung der L nur an solchen Stellen Null oder unendlich werden kann, an denen $J = \infty$ ist, so findet man nach bekannten Sätzen der Algebra das folgende Resultat:

Der Ausdruck

(122) $S(n, D) = A_1\delta_1(t_1^2 - D_1) + A_2\delta_2(t_2^2 - D_2) + A_3\delta_3(t_3^2 - D_3) + \cdots$

werde, wenn er positiv ist, mit P, und wenn er negativ ist, mit N bezeichnet, dann wird

(123) $$\Sigma P = -\Sigma N = 24n \cdot ch,$$

wobei die Summation über alle $\bar{\tau}$-Repräsentanten zu erstrecken ist.

Diese Summation kann man schrittweise ausführen, indem man zunächst alle $\bar{\tau}$-Repräsentanten berücksichtigt, bei denen D und deshalb auch A denselben Werth hat. Die Anzahl dieser $\bar{\tau}$-Repräsentanten ist nach den Auseinandersetzungen in § 6 gleich $\frac{A}{t}\varphi(t)$ und werde mit (A) bezeichnet, so dass also

$$\frac{A}{t}\varphi(t) = (A).$$

Dabei ist t der grösste gemeinsame Theiler von A und D. Für alle diese $\bar{\tau}$-Repräsentanten hat nämlich $S(n, D)$ denselben Werth, so dass man nur die Werthe der Producte $(A)\,S(n, D)$ für alle Theiler D zu untersuchen hat, die in n enthalten sind.

Setzt man noch

(124) $$(A_\nu)\,S(n, D_\nu) = (A_\nu)\,[A_1\delta_1(t_1^2 - D_1) + A_2\delta_2(t_2^2 - D_2) + A_3\delta_3(t_3^2 - D_3) + \cdots] = 24nk_\nu,$$

so wird nach bekannten Sätzen der Algebra k_ν eine *ganze* positive oder negative Zahl, weil die (A_ν) zu D_ν gehörigen Werthe von $\xi\left(\frac{C + D_\nu\tau}{A_\nu}\right)$ einen Cyklus bilden und für $h = 0$ (bez. für $J = \infty$) einander gleich werden. Bezeichnet man also die positiven Werthe von k_ν mit k_p und die negativen mit k_n, so geht Gleichung (123) über in

(125) $$\Sigma k_p = -\Sigma k_n = ch,$$

wo die Summation jetzt nur noch über alle Theiler D_ν von n zu erstrecken ist.

Ist μ die Anzahl aller Theiler von n, so bildet man die μ Gleichungen

(126) $$(A_\nu)S(n, D_\nu) = 24nk_\nu.$$

Dadurch erhält man z. B. für $D_0 = 1,\ (A_0) = A_0 = n$

(126a) $$A_1\delta_1(1 - D_1) + A_2\delta_2(1 - D_2) + A_3\delta_3(1 - D_3) + \cdots = 24k_0;$$

und für

$$D_{\mu-1} = n,\ (A_{\mu-1}) = A_{\mu-1} = 1$$

erhält man

(126b) $$(D_1 - 1)\delta_1 + (D_2 - 1)\delta_2 + (D_3 - 1)\delta_3 + \cdots = 24k_{\mu-1}.$$

Dies giebt nach den Gleichungen (108a) und (109a)

(127) $$k_0 = -b, \quad k_{\mu-1} = a.$$

Aus Gleichung (125) folgt auch noch, dass von den μ Gleichungen (126) die eine schon aus den übrigen $\mu - 1$ Gleichungen folgt.

Bisher waren die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ als gegeben betrachtet, man kann jetzt aber auch die ganzen Zahlen k_ν als gegeben ansehen und aus den Gleichungen (126) die $\mu - 1$ Grössen

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{\mu-1}$$

berechnen. *Gelingt es nun, die* $\mu - 1$ *ganzen Zahlen* $k_0, k_1, \ldots k_{\mu-2}$ *so auszuwählen, dass auch die Grössen* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{\mu-1}$ *ganze Zahlen werden, welche durch 2 theilbar sind, so ist* ξ *für gerade Werthe von* n *sicher ein Parameter; für ungerade Werthe von* n *tritt noch die Bedingung*

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta = 24c$$

hinzu.

Bei den Anwendungen wird man übrigens auch diejenigen Werthsysteme der δ berücksichtigen, bei denen sie theilweise *ungerade* Werthe haben. Allerdings muss man dann erst untersuchen, ob ξ ein Parameter ist.

Unter den Werthen von $k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots k_{\mu-2}$ welche ganzzahlige Werthe von $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ liefern, sind diejenigen besonders zu beachten, für welche sich ein möglichst kleiner Werth von ch ergiebt.

§ 11.

Complementäre Parameter.

Vertauscht man ω mit $\frac{\omega}{n}$, so geht J in $\bar{J}$ und

$$\xi = \prod \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)^\delta}{Q(\varpi, \varpi')^\delta} \text{ in } \bar{\xi}$$

über. Es ist die Frage, ob auch $\bar{\xi}$ ein Parameter ist. Setzt man z. B.

$$\varpi = \omega', \quad \varpi' = -\omega,$$

und beachtet man die wichtige Formel

(128) $$Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega'),$$

so wird

$$\bar{\xi} = \prod \frac{Q\left(\frac{\omega'}{D}, -\frac{\omega}{n}\right)^\delta}{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^\delta} = \prod \frac{Q\left(\frac{\omega}{AD}, \frac{\omega'}{D}\right)^\delta}{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^\delta} = \prod \frac{D^{\frac{\delta}{2}} Q\left(\frac{\omega}{A}, \omega'\right)^\delta}{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^\delta}.$$

Damit $\bar{\xi}$ ein Parameter wird, müssen zuerst zwei Bedingungen befriedigt werden, welche den Gleichungen (108a) und (109a), nämlich den Gleichungen

$$\Sigma(D-1)\delta = 24a \quad \text{und} \quad \Sigma(D-1)A\delta = 24b$$

entsprechen, und welche hier die Form

$$\Sigma[(A-1)\delta-(n-1)\delta] = -\Sigma(AD-A)\delta = -\Sigma(D-1)A\delta = 24a'$$

und

$$\Sigma[(A-1)D\delta-(n-1)\delta] = -\Sigma(D-1)\delta = 24b'$$

annehmen. Diese Bedingungen sind aber sicher erfüllt, denn es wird, wie man ohne Weiteres erkennt,

$$a' = -b \quad \text{und} \quad b' = -a,$$

wobei a und b ganze Zahlen sind, weil nach Voraussetzung ξ ein Parameter ist. Es wird daher auch $\bar{\xi}$ ein Parameter, wenn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sämmtlich *gerade* sind, und wenn auch n eine *gerade* Zahl ist.

Ist dagegen n *ungerade*, so tritt noch die Bedingung

$$S = \Sigma[(A^3-n^3-3(A^2-n^2)+2(A-n)]\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

hinzu. Auch diese Bedingung wird erfüllt, denn nach Voraussetzung ist ξ ein Parameter, es ist also

$$\Sigma(D^3-3D^2+2D)\delta = \Sigma[(D^3-1)-3(D^2-1)+2(D-1)]\delta \equiv 0 \pmod{24},$$

folglich ist

$$\begin{aligned} S = & \ \Sigma[A^3(1-D^3)-3A^2(1-D^2)+2A(1-D)]\delta \\ \equiv & -\Sigma[(A^3-1)(D^3-1)-3(A^2-1)(D^2-1)+2(A-1)(D-1)]\delta. \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, so müssen auch A und D ungerade sein, also $A = 2B+1$, $D = 2E+1$, folglich wird

$$A^2-1 = 4B(B+1) \quad \text{und} \quad D^2-1 = 4E(E+1).$$

Dies giebt

$$\begin{aligned} S & \equiv -\Sigma[(A^3-1)(D^3-1)+2(A-1)(D-1)]\delta \\ & = -\Sigma[(8B^3+12B^2+6B)(8E^3+12E^2+6E)+8BE]\delta \\ & \equiv -4BE\Sigma(16B^2E^2+2)\delta \\ & \equiv -4BE\Sigma(B^2E^2-1)\delta \equiv 0 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Es möge noch ein zweiter Beweis hinzugefügt werden, der auch den Fall umfasst, wo die Exponenten δ theilweise *ungerade* sind.

Da ξ ein Parameter ist, so ist $\bar{\xi}$ darstellbar als rationale Function von J und $\bar{J}$. Setzt man z. B. wieder

$$\bar{\varpi} = \omega', \quad \bar{\varpi}' = -\omega,$$

so wird

$$(129) \qquad \xi = R\left(J(\tau),\ J\left(\frac{\tau}{n}\right)\right).$$

Vertauscht man jetzt ω mit $\frac{\omega}{n}$, so geht $J(\tau)$ in $J(n\tau)$ und $J\left(\frac{\tau}{n}\right)$ in $J(\tau)$ über. Dadurch wird

$$(130) \qquad \bar{\xi} = R(J(n\tau),\ J(\tau))$$

d. h. auch $\bar{\xi}$ ist eine rationale Function von J und $\bar{J}$ und deshalb ein Parameter.

Dabei ist freilich zu beachten, dass die hier benutzten Werthe von ξ und $\bar{\xi}$ *verschiedenen* $\bar{\tau}$-Repräsentanten zugeordnet sind.

Was für die Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{n}$ gezeigt wurde, lässt sich natürlich auch für die Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{n}$ in ähnlicher Weise zeigen, so dass man zu jedem der $T(n)$ Werthe von ξ einen zugehörigen Werth von $\bar{\xi}$ finden kann.

Die beiden Parameter ξ und $\bar{\xi}$ mögen „*complementäre Parameter*“ heissen. Von ihnen gilt also der Satz:

I. *Die Gleichung, welche zwischen einem Parameter ξ und der absoluten Invariante J besteht, geht in eine Gleichung zwischen dem complementären Parameter $\bar{\xi}$* und $\bar{J}$ *über, indem man ξ mit $\bar{\xi}$ und J mit $\bar{J}$ vertauscht.*

Da diese neue Gleichung in Bezug auf $\bar{J}$ denselben Grad hat wie die erste Gleichung in Bezug auf J, so gilt auch noch der Satz:

II. *Zwei complementäre Parameter haben denselben Charakter.*

In vielen Fällen lassen sich J und $\bar{J}$ beide *rational* durch ξ und $\bar{\xi}$ darstellen, so dass die Invariantengleichung gewissermassen durch eine viel einfachere Gleichung zwischen zwei complementären Parametern ersetzt ist. Es kommt aber auch vor, dass der Rang der Gleichung zwischen ξ und $\bar{\xi}$ niedriger ist als der zwischen J und $\bar{J}$, dann ist natürlich eine solche Darstellung nicht möglich. In einzelnen Fällen wird auch ξ mit $\bar{\xi}$ identisch. Dann sind J und $\bar{J}$ sogar Wurzeln *derselben Gleichung.*

II. Theil.

Anwendungen.

III. Abschnitt.

Transformation vom Grade 2^σ.

§ 12.

Transformation vom Grade 2.

Für $n = 2$ wird $\varrho = 0$. In diesem Falle wird, wie sogleich gezeigt werden soll,

(131) $$\xi = L(2)^{24} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{24}}{Q(\varpi, \varpi')^{24}}$$

ein *Parameter* niedrigsten Grades. Es war nämlich nach Gleichung (190) in § 27 m. vor. Abh.

$$L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0,$$

eine Gleichung, welche man auch auf die Form

(132) $$J : J - 1 : 1 = (\xi + 16)^3 : (\xi - 8)^2(\xi + 64) : 1728\,\xi$$

bringen kann.

Der zu ξ complementäre Parameter ist hier

$$\bar{\xi} = \frac{2^{12}\, Q(\varpi, \varpi')^{24}}{Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{24}} = \frac{2^{12}}{\xi},$$

folglich wird

(133) $$\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\xi} + 16)^3 : (\bar{\xi} - 8)^2\,(\bar{\xi} + 64) : 1728\,\bar{\xi},$$

oder

(133a) $$\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\xi + 256)^3 : (\xi - 512)^2\,(\xi + 64) : 1728\,\xi^2.$$

§ 13.

Transformation vom Grade 4.

Für $n = 4$ ist wieder $\varrho = 0$ und n hat die Theiler 1, 2 und 4. Setzt man also

$$\xi = L(2)^{\delta_1}\, L(4)^{\delta_2},$$

so findet man aus Gleichung (126) die drei Gleichungen

$$-2\delta_1 - 3\delta_2 = 24k_0, \quad \delta_1 = 24k_1, \quad \delta_1 + 3\delta_2 = 24k_2,$$

oder

(134) $$\delta_1 = 24k_1, \quad \delta_2 = -8(k_0 + 2k_1).$$

Indem man von den drei ganzen Zahlen k_0, k_1, k_2 die eine gleich 0, die zweite gleich $+1$ und die dritte gleich -1 setzt, erhält man drei *Parameter* mit dem Charakter 1, nämlich

$$(135)\qquad \xi_1 = \frac{L(4)^{16}}{L(2)^{24}},\quad \xi_2 = L(4)^8,\quad \xi_3 = \frac{L(4)^8}{L(2)^{24}}.\text{*)}$$

Da k_0 und k_2 *ganze* Zahlen, und δ_1, δ_2, n *gerade* Zahlen sind, so sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 Parameter; ausserdem ist der Charakter bei allen dreien gleich 1, also möglichst niedrig.

Aus diesem Grunde ist auch jeder der drei Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch jeden der beiden anderen *linear* darstellbar. Es giebt also z. B. eine Gleichung von der Form

$$a\xi_1\xi_2 + b\xi_1 + c\xi_2 + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr einfach dadurch bestimmen kann, dass man ξ_1 und ξ_2 nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{2}} = z$ entwickelt.**) Dies giebt

---

*) $k_0 = 0,\ k_1 = -1,\ k_2 = +1$ giebt den Parameter ξ_1,
$k_0 = -1,\ k_1 = 0,\ k_2 = +1$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +1,\ k_1 = -1,\ k_2 = 0$ „ „ „ ξ_3.

Die übrigen Fälle, welche $\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3}$ liefern, können übergangen werden.

**) Es ist zweckmässig, bei der Entwickelung der L-Producte

$$\xi = \prod L(D)^\delta = \prod\left(\frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}\right)^\delta$$

$\varpi = \omega',\ \varpi' = -\omega$ zu setzen; dann wird nämlich

$$L(D) = \frac{Q\left(\frac{\omega'}{D}, -\omega\right)}{Q(\omega', -\omega)} = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{D}\right)}{Q(\omega, \omega')}.$$

Nun ist nach Gleichung (3)

$$Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}(1 - h^2 - h^4 + h^{10} + h^{14} - h^{24} - h^{30} + \cdots),$$

oder, wenn man

$$h^{\frac{2}{n}} = z,\quad \text{also}\quad h^{\frac{2}{D}} = z^A,\quad h^2 = z^n$$

setzt,

$$Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{n}{24}}(1 - z^n - z^{2n} + z^{5n} + z^{7n} - - + + \cdots),$$

$$Q\left(\omega, \frac{\omega'}{D}\right) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{A}{24}}(1 - z^A - z^{2A} + z^{5A} + z^{7A} - - + + \cdots),$$

$$L(D) = z^{-\frac{A}{24}(D-1)}\,\frac{1 - z^A - z^{2A} + z^{5A} + z^{7A} - - + + \cdots}{1 - z^n - z^{2n} + z^{5n} + z^{7n} - - + + \cdots}.$$

$$(136) \qquad \xi_2 = \frac{16\,\xi_1}{1-\xi_1}, \quad \xi_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1-\xi_1}{16},$$

$$(137) \qquad L(2)^{24} = \frac{\xi_2^2}{\xi_1} = \frac{256\,\xi_1}{(1-\xi_1)^2}, \quad L(4)^8 = \xi_2 = \frac{16\,\xi_1}{1-\xi_1}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (132)

$$(138) \quad J : J-1 : 1 = (1+14\xi_1+\xi_1^2)^3 : (1-34\xi_1+\xi_1^2)^2(1+\xi_1)^2 \\ : 108\,\xi_1(1-\xi_1)^4.$$

Die zu ξ_1, ξ_2, ξ_3 complementären Parameter sind

$$\bar\xi_1 = 16\,\xi_3, \quad \bar\xi_2 = \frac{256}{\xi_2}, \quad \bar\xi_3 = \frac{\xi_1}{16},$$

also

$$\xi_1 + \bar\xi_1 = 1,$$

folglich wird nach Gleichung (108)

$$(139) \quad \bar J : \bar J - 1 : 1 = (1+14\bar\xi_1+\bar\xi_1^2)^3 : (1-34\bar\xi_1+\bar\xi_1^2)^2(1+\bar\xi_1)^2 \\ : 108\,\bar\xi_1(1-\bar\xi_1)^4,$$

oder

$$(139\text{a}) \quad \bar J : \bar J - 1 : 1 = (16-16\xi_1+\xi_1^2)^3 : (32-32\xi_1-\xi_1^2)^2(2-\xi_1)^2 \\ : 108\,\xi_1^4(1-\xi_1).$$

§ 14.

Transformation vom Grade 8.

Für $n = 8$ ist gleichfalls $\varrho = 0$ und n hat die Theiler 1, 2, 4 und 8. Setzt man also

$$\xi = L(2)^{\delta_1}\, L(4)^{\delta_2}\, L(8)^{\delta_3},$$

so findet man aus Gleichung (126) die vier Gleichungen

$$(140) \qquad \begin{cases} -4\delta_1 - 6\delta_2 - 7\delta_3 = 24k_0, \\ +2\delta_1 + 0 - \delta_3 = 24k_1, \\ +\delta_1 + 3\delta_2 + \delta_3 = 24k_2, \\ +\delta_1 + 3\delta_2 + 7\delta_3 = 24k_3; \end{cases}$$

oder

$$(141) \qquad \begin{cases} \delta_1 = 2(-k_0 + 5k_1 - 2k_2), \\ \delta_2 = 2(+k_0 - k_1 + 6k_2), \\ \delta_3 = 4(-k_0 - k_1 - 2k_2). \end{cases}$$

$$(141)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(8)^8\,L(2)^4}{L(4)^{12}}, & \xi_2 = \dfrac{L(8)^4 L(2)^{14}}{L(4)^{14}}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(8)^4\,L(2)^2}{L(4)^{10}}, & \xi_4 = \dfrac{L(2)^{10}}{L(8)^4\,L(4)^2} = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}, \\ \xi_5 = \dfrac{L(4)^2}{L(8)^4\,L(2)^2} = \dfrac{\xi_3}{\xi_1}, & \xi_6 = \dfrac{L(4)^4}{L(2)^{12}} = \dfrac{\xi_3}{\xi_2}\,{}^{*)}. \end{cases}$$

Da diese Parameter sämmtlich den Charakter 1 haben, so besteht zwischen je zweien von ihnen eine lineare Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man wieder die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{1}{4}} = z$ findet. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$(142)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1-4\xi_6}{1+4\xi_6}, \quad \xi_2 = \dfrac{1}{1+4\xi_6}, \quad \xi_3 = \dfrac{\xi_6}{1+4\xi_6}, \\ \xi_4 = \dfrac{1}{1-4\xi_6}, \quad \xi_5 = \dfrac{\xi_6}{1-4\xi_6}. \end{cases}$$

Dabéi wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (141)

$$(143)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_3^4} = \dfrac{1-16\xi_6^2}{\xi_6^4}, \\ L(4)^8 = \dfrac{\xi_1}{\xi_3^2} = \dfrac{1-16\xi_6^2}{\xi_6^2}, \\ L(8)^{24} = \dfrac{\xi_1^7}{\xi_2\xi_3^7} = \dfrac{(1-4\xi_6)^7(1+4\xi_6)}{\xi_6^7}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die drei Parameter, welche bei der Transformation vierten Grades auftraten, mit $\xi_1(4)$, $\xi_2(4)$, $\xi_3(4)$, so wird

$$(144)\quad \xi_3(4) = \xi_6^2, \quad \text{also} \quad \xi_1(4) = 1 - 16\xi_3(4) = 1 - 16\xi_6^2,$$

folglich geht die Gleichung (138) über in

$$(145)\quad J : J-1 : 1 = (1-16\xi_6^2+16\xi_6^4)^3 : (1-16\xi_6^2-8\xi_6^4)^2(1-8\xi_6^2)^2 \\ : 1728\xi_6^8(1-16\xi_6^2).$$

Der zu ξ_6 complementäre Parameter ist

$$\bar{\xi}_6 = \frac{\xi_1}{4},$$

folglich wird

---

*) $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = +1$ giebt den Parameter ξ_1,
$k_0 = 0$, $k_1 = +1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +1$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = 0$, $k_1 = +1$, $k_2 = 0$, $k_3 = -1$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = +1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = -1$ „ „ „ ξ_5,
$k_0 = +1$, $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ „ „ „ ξ_6.

$$(146)\quad \overline{J}:\overline{J}-1:1=[16(1-\xi_1^2)+\xi_1^4]^3:[32(1-\xi_1^2)-\xi_1^4]^2(2-\xi_1^2)^2 \\ :108\xi_1^8(1-\xi_1^2),$$

oder

$$(146\text{a})\quad \begin{cases} \overline{J}:\overline{J}-1:1=[(1-4\xi_6)^4+256\xi_6(1+4\xi_6)^2]^3 \\ \qquad :[(1-4\xi_6)^4-512\xi_6(1+4\xi_6)^2]^2[(1-4\xi_6)^2+32\xi_6]^2 \\ \qquad :1728\xi_6(1+4\xi_6)^2(1-4\xi_6)^8. \end{cases}$$

Wie vortheilhaft die hier benutzte Methode ist, erkennt man am besten, wenn man sie mit der Herleitung von Gleichung (199) in m. vor. Abh. vergleicht.

§ 15.

Transformation vom Grade 16.

Für $n=16$ ist gleichfalls $\varrho=0$ und n hat die fünf Theiler 1, 2, 4, 8 und 16. Setzt man also

$$\xi=L(2)^{\delta_1}L(4)^{\delta_2}L(8)^{\delta_3}L(16)^{\delta_4},$$

so findet man aus Gleichung (126) die fünf Gleichungen

$$(147)\quad \begin{cases} -8\delta_1-12\delta_2-14\delta_3-15\delta_4=24k_0, \\ +4\delta_1+\;0\;-\;2\delta_3-\;3\delta_4=24k_1, \\ +2\delta_1+\;6\delta_2+\;2\delta_3+\;0\;=24k_2, \\ +\;\delta_1+\;3\delta_2+\;7\delta_3+\;3\delta_4=24k_3, \\ +\;\delta_1+\;3\delta_2+\;7\delta_3+15\delta_4=24k_4, \end{cases}$$

oder

$$(148)\quad \begin{cases} \delta_1=-\;k_0+5k_1-2k_2+0, \\ \delta_2=\;\;0\;-2k_1+5k_2-2k_3, \\ \delta_3=+\;k_0+\;k_1-\;k_2+6k_3, \\ \delta_4=-2k_0-2k_1-2k_2-4k_3. \end{cases}$$

Indem man jetzt von den fünf Grössen k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die übrigen drei gleich 0 setzt, erhält man 10 L-Producte mit dem Charakter 1,*) nämlich

$$(149)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{L(16)^4L(4)^2}{L(8)^6}, & \xi_2=\dfrac{L(16)^2L(4)^7}{L(8)^7L(2)^2}, & \xi_3=\dfrac{L(4)^2}{L(2)^6}, \\ \xi_4=\dfrac{L(16)^2L(2)^5}{L(8)^5}, & \xi_5=\dfrac{L(16)^2L(4)^2}{L(8)^5L(2)}, & \xi_6=\dfrac{L(16)^2L(8)L(2)^2}{L(4)^5}, \end{cases}$$

---

*) Streng genommen kann nur bei *Parametern* von einem *Charakter* die Rede sein; es soll aber hier, und ebenso bei den folgenden Anwendungen, durch die ganzen Zahlen $k_0, k_1, k_2, \ldots k_{\mu-1}$ der Charakter der L-Producte nach Gleichung (125) erklärt werden gleichviel, ob sie Parameter sind oder nicht.

$$(149)\quad \begin{cases} \xi_7 = \dfrac{L(16)^2\,L(4)^2}{L(8)\,L(2)^5}, \quad \xi_8 = \dfrac{L(16)^2\,L(2)}{L(8)}, \quad \xi_9 = \dfrac{L(8)^2\,L(2)^7}{L(4)^7}, \\ \xi_{10} = \dfrac{L(8)^2\,L(2)}{L(4)^5}. ^{*)} \end{cases}$$

Da bei ξ_1 und ξ_3 die Exponenten δ *gerade* sind, so sind für diese Grössen die Bedingungen alle erfüllt, welche bei Parametern erfüllt werden müssen, folglich sind ξ_1 und ξ_3 *Parameter* mit dem Charakter 1. Ferner ist die Grösse

$$\xi_2{}^2 = \frac{L(16)^4\,L(4)^{14}}{L(8)^{14}\,L(2)^4}$$

ein Parameter mit dem Charakter 2, welcher aus

$$\xi_2(8) = \frac{L(8)^4 L(2)^{14}}{L(4)^{14}} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{8},\ \varpi'\right)^4 Q\left(\frac{\varpi}{2},\ \varpi'\right)^{14}}{Q\left(\frac{\varpi}{4},\ \varpi'\right)^{14} Q(\varpi,\ \varpi')^4}$$

entsteht, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht. In derselben Weise geht $\xi_1(8)$ in $\xi_1{}^2$ über. Nun folgt aus den Gleichungen (142)

$$2\xi_2(8) = 1 + \xi_1(8),$$

oder, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht,

$$(150)\qquad 2\xi_2{}^2 = 1 + \xi_1{}^2.$$

Wäre ξ_2 ein Parameter, so müsste sich ξ_2 *linear* durch den Parameter ξ_1 darstellen lassen. Dies ist aber nach Gleichung (150) nicht möglich, folglich ist ξ_2 *kein Parameter.*

Anders verhält sich die Sache bei ξ_4. Es ist nämlich

$$\xi_4 = \frac{L(16)^2 L(2)^5}{L(8)^5} = \frac{f(16)^2 f(2)^5}{f(8)^5} = \frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{15} \tau\left(\frac{\alpha\varpi}{8}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^5 \tau\left(\frac{2\varpi}{4}\right)^5 \tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^5}.$$

Nach Formel (14), nämlich nach der Formel

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
k_0	0	0	+1	0	+1	0	0	−1	0	+1
k_1	0	0	−1	+1	0	0	−1	0	+1	0
k_2	0	+1	0	0	0	−1	0	0	−1	−1
k_3	−1	−1	0	−1	−1	0	0	0	0	0
k_4	+1	0	0	0	0	+1	+1	+1	0	0

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \frac{\tau\left(\frac{2(\beta-\alpha)\varpi}{n}\right)\tau\left(\frac{2(\beta+\alpha)\varpi}{n}\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2\tau\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)^2}$$

wird

$$\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right) - \wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right) - \wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right) - \wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]$$
$$= -\frac{\tau(\varpi)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^2\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^2\tau\left(\frac{\varpi}{2}\right)^3},$$

$$\left[\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right) - \wp(\varpi)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right) - \wp\left(\frac{7\varpi}{8}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{5\varpi}{8}\right) - \wp\left(\frac{3\varpi}{8}\right)\right]$$
$$= -\frac{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{3\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{5\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{7\varpi}{8}\right)^2},$$

folglich ist

$$\frac{\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right) - \wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right) - \wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right) - \wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]}{\left[\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right) - \wp(\varpi)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right) - \wp\left(\frac{7\varpi}{8}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{5\varpi}{8}\right) - \wp\left(\frac{3\varpi}{8}\right)\right]}$$
$$= \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{3\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{5\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{7\varpi}{8}\right)^2\tau(\varpi)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^3\tau\left(\frac{2\varpi}{4}\right)^3\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^3}$$
$$= \frac{\prod_{\alpha=1}^{15}\tau\left(\frac{\alpha\varpi}{8}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^5\tau\left(\frac{2\varpi}{4}\right)^5\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^5} = \xi_4.$$

Hieraus erkennt man, dass sich ξ_4 als eine rationale Function von $\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right)$ darstellen lässt, die sich gar nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right)$ mit $\wp\left(\frac{3\varpi}{8}\right)$, $\wp\left(\frac{5\varpi}{8}\right)$, oder $\wp\left(\frac{7\varpi}{8}\right)$ vertauscht. Es ist also ξ_4 ein *Parameter* mit dem Charakter 1. Deshalb werden auch die Grössen

$$(151)\qquad \xi_5 = \xi_3\xi_4, \quad \xi_7 = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad \xi_8 = \frac{\xi_1}{\xi_3\xi_4} = \frac{\xi_1}{\xi_5}$$

Parameter; dagegen sind die Grössen

$$\xi_2, \quad \xi_6 = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \xi_9 = \frac{\xi_4}{\xi_2}, \quad \xi_{10} = \frac{\xi_5}{\xi_2}$$

keine Parameter, weil ξ_2 kein Parameter ist. Erst die Quadrate dieser Grössen sind Parameter mit dem Charakter 2.

Zwischen je zweien von den 6 Parametern mit dem Charakter 1 bestehen *lineare* Gleichungen von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d wieder sehr leicht durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{1}{8}} = z$ findet. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$(152)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1-2\xi_3}{1+2\xi_3}, \quad \xi_4 = \dfrac{1}{1+2\xi_3}, \quad \xi_5 = \dfrac{\xi_3}{1+2\xi_3}, \quad \xi_7 = 1-2\xi_3, \\ \xi_8 = \dfrac{1-2\xi_3}{\xi_3}, \quad \xi_2{}^2 = \dfrac{1+4\xi_3^2}{(1+2\xi_3)^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (149) folgt dabei:

$$(153)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_3^8\xi_4^4} = \dfrac{1-16\xi_3^4}{\xi_3^8}, \\ L(4)^8 = \dfrac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_3^4\xi_4^4} = \dfrac{1-16\xi_3^4}{\xi_3^4}, \\ L(8)^{24} = \dfrac{\xi_1^7\xi_2^2}{\xi_3^{14}\xi_4^{16}} = \dfrac{(1-4\xi_3^2)^7(1+4\xi_3^2)}{\xi_3^{14}}, \\ L(16)^8 = \dfrac{\xi_1^5}{\xi_3^5\xi_4^6} = \dfrac{(1-2\xi_3)^5(1+2\xi_3)}{\xi_3^5}. \end{cases}$$

Da nun $\xi_3{}^2 = \xi_6(8)$, so folgt aus Gleichung (145)

$$(154)\quad J : J-1 : 1 = (1-16\xi_3^4+16\xi_3^8)^3 : (1-16\xi_3^4-8\xi_3^8)^2(1-8\xi_3^4)^2 : 1728\xi_3^{16}(1-16\xi_3^4).$$

Der zu ξ_3 complementäre Parameter ist

$$(155)\quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_1}{2},$$

deshalb findet man sofort aus Gleichung (154)

$$(156)\quad \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (16-16\xi_1^4+\xi_1^8)^3 : (32-32\xi_1^4-\xi_1^8)^2(2-\xi_1^4)^2 : 108\xi_1^{16}(1-\xi_1^4).$$

§ 16.

Transformation vom Grade 2^α.

Für $n = 2^\alpha = 16m$ ist $T(n) = 24m$. Man kann aber sogleich Parameter ξ angeben mit dem Charakter m, so dass der Grad der Gleichung zwischen ξ und J in Bezug auf J 24 mal kleiner ist als der Grad der Invariantengleichung.

Für $n = 16$ und für $n = 32$ haben diese Parameter auch einen möglichst niedrigen Charakter, für grössere Werthe von n muss es aber allerdings Parameter geben, deren Grad noch kleiner ist als m

Es wird nämlich für

$$n = 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024, \ldots,$$
$$m = \ 4,\quad 8,\ 16,\ 32,\quad 64, \ldots,$$
$$\frac{1}{2}(\varrho+3) = \ 3,\quad 6,\ 12,\ 26,\quad 54, \ldots.$$

Beispiele für solche Parameter mit dem Charakter m sind die Grössen

$$(157)\quad \xi_1 = \frac{L(16m)^4 L(4m)^2}{L(8m)^6},\quad \xi_3 = \frac{L(4m)^2 L(m)^4}{L(2m)^6},\quad \xi_4 = \frac{L(16m)^2 L(2m)^5}{L(8m)^5 L(m)^2},$$

welche aus $\xi_1(16)$, $\xi_3(16)$, $\xi_4(16)$ hervorgehen, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{m}$ vertauscht.

Zum Beweise, dass ξ_1 ein *Parameter mit dem Charakter* m ist, beachte man, dass die Theiler von n in diesem Falle

$$D_0 = 1,\ D_1 = 2,\ D_2 = 4, \ldots D_{\alpha-2} = 4m,\ D_{\alpha-1} = 8m,\ D_\alpha = 16m$$

sind. Deshalb wird

$$\delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0, \ldots \delta_{\alpha-2} = +2,\ \delta_{\alpha-1} = -6,\ \delta_\alpha = +4$$

und

$$S(n, D) = \Sigma A_\nu \delta_\nu (t_\nu^2 - D_\nu) = 8(t_{\alpha-2}^2 - 4m) - 12(t_{\alpha-1}^2 - 8m) + 4(t_\alpha^2 - 16m)$$
$$= 8t_{\alpha-2}^2 - 12t_{\alpha-1}^2 + 4t_\alpha^2.$$

Giebt man nun dem Theiler D die Werthe $D_0, D_1, D_2, \ldots D_{\alpha-2}$, so wird immer

$$t_{\alpha-2} = t_{\alpha-1} = t_\alpha = D;$$

deshalb ist in diesen Fällen

$$S(n, D) = 0$$

und

$$(158)\qquad k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0, \ldots k_{\alpha-2} = 0.$$

Dagegen ist

$$(A_{\alpha-1})\ S(n, D_{\alpha-1}) = 8 \cdot 16m^2 - 12 \cdot 64m^2 + 4 \cdot 64m^2$$
$$= -24 \cdot 16m^2 = +24 \cdot 16m \cdot k_{\alpha-1},$$
$$(A_\alpha) S(n, D_\alpha) = 8 \cdot 16m^2 - 12 \cdot 64m^2 + 4 \cdot 256m^2$$
$$= +24 \cdot 16m^2 = +24 \cdot 16m \cdot k_\alpha,$$

also

$$(159)\qquad k_{\alpha-1} = -m,\quad k_\alpha = +m.$$

Die Grösse ξ_1 ist also ein *Parameter*, weil die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ *gerade* Zahlen sind, und weil die Grössen k_0 und k_α ganzzahlige Werthe haben. Ausserdem ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (158) und (159) der Charakter von ξ_1 gleich m.

Der Beweis dafür, dass ξ_1 ein Parameter ist, lässt sich auch führen, indem man zeigt, dass sich ξ_1 auf die Form

$$(160)\quad \xi_1=(g_2{}^3-27g_3{}^2)^m\frac{f(16m)^4\,f(4m)^2}{f(8m)^6}=\frac{(g_2{}^3-27g_3{}^2)^m}{\prod\limits_{\alpha=1}^{4m}\wp'\left(\frac{2\alpha-1}{8m}\varpi\right)}$$

bringen lässt.

Da ξ_1, ξ_3 und ξ_4 aus $\xi_1(16)$, $\xi_3(16)$, $\xi_4(16)$ durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{m}$ hervorgehen, so gelten auch hier die Gleichungen (152), nämlich

$$\xi_1=\frac{1-2\xi_3}{1+2\xi_3},\quad \xi_4=\frac{1}{1+2\xi_3},$$

oder

$$2\xi_3=\frac{1-\xi_1}{1+\xi_1},\qquad \xi_4=\frac{1+\xi_1}{2}.$$

Deshalb sind auch ξ_3 und ξ_4 *Parameter* mit dem Charakter m.

Das Vorstehende genügt schon zur Bildung der Gleichungen zwischen ξ_3 und J. Es wird nämlich nach den Gleichungen (141), (149) und (152)

$$\xi_1(8)=\frac{L(8)^8\,L(2)^4}{L(4)^{12}}=\frac{\xi_1(16)}{\xi_2(16)^2}=\frac{2\xi_1(16)}{1+\xi_1(16)^2},$$

also

$$(161)\qquad \frac{1-\xi_1(8)}{1+\xi_1(8)}=\left(\frac{1-\xi_1(16)}{1+\xi_1(16)}\right)^2.$$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{m}$, so geht $\xi_1(8)$ in $\xi_1(8m)^2$ und $\xi_1(16)$ in $\xi_1(16m)$ über, folglich erhält man aus Gleichung (161)

$$(162)\qquad \frac{1-\xi_1(8m)^2}{1+\xi_1(8m)^2}=\left(\frac{1-\xi_1(16m)}{1+\xi_1(16m)}\right)^2=\left(\frac{1-\xi_1}{1+\xi_1}\right)^2,$$

oder

$$(163)\qquad \frac{\xi_3(8m)}{1+4\xi_3(8m)^2}=\xi_3{}^2.$$

Daraus folgt

$$(164)\qquad \xi_3(8m)=\frac{1}{8\xi_3^2}\left(1\pm\sqrt{1-16\xi_3{}^4}\right).$$

Kennt man also die Gleichung zwischen $\xi_3(8m)$ und J, so findet man hieraus auch ohne Weiteres die Gleichung zwischen ξ_3 und J.

Die zu ξ_1 und ξ_3 complementären Parameter sind bez.

$$(165)\begin{cases}\bar{\xi}_1=\dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{16m},\frac{\varpi'}{16m}\right)^4 Q\left(\frac{\varpi}{16m},\frac{\varpi'}{4m}\right)^2}{Q\left(\frac{\varpi}{16m},\frac{\varpi'}{8m}\right)^6}=\dfrac{2L(4)^2}{L(2)^6}=2\xi_2(16),\\[2ex] \bar{\xi}_3=\dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{16m},\frac{\varpi'}{4m}\right)^2 Q\left(\frac{\varpi}{16m},\frac{\varpi'}{m}\right)^4}{Q\left(\frac{\varpi}{16m},\frac{\varpi'}{2m}\right)^6}=\dfrac{L(16)^4\,(L(4)^2}{2L(8)^6}=\dfrac{\xi_1(16)}{2}.\end{cases}$$

Daraus ergiebt sich eine weit einfachere Darstellung. Es ist nämlich nach Gleichung (154)

$$(166)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = [1 - 16\xi_3(16)^4 + 16\xi_3(16)^8] \\ \qquad : [1 - 16\xi_3(16)^4 - 8\xi_3(16)^8]^2[1 - 8\xi_3(16)^4]^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_3(16)^{16}[1 - 16\,\xi_3(16)^4]. \end{cases}$$

Vertauscht man jetzt ϖ mit $\frac{\varpi}{16m}$, so geht J in $\overline{J}$ und $\xi_3(16)$ in $\frac{\xi_1}{2}$ über, folglich wird (genau wie in Gleichung (156))

$$(167)\quad \overline{J} : \overline{J} - 1 : 1 = (16 - 16\xi_1{}^4 + \xi_1{}^8)^3 : (32 - 32\xi_1{}^4 - \xi_1{}^8)^2(2 - \xi_1{}^4)^2 : 108\,\xi_1{}^{16}(1 - \xi_1{}^4).$$

Die beiden Gleichungen (166) und (167) geben die Transformation vom Grade $16m$, wenn man noch die Gleichung zwischen $\xi_3(16)$ und ξ_1 hinzufügt. Dies kann aber mit Hülfe der Gleichungen (162) und (163) leicht geschehen, denn es wird

$$(168)\quad \begin{cases} \dfrac{4\,\xi_3(16)}{1 + 4\,\xi_3(16)^2} = \left(\dfrac{1 - \xi_1(32)}{1 + \xi_1(32)}\right)^2, \\ \dfrac{1 - \xi_1(32)^2}{1 + \xi_1(32)^2} = \left(\dfrac{1 - \xi_1(64)}{1 + \xi_1(64)}\right)^2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

IV. Abschnitt.

Transformation vom Grade 3^α.

§ 17.

Transformation vom Grade 3.

Nach Gleichung (46) m. vor. Abh. war für ungerade Werthe von n, also für $n = 2m + 1$

$$(169)\quad \prod_{\alpha=1}^{m} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = (-1)^m f^{-3},$$

folglich wird für $n = 3$

$$(170)\quad \xi = L(3)^{12} = Q^{24} f(3)^{12} = \frac{Q^{24}}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)^4}$$

ein *Parameter*, und zwar ein Parameter mit dem Charakter 1, weil nach Gleichung (204) m. vor. Abh.

$$(171)\quad J : J - 1 : 1 = (\xi + 3)^3(\xi + 27) : (\xi^2 + 18\xi - 27)^2 : 1728\,\xi$$

wird. Der zu ξ complementäre Parameter ist $\frac{729}{\xi}$, folglich wird

$$(172)\quad \overline{J} : \overline{J} - 1 : 1 = (\xi + 243)^3(\xi + 27) : (\xi^2 - 486\,\xi - 19683)^2 : 1728\,\xi^3.$$

§ 18.

Transformation vom Grade 9.

Für $n = 9$ wird $\varrho = 0$ und n hat die drei Theiler 1, 3 und 9. Setzt man deshalb

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2},$$

so findet man aus Gleichung (126) die drei Gleichungen

$$(173) \qquad -6\delta_1 - 8\delta_2 = 24k_0, \quad 4\delta_1 = 24k_1, \quad 2\delta_1 + 8\delta_2 = 24k_2,$$

oder

$$(174) \qquad \delta_1 = 6k_1, \quad 2\delta_2 = -6k_0 - 9k_1.$$

Hieraus ergiebt sich nur ein einziger Parameter mit dem Charakter 1, nämlich

$$(175) \qquad \xi = L(9)^3 = \frac{g_2^3 - 27 g_3^2}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)}.$$

Dagegen giebt es drei Parameter mit dem Charakter 2, nämlich

$$(176) \qquad \xi_1 = \frac{L(9)^9}{L(3)^{12}}, \quad \xi_2 = \frac{L(9)^6}{L(3)^{12}}, \quad \xi_3 = \frac{L(9)^3}{L(3)^{12}}.$$

Dafür, dass ξ_2 ein Parameter ist, sind alle Bedingungen erfüllt. Deshalb sind dann auch

$$\xi_1 = \xi\xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_3 = \xi_2 : \xi$$

Parameter. Nun besteht zwischen ξ und ξ_1, bez. zwischen ξ und ξ_2 oder ξ und ξ_3 eine Gleichung von der Form

$$(a\xi^2 + b\xi + c)\xi_\alpha + (a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, a_1, b_1, c_1 sehr leicht durch die Entwickelung von ξ und ξ_α nach Potenzen von $h^{\frac{2}{9}} = z$ findet. Dies giebt

$$(177) \qquad \xi_1 = \frac{\xi^2}{\xi^2 + 9\xi + 27}, \quad \xi_2 = \frac{\xi}{\xi^2 + 9\xi + 27}, \quad \xi_3 = \frac{1}{\xi^2 + 9\xi + 27}.$$

Deshalb wird

$$(178) \qquad L(3)^{12} = \xi(3) = \frac{L(9)^3}{\xi_3} = \xi^3 + 9\xi^2 + 27\xi.$$

Die Gleichung (171) geht daher über in

$$(179) \qquad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\xi^3 + 9\xi^2 + 27\xi + 3)^3(\xi + 3)^3 \\ \qquad\qquad : (\xi^6 + 18\xi^5 + 135\xi^4 + 504\xi^3 + 891\xi^2 + 486\xi - 27)^2 \\ \qquad\qquad : 1728\xi(\xi^2 + 9\xi + 27). \end{cases}$$

Diese Gleichung kann man noch einfacher schreiben, wenn man der Kürze wegen

(180) $$\xi + 3 = \eta$$

setzt, dann wird nämlich

(179a) $$J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3 \eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27).$$

Der zu ξ complementäre Parameter ist

(181) $$\bar{\xi} = \frac{27}{\xi}, \quad \text{also} \quad \bar{\xi} + 3 = \bar{\eta} = \frac{3(\xi + 9)}{\xi} = \frac{3(\eta + 6)}{\eta - 3}.$$

Dadurch erhält man

(182) $$\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3 \bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\bar{\eta}^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27).$$

§ 19.

Transformation vom Grade 27.

Für $n = 27$ wird $\varrho = 1$ und n hat die Theiler 1, 3, 9 und 27. Setzt man also

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2} L(27)^{\delta_3},$$

so erhält man aus Gleichung (126) die vier Gleichungen

(183) $$\begin{cases} -18\delta_1 - 24\delta_2 - 26\delta_3 = 24k_0, \\ +12\delta_1 + 0 \quad - \quad 4\delta_3 = 24k_1, \\ +\ 4\delta_1 + 16\delta_2 + \ 4\delta_3 = 24k_2, \\ +\ 2\delta_1 + \ 8\delta_2 + 26\delta_3 = 24k_3, \end{cases}$$

oder

(184) $$\begin{cases} 6\delta_1 = -2k_0 + 10k_1 - 3k_2, \\ 6\delta_2 = +2k_0 - \quad k_1 + 12k_2, \\ 2\delta_3 = -2k_0 - \ 2k_1 - \ 3k_2. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass k_1 und k_2 durch 2 theilbar sein müssen. Ferner ist

$$6\delta_1 = -2(k_0 + k_1) + 12k_1 - 3k_2,$$

folglich muss $k_0 + k_1$ durch 3 theilbar sein. Deshalb giebt es nur zwei L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

(185) $$\xi_1 = \frac{L(9)}{L(3)^4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{L(27)^3 L(3)}{L(9)^4}.\text{*)}$$

Ausserdem findet man aber noch drei L-Producte mit dem Charakter 3, nämlich

(186) $$\xi_3 = L(9)^3, \quad \xi_4 = \frac{L(3)^3}{L(27)^3}, \quad \xi_5 = \frac{L(9)^4}{L(3)^4}.\text{**)}$$

*) $k_0 = 2$, $k_1 = -2$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ giebt die Grösse ξ_1,
$k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, $k_3 = +2$ „ „ „ ξ_2,

**) $k_0 = -3$, $k_1 = 0$, $k_2 = +2$, $k_3 = +1$ giebt die Grösse ξ_3,
$k_0 = +1$, $k_1 = +2$, $k_2 = 0$, $k_3 = -3$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = -1$, $k_1 = -2$, $k_2 = +2$, $k_3 = +1$ „ „ „ ξ_5.

Zum Beweise, dass diese fünf Grössen sämmtlich Parameter sind, beachte man zunächst, dass ξ_3 schon für die Transformation 9ten Grades ein Parameter war, folglich ist ξ_3 erst recht ein Parameter für die Transformation 27ten Grades. Ebenso ist ξ_5 ein Parameter, denn die Exponenten δ_1 und δ_2 sind gerade, k_0 und k_3 sind ganze Zahlen und

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Deshalb ist auch

$$\xi_1 = \frac{\xi_5}{\xi_3}$$

ein Parameter. Sodann ist

$$\xi_4 = \frac{f(3)^3}{Q^{72} f(27)^3} = \frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{\alpha=13} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{27}\right)}{Q^{72}\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)} = \frac{1}{Q^{72}} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=9} \wp'\left(\frac{2^\alpha \varpi}{27}\right) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=3} \wp'\left(\frac{2^\alpha\varpi}{9}\right);$$

ξ_4 ist also eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{27}\right)$, welche sich gar nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{2\varpi}{27}\right)$ mit $\wp\left(\frac{4\varpi}{27}\right)$ vertauscht, folglich ist ξ_4 eine cyklische Function von

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{27}\right), \wp\left(\frac{4\varpi}{27}\right), \ldots \wp\left(\frac{512\varpi}{27}\right)$$

und deshalb ein Parameter. Daraus folgt, dass auch

$$\xi_2 = \frac{1}{\xi_4 \xi_5}$$

ein Parameter ist; und zwar sind ξ_1 und ξ_2 *Parameter mit möglichst niedrigem Charakter.*

Zwischen ξ_1 und ξ_2 besteht nun eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)\xi_2^2 + (a_1\xi_1^2 + b_1\xi_1 + c_1)\xi_2 + (a_2\xi_1^2 + b_2\xi_1 + c_2) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ findet, indem man ξ_1 und ξ_2 nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{27}} = z$ entwickelt. Es wird nämlich

$$\xi_1 = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{9}\right) Q(\omega, \omega')^3}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{3}\right)^4} = z^2(1 - z^3 - z^6 + 4z^9 + \cdots),$$

$$\xi_2 = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{27}\right)^3 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{3}\right)}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{9}\right)^4} = 1 - 3z + 0 + 9z^3 - 12z^4 + 0 + 27z^6 - 42z^7 + 0 \\ + 81z^9 - 108z^{10} + \cdots.$$

Daraus ergiebt sich

(187) $$(9\xi_1^2 + 3\xi_1 + 1)\xi_2^2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 - 2)\xi_2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 + 1) = 0,$$

oder

(187 a) $$\xi_2 = \frac{2 + 6\xi_1 - 9\xi_1^2 - 3w}{2(1 + 3\xi_1 + 9\xi_1^2)},$$

wobei

(188) $$w = +\sqrt{\xi_1(4-27\xi_1^3)} = 2z + \cdots.$$

Das Vorzeichen der Wurzel w ist in Gleichung (187a) durch die Entwickelung nach Potenzen von z bestimmt.

Nach Gleichung (178) war

$$L(3)^{12} = L(9)^9 + 9L(9)^6 + 27L(9)^3,$$

oder

$$\frac{L(3)^{12}}{L(9)^3} = L(9)^6 + 9L(9)^3 + 27,$$

oder, wenn man die in den Gleichungen (185) und (186) gegebenen Bezeichnungen anwendet,

(189) $$\frac{1}{\xi_1^3} = \xi_3^2 + 9\xi_3 + 27, \quad \xi_3 = \frac{-9\xi_1^2+w}{2\xi_1^2}.$$

Das Vorzeichen von w findet man wieder durch Reihenentwickelung.

Zwischen ξ_1 und ξ_4 besteht eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_1^3+b\xi_1^2+c\xi_1+d)\xi_4^2+(a_1\xi_1^3+b_1\xi_1^2+c_1\xi_1+d_1)\xi_4$$
$$+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten wieder durch Reihenentwickelung leicht bestimmen kann. Dies giebt

(190) $$(3\xi_1-1)^3\xi_4^2 - 3\xi_1(3\xi_1-2)\xi_4 + \xi_1 = 0,$$

oder

(190a) $$\xi_4 = \frac{3\xi_1(3\xi_1-2)-w}{2(3\xi_1-1)^3}, \quad \frac{1}{\xi_4} = \frac{3\xi_1(3\xi_1-2)+w}{2\xi_1},$$

(191) $$\xi_5 = \xi_1\xi_3 = \frac{-9\xi_1^2+w}{2\xi_1}.$$

Nun ist

(192) $$\xi(9) = L(9)^3 = \xi_3, \quad \xi(9)+3 = \xi_3+3 = \eta = \frac{-3\xi_1^2+w}{2\xi_1^2},$$

folglich erhält man nach Gleichung (179a)

(193) $$J : J-1 : 1 = (\eta^3-24)^3\eta^3 : (\eta^6-36\eta^3+216)^2 : 1728(\eta^3-27).$$

Der zu η complementäre Parameter heisse $\bar\eta$, dann wird

(194) $$\bar J : \bar J - 1 : 1 = (\bar\eta^3-24)^3\bar\eta^3 : (\bar\eta^6-36\bar\eta^3+216)^2 : 1728(\bar\eta^3-27),$$

wobei

(195) $$\bar\eta = 27\xi_4 + 3 = \frac{3[54\xi_1^3+27\xi_1^2-36\xi_1-2-9w]}{2(3\xi_1-1)^3}.$$

Da die Parameter η und $\bar\eta$ beide als rationale Functionen von ξ_1 und w dargestellt sind, so geben die Gleichungen (193) und (194) schon die Beziehung zwischen J und $\bar J$. Man kann aber auch noch die Gleichung angeben, welche zwischen η und $\bar\eta$ besteht. Nach den Gleichungen (189) und (190a) ist nämlich

$$\xi_3 + 9 = \frac{9\xi_1^2+w}{2\xi_1^2}, \quad \frac{1}{\xi_4} + 3 = \frac{3\xi_4+1}{\xi_4} = \frac{9\xi_1^2+w}{2\xi_1},$$

folglich ist

$$\frac{3\xi_4+1}{\xi_4} = \xi_1(\xi_3+9), \quad \text{oder} \quad \xi_4 = \frac{1}{\xi_1(\xi_3+9)-3}.$$

Nun wird aber nach Gleichung (189)

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\xi_3^2+9\xi_3+27}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}},$$

also

$$(196)\quad \xi_4 = \frac{\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}}{\eta+6-3\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}}, \quad \bar{\eta} = \frac{3\left[\eta+6+6\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}\right]}{\eta+6-3\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}},$$

oder

$$(196\text{a})\qquad (\eta+6)^3(\bar{\eta}-3)^3 = 27(\eta^2+3\eta+9)(\bar{\eta}+6)^3.$$

Durch Elimination von η aus den Gleichungen (192) und (193) erhält man auch eine Gleichung zwischen J und ξ_1, welche in Bezug auf J nur vom zweiten Grade ist, nämlich

$$(197)\quad \begin{cases} 12^6\xi_1^{15}(27\xi_1^3-1)J^2+2^6\cdot 3^5(729\xi_1^{18}-4536\xi_1^{15}+7458\xi_1^{12} \\ \qquad\qquad -3186\xi_1^9-108\xi_1^6+89\xi_1^3-3)J \\ \qquad\qquad +(9\xi_1^9-27\xi_1^6+27\xi_1^3-1)^3(9\xi_1^3-1)^3 = 0. \end{cases}$$

Ebenso findet man aus den Gleichungen (194) und (195) durch Elimination von $\bar{\eta}$ eine Gleichung zwischen $\bar{J}$ und ξ_1, welche in Bezug auf $\bar{J}$ gleichfalls nur vom zweiten Grade ist. Ihre Herleitung ist aber überflüssig, weil die Gleichungen (193), (194) und (196) für die Anwendungen bequemer sind.

Schliesslich ist noch

$$(198)\quad \begin{cases} L(3)^{12} = \xi_3^3+9\xi_3^2+27\xi_3 = \dfrac{-9\xi_1^2+w}{2\xi_1^5}, \quad L(9)^3 = \xi_3, \\ \qquad L(27)^{12} = \dfrac{\xi_3}{\xi_1^3\xi_4^4}. \end{cases}$$

§ 20.

Transformation vom Grade 81.

Für $n=81$ ist $\varrho = 4$ und n hat die Theiler 1, 3, 9, 27 und 81. Setzt man also

$$\xi = L(3)^{\delta_1}L(9)^{\delta_2}L(27)^{\delta_3}L(81)^{\delta_4},$$

so erhält man aus den Gleichungen (126) die fünf Gleichungen

$$(199)\quad \begin{cases} -54\delta_1-72\delta_2-78\delta_3-80\delta_4 = 24k_0, \\ +36\delta_1+\ 0\ -12\delta_3-16\delta_4 = 24k_1, \\ +12\delta_1+48\delta_2+12\delta_3+\ 0\ = 24k_2, \\ +\ 4\delta_1+16\delta_2+52\delta_3+16\delta_4 = 24k_3, \\ +\ 2\delta_1+\ 8\delta_2+26\delta_3+80\delta_4 = 24k_4, \end{cases}$$

oder

$$(200)\quad \begin{cases} 18\delta_1 = -2k_0 + 10k_1 - 3k_2 + 0, \\ 18\delta_2 = 0 - 3k_1 + 10k_2 - 3k_3, \\ 18\delta_3 = +2k_0 + 2k_1 - k_2 + 12k_3, \\ 6\delta_4 = -2k_0 - 2k_1 - 2k_2 - 3k_3. \end{cases}$$

Hieraus findet man nur *ein* L-Product ξ mit dem Charakter 3, nämlich

$$(201)\quad \xi = \frac{L(3)}{L(27)}, \text{*)}$$

ausserdem erhält man noch 5 L-Producte ξ mit dem Charakter 6, nämlich

$$(202)\quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{L(9)}{L(3)^4}, \quad \xi_2 = \frac{L(27)^3 L(3)}{L(9)^4}, \quad \xi_3 = \frac{L(27)^2 L(3)^2}{L(9)^4}, \\ \xi_4 = \frac{L(27) L(3)^3}{L(9)^4}, \quad \xi_5 = \frac{L(81)^3 L(9)}{L(27)^4}. \text{**)} \end{cases}$$

Die Grössen ξ_1 und ξ_2 waren schon Parameter für $n = 27$, folglich sind sie es auch für $n = 81$. Ebenso ist ξ_3 ein Parameter, denn die Exponenten δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 sind *gerade*, k_0 und k_4 sind ganze Zahlen, und es ist

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Deshalb sind auch

$$\xi = \frac{\xi_3}{\xi_2} \quad \text{und} \quad \xi_4 = \frac{\xi_3^2}{\xi_2} = \xi\xi_3$$

Parameter, und zwar ist ξ ein *Parameter mit möglichst niedrigem Charakter.* Endlich ist auch

$$\xi_5 = L(81)^3 \cdot \xi^4 \xi_1$$

ein Parameter, denn es ist, wie man leicht zeigen kann,

$$L(81)^3 = Q^{240} f(81)^3 = \frac{Q^{240}}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\alpha=40} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{81}\right)}$$

eine cyklische Function der 27 Grössen

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{81}\right), \quad \wp\left(\frac{4\varpi}{81}\right), \quad \wp\left(\frac{8\varpi}{81}\right), \quad \cdots \wp\left(\frac{2^{27}\varpi}{81}\right)$$

und deshalb ein Parameter (mit dem Charakter 12).

---

*) $k_0 = +1$, $k_1 = +2$, $k_2 = 0$, $k_3 = -2$, $k_4 = -1$ giebt die Grösse ξ.

**) $k_0 = +6$, $k_1 = -6$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4 = 0$ giebt die Grösse ξ_1
$k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -6$, $k_3 = +4$, $k_4 = +2$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +1$, $k_1 = +2$, $k_2 = -6$, $k_3 = +2$, $k_4 = +1$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = +2$, $k_1 = +4$, $k_2 = -6$, $k_3 = 0$, $k_4 = 0$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = -6$, $k_4 = +6$ „ „ „ ξ_5.

Da
$$\xi_1(81) = \xi_1(27) \quad \text{und} \quad \xi_2(81) = \xi_2(27),$$
so gilt auch hier noch die Gleichung (187), nämlich

(203) $(9\xi_1^2 + 3\xi_1 + 1)\xi_2^2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 - 2)\xi_2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 + 1) = 0.$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{3}$, so geht ξ_1 in ξ_4 und ξ_2 in ξ_5 über, folglich gilt auch die Gleichung

(204) $(9\xi_4^2 + 3\xi_4 + 1)\xi_5^2 + (9\xi_4^2 - 6\xi_4 - 2)\xi_5 + (9\xi_4^2 - 6\xi_4 + 1) = 0.$

Ferner ist nach Gleichung (186)

(205) $$\xi^3 = \xi_4(27),$$

deshalb geht die Gleichung (190) über in

(206) $$(3\xi_1 - 1)^3\xi^6 - 3\xi_1(3\xi_1 - 2)\xi^3 + \xi_1 = 0.$$

Um die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ zu erhalten, setze man

(207) $$P_2 = L(9)^3, \quad P_3 = \frac{L(27)^3}{L(3)^3}, \quad P_4 = \frac{L(81)^3}{L(9)^3},$$

dann ist P_2 gleich $\xi_3(27)$ und P_3 ist gleich $\frac{1}{\xi_4(27)}$, folglich wird nach Gleichung (196)

(208) $$P_3 = -3 + \frac{P_2 + 9}{\sqrt[3]{P_2^2 + 9P_2 + 27}},$$

oder

(208 a) $$(P_3 + 3)^3(P_2^2 + 9P_2 + 27) = (P_2 + 9)^3.$$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{3}$, so geht P_2 in P_3 und P_3 in P_4 über, deshalb wird

(209) $$P_4 = -3 + \frac{P_3 + 9}{\sqrt[3]{P_3^2 + 9P_3 + 27}}.$$

Nach Gleichung (179 a) oder (193) ist nun

(210) $J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3\eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27),$

wobei

(211) $$\eta = P_2 + 3$$

ist. Der zu η complementäre Parameter ist

(212) $$\bar{\eta} = \frac{27}{P_4} + 3,$$

so dass $\bar{\eta}$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (208), (209), (211) und (212) als irrationale Function von η darstellbar ist. Es wird dann wieder

(213) $\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3\bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\bar{\eta}^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27).$

§ 21.

Transformation vom Grade 243.

Für $n = 243$ wird $\varrho = 19$ und n hat die Theiler $1, 3, 9, 27, 81, 243$. Setzt man also

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2} L(27)^{\delta_3} L(81)^{\delta_4} L(243)^{\delta_5},$$

so erhält man aus Gleichung (126) die sechs Gleichungen

$$(214)\quad \begin{cases} -162\delta_1 - 216\delta_2 - 234\delta_3 - 240\delta_4 - 242\delta_5 = 24k_0, \\ +108\delta_1 + 0 - 36\delta_3 - 48\delta_4 - 52\delta_5 = 24k_1, \\ +36\delta_1 + 144\delta_2 + 36\delta_3 + 0 - 12\delta_5 = 24k_2, \\ +12\delta_1 + 48\delta_2 + 156\delta_3 + 48\delta_4 + 12\delta_5 = 24k_3, \\ +4\delta_1 + 16\delta_2 + 52\delta_3 + 160\delta_4 + 52\delta_5 = 24k_4, \\ +2\delta_1 + 8\delta_2 + 26\delta_3 + 80\delta_4 + 242\delta_5 = 24k_5, \end{cases}$$

oder

$$(215)\quad \begin{cases} 54\delta_1 = -2k_0 + 10k_1 - 3k_2 + 0 + 0, \\ 54\delta_2 = 0 - 3k_1 + 10k_2 - 3k_3 + 0, \\ 54\delta_3 = 0 + 0 - 3k_2 + 10k_3 - 3k_4, \\ 54\delta_4 = +2k_0 + 2k_1 + 2k_2 - k_3 + 12k_4, \\ 18\delta_5 = -2k_0 - 2k_1 - 2k_2 - 2k_3 - 3k_4. \end{cases}$$

Hieraus findet man einen Parameter

$$(216)\quad \xi = \frac{L(81)}{L(9)}$$

mit dem Charakter 9, während $\frac{1}{2}(\varrho + 3) = 11$ ist. Ausserdem erhält man eine ganze Reihe von Parametern mit dem Charakter 18; solche Parameter entstehen z. B. durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{3}$ aus den Parametern mit dem Charakter 6 für die Transformation vom Grade 81.

Um die Beziehung zwischen J und $\overline{J}$ anzugeben, genügt das Folgende. Es sei wieder wie in Gleichung (207)

$$P_2 = L(9)^3, \quad P_3 = \frac{L(27)^3}{L(3)^3}, \quad P_4 = \frac{L(81)^3}{L(9)^3}$$

und

$$(217)\quad P_5 = \frac{L(243)^3}{L(27)^3},$$

dann wird

$$(218)\quad P_{\nu+1} = -3 + \frac{P_\nu + 9}{\sqrt[3]{P_\nu^2 + 9P_\nu + 27}}$$

für $\nu = 2, 3, 4$. Setzt man jetzt noch

$$\eta = P_2 + 3, \quad \bar{\eta} = \frac{27}{P_5} + 3,$$

so gelten wieder die beiden Gleichungen

$$(219) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3 \eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27), \\ \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3 \bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\bar{\eta}^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27). \end{cases}$$

§ 22.

Transformation vom Grade 3^α.

Die Methode, welche in den vorstehenden Paragraphen zum Ziele führte, kann auch ganz allgemein für die Transformation vom Grade 3^α benutzt werden. Es sei also

$$(220) \qquad P_2 = L(9)^3, \quad P_3 = \frac{L(27)^3}{L(3)^3}, \cdots P_\alpha = \frac{L(3^\alpha)^3}{L(3^{\alpha-2})^3},$$

$$(221) \qquad \eta = P_2 + 3, \quad \bar{\eta} = \frac{27}{P_\alpha} + 3,$$

dann gilt für $\nu = 2, 3, 4, \cdots \alpha - 1$ die Gleichung

$$(222) \qquad P_{\nu+1} = -3 + \frac{P_\nu + 9}{\sqrt[3]{P_\nu^2 + 9P_\nu + 27}},$$

und es wird

$$(223) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3 \eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27), \\ \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3 \bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27). \end{cases}$$

Die bei dieser Transformation nothwendigen irrationalen Operationen sind auf die Ausziehung von $\alpha - 3$ Cubikwurzeln beschränkt.

V. Abschnitt.

Transformation vom Grade a^α, wenn a eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$ ist.

§ 23.

Transformation vom Grade a.

Ist a eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, so hat man hier vier Fälle zu unterscheiden, nämlich

$$\text{I. } a = 12\nu + 1, \quad \text{II. } a = 12\nu + 5, \quad \text{III. } a = 12\nu + 7,$$
$$\text{IV. } a = 12\nu + 11.$$

I. Für $a = 12\nu + 1$ wird $\varrho = \nu - 1$ und

(224) $$\xi = L(a)^2$$

ist ein Parameter mit dem Charakter $\nu = \varrho + 1$. Es ist hier nämlich

$$S(a, D) = 2(t_1^2 - a),$$

woraus sich

(225) $$2(1 - a) = -24\nu = 24k_0, \qquad 2(a - 1) = +24\nu = 24k_1$$

ergiebt. Die Gleichung zwischen ξ und J ist bereits in m. vor. Abh. untersucht worden. Der zu ξ complementäre Parameter ist

(226) $$\bar{\xi} = \frac{a}{\xi},$$

so dass die Gleichungen

$$F(\xi, J) = 0 \quad \text{und} \quad F\left(\frac{a}{\xi}, \bar{J}\right) = 0$$

die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ vermitteln. (Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (148) für $a = 13$).

II. Für $a = 12\nu + 5$ wird $\varrho = \nu$ und es besteht eine Transformationsgleichung zwischen $f(a)^2$ und g_2; es besteht also auch eine ihr entsprechende Gleichung zwischen $L(a)^2$ und $\gamma_2 = \sqrt[3]{J}$. Die Grösse $L(a)^2$ ist aber *kein* Parameter, sondern erst

(227) $$\xi = L(a)^6,$$

und zwar hat ξ den Charakter

$$3\nu + 1 = 3\varrho + 1,$$

denn hier ist

$$S(a, D) = 6(t_1^2 - a),$$

$$6(1 - a) = -24(3\nu + 1) = 24k_0, \quad 6(a - 1) = 24(3\nu + 1) = 24k_1.$$

Für $a = 5$ wird $\nu = 0$ und der Charakter von ξ gleich 1; aber für alle übrigen Werthe von a und ν muss es Parameter geben, deren Charakter noch bedeutend niedriger ist als der von ξ.

Dieser Uebelstand wird einerseits dadurch ausgeglichen, dass schon zwischen $\xi^{\frac{1}{3}}$ und $J^{\frac{1}{3}} = \gamma_2$ eine Gleichung besteht. Es ist aber auch hier die Bildung von Parametern mit niedrigerem Charakter möglich, wenn man nicht die Transformation a^{ten} Grades zum Ausgangspunkte wählt, sondern die Transformation vom Grade ab.

(Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (145) für $n = 5$, Gleichung (149) für $a = 17$ und Gleichung (152) für $a = 29$).

III. Für $a = 12\nu + 7$ wird $\varrho = \nu$, und es besteht eine Transformationsgleichung zwischen $f(a)^2$ und g_3; es besteht also auch eine ihr entsprechende Gleichung zwischen $L(a)^2$ und $\gamma_3 = \left(\frac{J-1}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. Die Grösse $L(a)^2$ ist auch hier *kein* Parameter, sondern erst

$$\xi = L(a)^4, \tag{228}$$

und zwar hat ξ den Charakter

$$2\nu + 1 = 2\varrho + 1,$$

denn hier ist

$$S(a, D) = 4(t_1^2 - a),$$

$$4(1-a) = -24(2\nu+1) = 24k_0, \quad 4(a-1) = 24(2\nu+1) = 24k_1.$$

Für $a = 7$ wird $\nu = 0$ und der Charakter von ξ gleich 1; aber auch hier muss es für alle übrigen Werthe von a Parameter geben, deren Charakter niedriger ist als der von ξ. Ein Ausgleich dieses Uebelstandes findet in ähnlicher Weise statt wie im zweiten Falle.

(Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (146) für $a = 7$ und Gleichung (150) für $a = 19$).

IV. Für $a = 12\nu + 11$ wird $\varrho = \nu + 1$, und es besteht eine Transformationsgleichung zwischen $f(a)^2$, g_2 und g_3. Dagegen ist $L(a)^2$ *kein* Parameter, sondern erst

$$\xi = L(a)^{12}, \tag{229}$$

und zwar hat ξ den Charakter

$$6\nu + 5 = 6\varrho - 1,$$

denn es ist

$$S(a, D) = 12(t_1^2 - a),$$

$$12(1-a) = -24(6\nu+5) = -24k_0, \quad 12(a-1) = 24(6\nu+5) = 24k_1.$$

Hier ist also ξ nicht einmal für $\nu = 0$ ein Parameter mit niedrigstem Charakter. Ein Ausgleich dieses Uebelstandes findet in ähnlicher Weise statt wie beim zweiten und dritten Falle; in § 34 wird sogar gezeigt werden, wie man mit Hülfe der Transformation 22ten Grades einen Parameter mit niedrigstem Charakter für die Transformation 11ten Grades bilden kann.

(Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (147) für $a = 11$ und Gleichung (151) für $a = 23$).

§ 24.

Transformation vom Grade a^2.

Ist

$$n = a^2 = (6l \pm 1)^2 = 12l(3l \pm 1) + 1,$$

so ist $n - 1$ immer durch 24 theilbar, und deshalb ist

$$\xi = L(n) = Q^{n-1} f(n) \tag{230}$$

immer ein Parameter. Wie nämlich schon in § 23 meiner vor. Abh. gezeigt wurde, ist $f(n)$ in diesem Falle, wo $n = a^2$, die Wurzel einer Transformationsgleichung, folglich gilt dasselbe von

$$L(n) = (g_2^3 - 27 g_3^2)^{\frac{n-1}{24}} f(n).$$

Hierbei wird

$$S(n, D) = t_2^2 - a^2$$

und deshalb

$$(231) \qquad k_0 = -\frac{l(3l \pm 1)}{2}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = +\frac{l(3l \pm 1)}{2},$$

so dass der Parameter ξ den Charakter

$$(232) \qquad ch = \tfrac{1}{2}\, l(3l \pm 1)$$

hat. Der Grad der Invariantengleichung dagegen ist in Bezug auf J und $\overline{J}$

$$T(n) = (n+1)\, n = 24\, ch + n + 1.$$

Durch Einführung des Parameters ξ wird also der Grad der benutzten Gleichungen um mehr als das 24-fache erniedrigt.

Der Charakter dieses Parameters ist auch in allen Fällen nur wenig verschieden von dem niedrigsten Grade, den ein Parameter für den zugehörigen Werth von n überhaupt haben kann. Hierbei hat man acht Fälle zu unterscheiden, die sich aus der folgenden Tabelle ergeben:

(233)

n	ϱ	ch	$ch - \frac{1}{2}(\varrho+2)$	$ch - \frac{1}{2}(\varrho+3)$
$(24\nu+1)^2$	$48\nu^2 - 6\nu - 1$	$24\nu^2 + 2\nu$		$5\nu - 1$
$(24\nu+5)^2$	$48\nu^2 + 10\nu$	$24\nu^2 + 10\nu + 1$	5ν	
$(24\nu+7)^2$	$48\nu^2 + 18\nu + 1$	$24\nu^2 + 14\nu + 2$		5ν
$(24\nu+11)^2$	$48\nu^2 + 34\nu + 6$	$24\nu^2 + 22\nu + 5$	$5\nu + 1$	
$(24\nu+13)^2$	$48\nu^2 + 42\nu + 8$	$24\nu^2 + 26\nu + 7$	$5\nu + 2$	
$(24\nu+17)^2$	$48\nu^2 + 58\nu + 17$	$24\nu^2 + 34\nu + 12$		$5\nu + 2$
$(24\nu+19)^2$	$48\nu^2 + 66\nu + 22$	$24\nu^2 + 38\nu + 15$	$5\nu + 3$	
$(24\nu+23)^2$	$48\nu^2 + 82\nu + 35$	$24\nu^2 + 46\nu + 22$		$5\nu + 3$

Beispiele.

(234)

n	ϱ	ch	$ch-\frac{1}{2}(\varrho+2)$	$ch-\frac{1}{2}(\varrho+3)$
$5^2=25$	0	1		
$7^2=49$	1	2		
$11^2=121$	6	5	1	
$13^2=169$	8	7	2	
$17^2=289$	17	12		2
$19^2=361$	22	15	3	
$23^2=529$	35	22		3
$29^2=841$	58	35	5	
$31^2=961$	67	40		5
$37^2=1369$	98	57	7	
$59^2=3481$	266	145	11	
$73^2=5329$	413	222		14

§ 25.

Transformation vom Grade 25 und 49.

In § 25 m. vor. Abhandlung wurde schon die Transformation vom Grade 25 ausgeführt, und zwar ist nach Gleichung (177a) und (179)

$$(235)\quad \begin{cases} J:J-1:1=[L(5)^{12}+10L(5)^6+5]^3 \\ \qquad\qquad :[L(5)^{12}+22L(5)^6+125][L(5)^{12}+4L(5)^6-1]^2 \\ \qquad\qquad :1728\,L(5)^6 \end{cases}$$

und

$$(236)\quad L(5)^6=\xi^5+5\xi^4+15\xi^3+25\xi^2+25\xi=\eta^5+5\eta^3+5\eta-11,$$

wobei

$$\eta=\xi+1=L(25)+1$$

gesetzt worden ist. Dies giebt nach Gleichung (180a) m. vor. Abh.

$$(237)\quad \begin{cases} J:J-1:1=(\eta^{10}+10\eta^8+35\eta^6-12\eta^5+50\eta^4-60\eta^3+25\eta^2-60\eta+16)^3 \\ \qquad :(\eta^2+4)(\eta^4+3\eta^2+1)^2 \\ \qquad \times(\eta^{10}+10\eta^8+35\eta^6-18\eta^5+50\eta^4-90\eta^3+25\eta^2-90\eta+76)^2 \\ \qquad :1728(\eta^5+5\eta^3+5\eta-11). \end{cases}$$

Die zu ξ und η complementären Parameter sind

$$(238) \qquad \bar{\xi} = \frac{5}{\xi} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{\xi + 5}{\xi} = \frac{\eta + 4}{\eta - 1},$$

so dass zwischen $\bar{J}$ und $\bar{\eta}$ dieselbe Gleichung besteht wie zwischen J und η. Da aber $\bar{\eta}$ eine rationale Function von η ist, so kann man J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von η darstellen.

Für $n = 49$ wird $\varrho = 1$. Auch für diesen Fall sind schon in § 26 m. vor. Abh. die wichtigsten Formeln angegeben. Nach Gleichung (185a) daselbst erhält man nämlich, wenn man $L(7) = x$ setzt,

$$(239) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (x^8 + 13x^4 + 49)(x^8 + 5x^4 + 1)^3 \\ \qquad\qquad : (x^{16} + 14x^{12} + 63x^8 + 70x^4 - 7)^2 : 1728x^4 \end{cases}$$

und

$$(240) \qquad x^8 - 7(\xi^3 + 5\xi^2 + 7\xi)\, x^4 \\ - (\xi^7 + 7\xi^6 + 21\xi^5 + 49\xi^4 + 147\xi^3 + 343\xi^2 + 343\xi) = 0,$$

oder

$$(240\text{a}) \quad 2x^4 = 7(\xi^3 + 5\xi^2 + 7\xi) + (\xi^2 + 7\xi + 7)\sqrt{\xi(4\xi^2 + 21\xi + 28)}.$$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{49}$, so geht J in $\bar{J}$,

$$(241) \quad \xi \text{ in } \bar{\xi} = \frac{7}{\xi} \quad \text{und} \quad w = \sqrt{\xi(4\xi^2 + 21\xi + 28)} \ \text{ in } \ \bar{w} = \pm \frac{7w}{\xi^2}$$

über. Deshalb ist es jetzt leicht J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von ξ und w darzustellen. Dabei wird das Vorzeichen von w durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von h bestimmt.

§ 26.

Transformation vom Grade a^3.

Setzt man für $n = a^3$

$$(242) \qquad \xi = \frac{L(a^3)}{L(a)},$$

so wird

$$S(n, D) = -a^2(t_1^2 - a) + t_3^2 - a^3 = t_3^2 - a^2 t_1^2;$$

deshalb findet man aus der Gleichung (126) die vier Gleichungen

$$1 - a^2 = 24k_0, \quad (a-1)(1-a^2) = 24k_1, \quad 0 = 24k_2, \quad a(a^2-1) = 24k_3,$$

oder

$$(243) \quad \begin{cases} k_0 = -\frac{1}{2}\, l(3l \pm 1), \quad k_1 = -\frac{a-1}{2}\, l(3l \pm 1), \\ k_2 = 0, \quad k_3 = \frac{a}{2}\, l(3l \pm 1). \end{cases}$$

Der Charakter von ξ ist daher

$$ch = \frac{a}{2}\, l(3l \pm 1) = \frac{a(a^2-1)}{24}. \tag{244}$$

Bildet man nun bei der Transformation vom Grade a^2 die Gleichung, welche zwischen $L(a)$ und $L(a^2)$ besteht, also die Gleichung

$$F(L(a),\, L(a^2)) = 0, \quad \text{oder} \quad F\left(\frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')},\, \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a^2}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}\right) = 0, \tag{245}$$

und vertauscht man in dieser Gleichung ϖ mit $\frac{\varpi}{a}$, so erhält man die Gleichung

$$F\left(\frac{L(a)^2}{L(a)},\, \xi\right) = 0. \tag{246}$$

Indem man noch aus diesen beiden letzten Gleichungen die Grösse $L(a)$ eliminirt, findet man die Gleichung

$$G(L(a^2),\, \xi)) = 0. \tag{247}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man die Transformation vom Grade a^3 in folgender Weise ausführen. Setzt man der Kürze wegen

$$L(a^2) = P_2, \quad \frac{L(a^3)}{L(a)} = P_3, \tag{248}$$

so erhält man bei der Transformation vom Grade a^2 die Gleichung

$$H(J, P_2) = 0, \tag{249}$$

die in Bezug auf P_2 vom Grade $a(a+1)$ und in Bezug auf J vom Grade $\frac{a^2-1}{24}$ ist. Vertauscht man jetzt ϖ mit $\frac{\varpi}{a^3}$, so geht J in $\overline{J}$ und

$$P_2 = \frac{Q\left(\varpi, \frac{\varpi'}{a^2}\right)}{Q(\varpi, \varpi')} \quad \text{in} \quad \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a^3}, \frac{\varpi'}{a^2}\right)}{Q\left(\frac{\varpi}{a^3}, \varpi'\right)} = \frac{a\dot{Q}\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)}{Q\left(\frac{\varpi}{a^3}, \varpi'\right)} = \frac{a}{P_3}$$

über. Deshalb vermitteln die drei Gleichungen

$$H(J, P_2) = 0, \quad H\left(\overline{J}, \frac{a}{P_3}\right) = 0, \quad G(P_2, P_3) = 0 \tag{250}$$

verhältnissmässig einfach die Beziehung zwischen J und $\overline{J}$.

Dabei ist der Charakter von $\xi = P_3$ noch kleiner als $\frac{1}{2}(\varrho + 2)$ bez. als $\frac{1}{2}(\varrho + 3)$, wie man aus der folgenden Tabelle erkennt:

	n	ϱ	$\frac{1}{2}(\varrho+2)-ch$	$\frac{1}{2}(\varrho+3)-ch$
	$a^3=(24\nu+1)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a-2)$		$\nu(a-10)+1$
	$a^3=(24\nu+5)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+6)$	$\nu(a-6)$	
	$a^3=(24\nu+7)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+4)$	$\nu(a-4)$	
(251)	$a^3=(24\nu+11)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+12)$		$\nu a+2$
	$a^3=(24\nu+13)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a-2)$	$\nu(a+2)+2$	
	$a^3=(24\nu+17)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+6)$		$\nu(a+6)+6$
	$a^3=(24\nu+19)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+4)$		$\nu(a+8)+8$
	$a^3=(24\nu+23)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+12)$	$\nu(a+12)+13$	

Beispiele.

	n	ϱ	ch	$\frac{1}{2}(\varrho+2)-ch$	$\frac{1}{2}(\varrho+3)-ch$
	125	8	5	0	
	343	26	14	0	
(252)	1331	111	55		2
	2197	184	91	2	
	4913	417	204		6
	6859	583	285		8
	12167	1036	506	13	

§ 27.

Transformation vom Grade 125.

Für $n = 125$ ist $\varrho = 8$ und

(253) $$P_2 = L(25), \quad P_3 = \frac{L(125)}{L(5)};$$

dann wird nach Gleichung (236)

(254) $$L(5)^6 = P_2^5 + 5P_2^4 + 15P_2^3 + 25P_2^2 + 25P_2.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung ϖ mit $\frac{\varpi}{5}$, so geht sie über in

$$P_2^6 : L(5)^6 = P_3^5 + 5P_3^4 + 15P_3^3 + 25P_3^2 + 25P_3,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (254)

$$(255)\qquad \begin{cases} P_2^5 : (P_2^4 + 5P_2^3 + 15P_2^2 + 25P_2 + 25) \\ = P_3^5 + 5P_3^4 + 15P_3^3 + 25P_3^2 + 25P_3. \end{cases}$$

Setzt man jetzt wieder

$$P_2 + 1 = \eta,$$

so gilt zwischen J und η die Gleichung (237). Der zu η complementäre Parameter ist aber in diesem Falle

$$(256)\qquad \bar{\eta} = \frac{5}{P_3} + 1 = \frac{P_3 + 5}{P_3}.$$

Jetzt ist $\bar{J}$ dieselbe rationale Function von $\bar{\eta}$ wie J von η nach Gleichung (237), und zwischen η und $\bar{\eta}$ besteht eine Gleichung, welche aus Gleichung (255) hervorgeht, indem man

$$(257)\qquad P_2 = \eta - 1, \quad P_3 = \frac{5}{\bar{\eta} - 1}$$

setzt. Diese Gleichung ist in Bezug auf jede dieser beiden Grössen vom 5ten Grade und heisst

$$(258)\qquad (\eta - 1)^5 (\bar{\eta} - 1)^5$$
$$= 125(\eta^4 + \eta^3 + 6\eta^2 + 6\eta + 11)(\bar{\eta}^4 + \bar{\eta}^3 + 6\bar{\eta}^2 + 6\bar{\eta} + 11).$$

§ 28.

Transformation vom Grade a^α.

Die Transformation vom Grade a^3 ist in § 26 in ganz ähnlicher Weise ausgeführt wie in § 19 die Transformation 27ten Grades, nur gestaltet sich die Rechnung für $n = a^3$ insofern einfacher, als schon $L(a^3) : L(a)$ selbst ein Parameter wird, wenn $a = 6l \pm 1$ ist, während für $a = 3$ erst $L(a^3)^3 : L(a)^3$ ein Parameter wird. Wie aber aus der Transformation 27ten Grades die Regeln für die Transformation vom Grade 3^α hergeleitet wurden, so findet man jetzt auch aus der Transformation vom Grade a^3 die Regeln für die Transformation vom Grade a^α. Setzt man nämlich

$$(259)\qquad P_2 = L(a^2), \quad P_3 = \frac{L(a^3)}{L(a)}, \; \cdots \; P_\alpha = \frac{L(a^\alpha)}{L(a^{\alpha-2})},$$

so gelten die Gleichungen

$$(260)\qquad H(J, P_2) = 0, \quad H\left(\overline{J}, \frac{a}{P_a}\right) = 0, \quad G(P_\nu, P_{\nu+1}) = 0$$

für $\nu = 2, 3, \cdots a - 1$. Dabei haben die Functionen $G(P_\nu, P_{\nu+1})$ und $H(J, P_2)$ genau dieselbe Bedeutung wie in den Gleichungen (250).

VI. Abschnitt.

Transformation vom Grade $2a$.

§ 29.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $2a$.

Ist $n = 2a$ und hat die Primzahl a die Form $4c \pm 1$, so ist der Rang ϱ gleich $c - 1$. Setzt man in diesem Falle

$$(261)\qquad \xi = L(2)^{\delta_1} L(a)^{\delta_2} L(2a)^{\delta_3},$$

so wird

$$S(n, D) = a\delta_1(t_1^2 - 2) + 2\delta_2(t_2^2 - a) + \delta_3(t_3^2 - 2a),$$

und man erhält aus der Gleichung (126) die vier Gleichungen

$$(262)\qquad \begin{cases} -a\delta_1 - 2(a-1)\delta_2 - (2a-1)\delta_3 = 24k_0, \\ +a\delta_1 - (a-1)\delta_2 - (a-2)\delta_3 = 24k_1, \\ -\delta_1 + 2(a-1)\delta_2 + (a-2)\delta_3 = 24k_2, \\ +\delta_1 + (a-1)\delta_2 + (2a-1)\delta_3 = 24k_3, \end{cases}$$

oder

$$(263)\qquad \begin{cases} (a^2-1)\delta_1 = 8[-(a-2)k_0 + 2(a+1)k_1 + 3k_2], \\ (a^2-1)\delta_2 = 8[+(a-2)k_0 + (a+1)k_1 + 3ak_2], \\ (a^2-1)\delta_3 = 8[-(2a-1)k_0 - 2(a+1)k_1 - 3ak_2]. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$a^2 - 1 = (4c \pm 1)^2 - 1 = 8c(2c \pm 1),$$

folglich gehen die Gleichungen (263) über in

$$(263\text{a})\qquad \begin{cases} c(2c \pm 1)\delta_1 = -(a-2)k_0 + 2(a+1)k_1 + 3k_2, \\ c(2c \pm 1)\delta_2 = +(a-2)k_0 + (a+1)k_1 + 3ak_2, \\ c(2c \pm 1)\delta_3 = -(2a-1)k_0 - 2(a+1)k_1 - 3ak_2. \end{cases}$$

§ 30.

Transformation vom Grade 6.

Für $n = 6$ wird $a = 3$, $c = 1$ und $\varrho = 0$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

$$(264)\qquad \delta_1 = -k_0 + 8k_1 + 3k_2, \quad \delta_2 = +k_0 + 4k_1 + 9k_2, \quad \delta_3 = -5k_0 - 8k_1 - 9k_2.$$

6*

Indem man von den vier Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die beiden anderen gleich 0 setzt, erhält man 6 L-Producte mit dem Charakter 1, nämlich

$$(265)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(6)^8}{L(3)^4 L(2)^8}, \quad \xi_2 = \dfrac{L(6)^4}{L(3)^8 L(2)^4}, \quad \xi_3 = \dfrac{L(6)^3}{L(3)^3 L(2)^9}, \\[2ex] \xi_4 = \dfrac{L(6)^5 L(2)}{L(3)}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(6)\, L(2)^5}{L(3)^5}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(6)^9}{L(3)^9 L(2)^3}. \text{*)} \end{cases}$$

Die Grössen ξ_1 und ξ_2 sind Parameter, denn die Exponenten δ_1, δ_2, δ_3 sind *gerade* Zahlen, n ist gleichfalls eine *gerade* Zahl. Aber auch ξ_3 ist ein Parameter, denn es ist

$$\xi_3 = \frac{f(6)^3}{f(3)^3 f(2)^9} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)^3}{\tau(\varpi)^3} = \frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right) - \wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)},$$

folglich ist ξ_3 eine rationale Function von $\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right)$ und deshalb eine *Transformationsgrösse*. Da ausserdem die Dimension von ξ_3 gleich 0 ist, so ist ξ_3 ein *Parameter*. (Vergl. Gleichung (58) Nr. 9).

Deshalb sind auch die Hülfsgrössen

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_6 = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_3}$$

Parameter, und zwar haben diese 6 Parameter sämmtlich den Charakter 1.

Folglich besteht auch zwischen je zweien dieser 6 Parameter eine Gleichung von der Form

$$a\,\xi_\alpha \xi_\beta + b\,\xi_\alpha + c\,\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch Entwickelung der Parameter ξ_α und ξ_β nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{3}} = z$ finden kann. Dadurch erhält man

$$(266)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1 - \xi_1}{9 - \xi_1}, \quad 8\xi_3 = 1 - \xi_1, \quad \xi_4 = \dfrac{8\xi_1}{1 - \xi_1}, \\[2ex] \xi_5 = \dfrac{8}{9 - \xi_1}, \quad \xi_6 = \dfrac{8\xi_1}{9 - \xi_1}, \end{cases}$$

oder

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
k_0	0	$+1$	$+1$	-1	0	0
k_1	-1	0	-1	0	$+1$	0
k_2	0	-1	0	0	-1	-1
k_3	$+1$	0	0	$+1$	0	$+1$

(266a)
$$\xi_1 = \frac{1 - 9\xi_2}{1 - \xi_2}, \quad \xi_3 = \frac{\xi_2}{1 - \xi_2},$$

oder

(266b)
$$\xi_1 = 1 - 8\xi_3, \quad \xi_2 = \frac{\xi_3}{1 + \xi_3}.$$

Aus den Gleichungen (265) folgt nun

(267)
$$\begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2}{\xi_3^4} = \dfrac{(1 - \xi_2)^3(1 - 9\xi_2)}{\xi_2^3} = \dfrac{1 - 8\xi_3}{\xi_3^3(1 + \xi_3)}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^2} = \dfrac{1 - 9\xi_2}{\xi_2^2(1 - \xi_2)} = \dfrac{(1 + \xi_3)^2(1 - 8\xi_3)}{\xi_3^2}, \\ L(6)^{24} = \dfrac{\xi_1^5}{\xi_2\xi_3^4} = \dfrac{(1 - 9\xi_2)^5}{\xi_2^5(1 - \xi_2)} = \dfrac{(1 + \xi_3)(1 - 8\xi_3)^5}{\xi_3^5}. \end{cases}$$

Nach Gleichung (132) war

$$J : J - 1 : 1 = [L(2)^{24} + 16]^3 : [L(2)^{24} - 8]^2 [L(2)^{24} + 64] : 1728\, L(2)^{24}$$

und nach Gleichung (171) war

$$J : J - 1 : 1 = [L(3)^{12} + 3]^3 [L(3)^{12} + 27] : [L(3)^{24} + 18\, L(3)^{12} - 27]^2 \\ : 1728\, L(3)^{12}.$$

Aus jeder dieser beiden Gleichungen kann nun mit Rücksicht auf die Gleichungen (267) J als rationale Function eines der 6 Parameter dargestellt werden. Für den vorliegenden Zweck würde eine dieser Darstellungen genügen, für die später folgende Transformation 12[ten] und 18[ten] Grades ist es aber zweckmässig, die Invariante J als Function von ξ_2 *und* von ξ_3 darzustellen. Dies giebt

(268)
$$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (1 - 9\xi_2 + 3\xi_2^2 - 3\xi_2^3)^3 (1 - 3\xi_2)^3 \\ \qquad : (1 - 12\xi_2 + 30\xi_2^2 - 36\xi_2^3 + 9\xi_2^4)^2 (1 - 6\xi_2 - 3\xi_2^2)^2 \\ \qquad : 1728\xi_2^6(1 - \xi_2)^3(1 - 9\xi_2), \end{cases}$$

oder

(268a)
$$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (1 - 6\xi_3 - 12\xi_3^2 - 8\xi_3^3)^3 (1 - 2\xi_3)^3 \\ \qquad : (1 - 8\xi_3 - 8\xi_3^3 - 8\xi_3^4)^2 (1 - 4\xi_3 - 8\xi_3^2)^2 \\ \qquad : 1728\xi_3^6(1 + \xi_3)^2 (1 - 8\xi_3). \end{cases}$$

Die zu ξ_2 und ξ_3 complementären Parameter sind

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi_1}{9} \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_6}{8},$$

deshalb erhält man

(269)
$$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (243 - 243\xi_1 + 9\xi_1^2 - \xi_1^3)^3(3 - \xi_1)^3 \\ \qquad : (729 - 972\xi_1 + 270\xi_1^2 - 36\xi_1^3 + \xi_1^4)^2(27 - 18\xi_1 - \xi_1^2)^2 \\ \qquad : 1728\xi_1^6(9 - \xi_1)^3(1 - \xi_1), \end{cases}$$

oder

$$(269\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} J : J-1 : 1 = (64-48\xi_6-12\xi_6^2-\xi_6^3)^3(4-\xi_6)^3 \\ \qquad : (512-512\xi_6-8\xi_6^3-\xi_6^4)^2(8-4\xi_6-\xi_6^2)^2 \\ \qquad : 1728\xi_6^6(8+\xi_6)^2(1-\xi_6). \end{cases}$$

§ 31.

Transformation vom Grade 10.

Für $n = 10$ wird $a = 5$, $e = +1$ und $\varrho = 0$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263 a)

$$(270)\quad \begin{cases} \delta_1 = -k_0 + 4k_1 + k_2, \quad \delta_2 = k_0 + 2k_1 + 5k_2, \\ \qquad \delta_3 = -3k_0 - 4k_1 - 5k_2. \end{cases}$$

Indem man von den vier Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die beiden anderen gleich 0 setzt, erhält man 6 L-Producte mit dem Charakter 1, nämlich

$$(271)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(10)^4}{L(5)^2 L(2)^4}, \quad \xi_2 = \dfrac{L(10)^2}{L(5)^4 L(2)^2}, \quad \xi_3 = \dfrac{L(10)}{L(5)\,L(2)^5}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(10)^3 L(2)}{L(5)}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(10)\,L(2)^3}{L(5)^3}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(10)^5}{L(5)^5 L(2)}. \text{*)} \end{cases}$$

Die Grössen ξ_1 und ξ_2 sind Parameter, denn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sind *gerade* Zahlen, n ist gleichfalls eine *gerade* Zahl. Aber auch ξ_3 ist ein Parameter, wie schon in § 4 gezeigt wurde. (Vergl. Gleichung (58) Nr. 8.) Deshalb sind auch die Hülfsgrössen

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_6 = \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_3}$$

Parameter, und zwar haben diese 6 Parameter sämmtlich den Charakter 1.

In derselben Weise wie bei $n = 6$ findet man daher die Gleichungen

$$(272)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1-\xi_1}{5-\xi_1}, \quad 4\xi_3 = 1-\xi_1, \quad \xi_4 = \dfrac{4\xi_1}{1-\xi_1}, \\ \qquad \xi_5 = \dfrac{4}{5-\xi_1}, \quad \xi_6 = \dfrac{4\xi_1}{5-\xi_1}, \end{cases}$$

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 sind genau dieselben, wie bei den entsprechenden Grössen für $n = 6$ und ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
k_0	0	$+1$	$+1$	-1	0	0
k_1	-1	0	-1	0	$+1$	0
k_2	0	-1	0	0	-1	-1
k_3	$+1$	0	0	$+1$	0	$+1$

oder

$$(272\text{a})\qquad \begin{cases} \xi_1 = 1 - 4\xi_3, \quad \xi_2 = \dfrac{\xi_3}{1+\xi_3}, \quad \xi_4 = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3}, \\ \xi_5 = \dfrac{1}{1+\xi_3}, \quad \xi_6 = \dfrac{1-4\xi_3}{1+\xi_3}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (271) folgt jetzt

$$(273)\qquad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2}{\xi_3^6} = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3^5(1+\xi_3)}, \\ L(5)^6 = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^2} = \dfrac{(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2}{\xi_3^2}, \\ L(10)^8 = \dfrac{\xi_1^3}{\xi_2\xi_3^2} = \dfrac{(1+\xi_3)(1-4\xi_3)^3}{\xi_3^3}. \end{cases}$$

Indem man diese Werthe von $L(2)^{24}$ in die Gleichung (132) für die Transformation 2^{ten} Grades einsetzt, oder indem man den Werth von $L(5)^6$ in die Gleichung (235) für die Transformation 5^{ten} Grades einsetzt, erhält man

$$(274)\qquad \begin{cases} J : J-1 : 1 = (1-4\xi_3+16\xi_3^5+16\xi_3^6)^3 \\ \qquad : (1+4\xi_3^2)(1-2\xi_3+2\xi_3^2)^2(1-2\xi_3-4\xi_3^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (1-2\xi_3-6\xi_3^2-8\xi_3^3-4\xi_3^4)^2 \\ \qquad : 1728\xi_3^{10}(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2. \end{cases}$$

Der zu ξ_3 complementäre Parameter ist

$$(275)\qquad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_6}{4} = \frac{1-4\xi_3}{4(1+\xi_3)},$$

folglich ist

$$(276)\qquad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (256-256\xi_6+4\xi_6^5+\xi_6^6)^3 \\ \qquad : (4+\xi_6^2)(8-4\xi_6+\xi_6^2)^2(4-2\xi_6-\xi_6^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (64-32\xi_6-24\xi_6^2-8\xi_6^3-\xi_6^4)^2 \\ \qquad : 1728\xi_6^{10}(1-\xi_6)(4+\xi_6)^2. \end{cases}$$

§ 32.

Transformation vom Grade 14.

Für $n = 14$ wird $a = 7$, $c = 2$ und $\varrho = 1$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

$$(277)\qquad 6\delta_1 = -5k_0 + 16k_1 + 3k_2, \quad 6\delta_2 = +5k_0 + 8k_1 + 21k_2, \\ 6\delta_3 = -13k_0 - 16k_1 - 21k_2.$$

Daraus folgt, dass $k_0 + k_1$ immer durch 3 und $k_0 + k_2$ immer durch

$$(278)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(14)^7}{L(7)^7\, L(2)}, & \xi_2 = \dfrac{L(14)^3\, L(2)^3}{L(7)^3}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(14)^4}{L(7)^4 L(2)^4}, & \xi_4 = \dfrac{L(14)}{L(7)\, L(2)^7}. \text{*)} \end{cases}$$

Bei ξ_3 sind ohne Weiteres alle Bedingungen erfüllt, welche erfüllt werden müssen, damit ξ_3 ein Parameter ist. Auch ξ_4 ist nach § 4, Gleichung (58) Nr. 8 ein Parameter. Deshalb sind auch

$$(279)\qquad \xi_1 = \frac{\xi_3{}^2}{\xi_4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{\xi_3}{\xi_4}$$

Parameter, und zwar haben diese 4 Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sämmtlich den Charakter 2.

Die Gleichungen (277) liefern ausserdem noch L-Producte mit dem Charakter 3, nämlich die Grössen

$$(280)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{L(14)^8}{L(7)^4\, L(2)^8}, & \eta_2 = \dfrac{L(14)\, L(7)^3}{L(2)^7}, & \eta_3 = \dfrac{L(14)^4}{L(2)^4}, \\ \eta_4 = \dfrac{L(14)^3 L(2)^3}{L(7)^7}, & \eta_5 = L(7)^4, & \eta_6 = \dfrac{L(14)^7}{L(7)^3\, L(2)}, \\ \eta_7 = \dfrac{L(14)^4}{L(7)^8\, L(2)^4}, & \eta_8 = L(14)^3\, L(7)\, L(2)^3. \text{*)} \end{cases}$$

Hierbei sind die Grössen η_1, η_3, η_5 und η_7, wie aus ihrer Form ohne Weiteres hervorgeht, Parameter. Daraus folgt aber, dass auch

$$(281)\qquad \eta_2 = \frac{\eta_1}{\xi_1}, \quad \eta_4 = \frac{\xi_1}{\eta_3}, \quad \eta_6 = \xi_1 \eta_5, \quad \eta_8 = \frac{\xi_1}{\eta_7}$$

Parameter sind.

Man könnte glauben, dass die Anführung der Parameter ξ_1 und ξ_2 überflüssig sei, weil sie sich nach Gleichung (279) rational durch ξ_3 und ξ_4 darstellen lassen. Aus einem ähnlichen Grunde scheint von den Parametern η nur ein einziger erforderlich, denn es ist

$$(282)\qquad \eta_1 = \xi_3 \eta_3, \quad \eta_3 = \xi_3 \eta_5, \quad \eta_7 = \frac{\xi_3}{\eta_5},$$

während $\eta_2, \eta_4, \eta_6, \eta_8$ durch die Gleichungen (281) dargestellt sind. Für die folgenden Rechnungen gewährt aber die Kenntniss so vieler

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8
k_0	0	-1	$+1$	$+2$	0	0	-1	$+1$	-2	-2	$+3$	-3
k_1	0	$+1$	-1	-2	-3	-3	-2	$+2$	-1	-1	0	0
k_2	-2	-1	-1	0	0	$+2$	$+1$	-3	$+2$	0	-3	$+1$
k_3	$+2$	$+1$	$+1$	0	$+3$	$+1$	$+2$	0	$+1$	$+3$	0	$+2$

Parameter wesentliche Vereinfachungen, wie sogleich gezeigt werden soll. Zwischen ξ_3 und ξ_4 besteht nämlich eine Gleichung von der Form

(283) $(a\xi_3^2+b\xi_3+c)\xi_4^2+(a_1\xi_3^2+b_1\xi_3+c_1)\xi_4+(a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2)=0.$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (279) folgt hieraus

(284) $$\begin{cases} (a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2)\,\xi_2^2+(a_1\xi_3^3+b_1\xi_3^2+c_1\xi_3)\,\xi_2 \\ \qquad +(a\xi_3^4+b\xi_3^3+c\xi_3^2)=0, \\ (a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2)\,\xi_1^2+(a_1\xi_3^4+b_1\xi_3^3+c_1\xi_3^2)\,\xi_1 \\ \qquad +(a\xi_3^6+b\xi_3^5+c\xi_3^4)=0. \end{cases}$$

Da aber diese Gleichungen in Bezug auf ξ_3 auch nur vom zweiten Grade sein dürfen, so ergiebt sich hieraus mit Nothwendigkeit

$$a=0,\quad b=0,\quad b_2=0,\quad c_2=0,$$

so dass die Gleichung (283) die einfachere Form annimmt

(283 a) $$c\xi_4^2+(a_1\xi_3^2+b_1\xi_3+c_1)\,\xi_4+a_2\xi_3^2=0.$$

Durch Reihenentwickelung findet man hieraus verhältnissmässig leicht

(285) $$8\xi_4^2-(\xi_3^2-7\xi_3+1)\,\xi_4+\xi_3^2=0.$$

Ferner besteht zwischen η_1 und ξ_3 eine Gleichung von der Form

(286) $$(a\xi_3^3+b\xi_3^2+c\xi_3+d)\,\eta_1^2+(a_1\xi_3^3+b_1\xi_3^2+c_1\xi_3+d_1)\,\eta_1 \\ +(a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)=0,$$

aus der mit Rücksicht auf die Gleichungen (282) folgt

(287) $$\begin{cases} (a\xi_3^5+b\xi_3^4+c\xi_3^3+d\xi_3^2)\eta_3^2+(a_1\xi_3^4+b_1\xi_3^3+c_1\xi_3^2+d_1\xi_3)\eta_3 \\ \qquad +(a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)=0, \\ (a\xi_3^7+b\xi_3^6+c\xi_3^5+d\xi_3^4)\eta_5^2+(a_1\xi_3^5+b_1\xi_3^4+c_1\xi_3^3+d_1\xi_3^2)\eta_5 \\ \qquad +(a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)=0, \\ (a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)\,\eta_7^2+(a_1\xi_3^6+b_1\xi_3^5+c_1\xi_3^4+d_1\xi_3^3)\eta_7 \\ \qquad +(a\xi_3^9+b\xi_3^8+c\xi_3^7+d\xi_3^6)=0. \end{cases}$$

Damit diese drei Gleichungen in Bezug auf ξ_3 sämmtlich nur vom dritten Grade sind, muss

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad b_2=0,\quad c_2=0,\quad d_2=0$$

sein, so dass z. B. die Gleichung zwischen η_5 und ξ_3 die einfache Form

$$d\xi_3^2\eta_5^2+(a_1\xi_3^3+b_1\xi_3^2+c_1\xi_3+d_1)\,\eta_5+a_2\xi_3=0$$

erhält. Die Bestimmung der übrigen Zahlcoefficienten durch Reihenentwickelung macht dann keine grossen Schwierigkeiten mehr und liefert die Gleichung

(288) $$\xi_3^2\eta_5^2-(\xi_3^3-8\xi_3^2-8\xi_3+1)\,\eta_5+49\xi_3=0.$$

In ähnlicher Weise findet man die Gleichung

(289) $$\xi_4^2\eta_5^2+(9\xi_4^2-2\xi_4)\,\eta_5-(8\xi_4^3-17\xi_4^2+10\xi_4-1)=0.$$

Der Kürze wegen schreibe man jetzt ξ statt $8\xi_4$, dann gehen die Gleichungen (285) und (289) über in

$$(290)\quad \begin{cases} (\xi - 8)\,\xi_3^2 - 7\xi\,\xi_3 - \xi(\xi - 1) = 0, \\ \xi^2\eta_5^2 + \xi(9\xi - 16)\eta_5 - (\xi^3 - 17\xi^2 + 80\xi - 64) = 0. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$(291)\qquad w = +\sqrt{4\xi^3 + 13\xi^2 + 32\xi},$$

wobei das Zeichen $+$ bedeutet, dass man in der Entwickelung nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{7}} = z$ das erste Glied positiv nehmen soll, so wird

$$(292)\qquad \xi_3 = \frac{7\xi - w}{2(\xi - 8)}, \quad \eta_5 = \frac{-9\xi + 16 - w}{2\xi},$$

also

$$(293)\qquad \eta_5 = \frac{(\xi - 8)\,\xi_3 - 8(\xi - 1)}{\xi} = \frac{\xi\,\xi_3 - 8(\xi + \xi_3) + 8}{\xi}.$$

Jetzt findet man aus den Gleichungen (278) und (280)

$$(294)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_3}{\xi_4^4} = \dfrac{2^{12}\xi_3}{\xi^4}, \quad L(7)^4 = \eta_5 = \dfrac{\xi\,\xi_3 - 8(\xi + \xi_3) + 8}{\xi}, \\ L(14)^{24} = \dfrac{\xi_3^7\eta_5^6}{\xi_4^4} = \dfrac{2^{12}\xi_3^7\eta_5^6}{\xi^4}. \end{cases}$$

Indem man den Werth von $L(2)^{24}$ in die Gleichung (132) einsetzt, erhält man

$$(295)\quad J : J - 1 : 1 = (\xi^4 + 256\,\xi_3)^3 : (\xi^4 - 512\,\xi_3)^2\,(\xi^4 + 64\,\xi_3) : 1728\,\xi^8\xi_3.$$

Die zu ξ und ξ_3 complementären Parameter sind

$$(296)\qquad \bar{\xi} = \xi_1 \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_3 = \xi_3,$$

folglich

$$(297)\quad \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\xi_1^4 + 256\,\xi_3)^3 : (\xi_1^4 - 512\,\xi_3)^2(\xi_1^4 + 64\,\xi_3) : 1728\,\xi_1^8\,\xi_3,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (279)

$$(297\text{a})\quad \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\xi^4 + 16\,\xi_3^7)^3 : (\xi^4 - 8\,\xi_3^7)^2(\xi^4 + 64\,\xi_3^7) : 1728\,\xi^4\xi_3^{14}.$$

Man kann natürlich noch aus den Gleichungen (290) und (295) die Grösse ξ_3 eliminiren und erhält dadurch die Gleichung

$$(298)\quad \begin{cases} 2^{12}\cdot 3^6\,\xi^{14}(\xi - 1)\,(\xi - 8)^2 J^2 \\ + 2^6\cdot 3^3[7\,\xi^{18}(\xi - 8)^2 - 2^9\cdot 3\,\xi^{14}(\xi - 8)^2(\xi - 1) \\ \qquad - 2^{16}\cdot 3\cdot 7\,\xi^{11}(\xi - 8)(\xi - 1) - 2^{25}\xi^7(\xi - 8)(\xi - 1)^2 \\ \qquad - 2^{24}\cdot 7^2\xi^8(\xi - 1)]\,J \\ - [\xi^7(\xi - 8) + 2^8\cdot 7\,\xi^4 - 2^{16}(\xi - 1)]^3 = 0. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann man auch eine Gleichung zwischen $\bar{J}$ und ξ angeben, für die Anwendungen ist es jedoch zweckmässiger, sich der Gleichungen (295) und (297 a) zu bedienen.

§ 33.

Transformation vom Grade 22.

Für $n = 22$ wird $a = 11$, $c = 3$ und $\varrho = 2$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

$$(299) \quad \begin{cases} 5\delta_1 = -3k_0 + 8k_1 + k_2, \quad 5\delta_2 = 3k_0 + 4k_1 + 11k_2, \\ \qquad 5\delta_3 = -7k_0 - 8k_1 - 11k_2, \end{cases}$$

also

$$5(\delta_1 + \delta_2) = 12(k_1 + k_2), \quad 5(\delta_2 + \delta_3) = -4(k_0 + k_1),$$
$$5(\delta_3 + \delta_1) = -10(k_0 + k_2).$$

Deshalb müssen $k_0 + k_1$ und $k_1 + k_2$ durch 5 theilbar sein. Soll also der Charakter kleiner als 5 sein, so muss man

$$k_0 + k_1 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 + k_2 = 0$$

setzen. Dies giebt $k_1 = -k_0$, $k_2 = +k_0$, folglich erhält man für $k_0 = -1$ die Grösse

$$(300) \qquad \xi = \frac{L(22)^2\, L(2)^2}{L(11)^2},$$

und zwar ist ξ, wie man ohne Weiteres erkennt, ein *Parameter* mit dem Charakter 2. Das ist aber auch der *einzige* Parameter mit so niedrigem Charakter, den das angegebene Verfahren liefert. Dagegen findet man 14 Hülfsgrössen mit dem Charakter 5*), von denen aber nur die beiden

$$(301) \qquad \xi_1 = \frac{L(22)^4}{L(11)^8\, L(2)^4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{L(22)^8}{L(11)^4\, L(2)^8}$$

hervorgehoben werden mögen. Auch ξ_1 und ξ_2 sind Parameter, so dass also zwischen ξ und ξ_1 eine Gleichung von der Form

$$(302) \quad \begin{cases} \quad (a\xi^5 + b\xi^4 + c\xi^3 + d\xi^2 + e\xi + f)\,\xi_1^2 \\ + (a_1\xi^5 + b_1\xi^4 + c_1\xi^3 + d_1\xi^2 + e_1\xi + f_1)\,\xi_1 \\ + (a_2\xi^5 + b_2\xi^4 + c_2\xi^3 + d_2\xi^2 + e_2\xi + f_2) = 0 \end{cases}$$

besteht. Setzt man nun $h^{\frac{1}{11}} = z$ und entwickelt die beiden Parameter ξ und ξ_1 nach Potenzen von z, so erhält man

*) Diese 14 Hülfsgrössen erhält man, indem man für k_0, k_1, k_2, k_3 die folgenden Werthe einsetzt:

k_0	+5	0	0	+5	−5	0	+1	+1	+2	−2	−3	+3	−4	+4
k_1	0	−5	0	−5	0	+5	−1	+4	−2	−3	−2	−3	−1	−4
k_2	−5	0	−5	0	0	−5	−4	−4	−3	+3	+2	−2	+1	−1
k_3	0	+5	+5	0	+5	0	+4	−1	+3	+2	+3	+2	+4	+1

$$\xi = z^{-1} - 2 + z - 2z^2 + 4z^3 - 4z^4 + 5z^5 - 6z^6 + 9z^7 - 12z^8 + 13z^9 + \cdots,$$
$$\xi_1 = z^5 - 4z^6 + 10z^7 - 24z^8 + 55z^9 - 116z^{10} + 230z^{11} + \cdots.$$

Daraus folgt sofort, dass

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad d_2 = 0, \quad e_2 = 0$$

sein muss. Setzt man $f_2 = 1$, so findet man aus dem ersten Gliede der Entwickelung $a_1 = -1$, dann aus dem zweiten $b_1 = -14$, aus dem dritten $c_1 = -73$, aus dem vierten $d_1 = -184$ und aus dem fünften $e_1 = -240$. Die nächsten Glieder der Entwickelung geben die Gleichungen

$$a + f_1 + 122 = 0, \quad b = 14a, \quad c = 73a, \quad d = 184a, \quad e = 240a, \quad f = 122a + 121.$$

Aus den später folgenden Gliedern ergiebt sich aber, dass a gleich 0 sein muss, folglich ist die Gleichung zwischen ξ und ξ_1

$$(303)\quad 121\xi_1^2 - (\xi^5 + 14\xi^4 + 73\xi^3 + 184\xi^2 + 240\xi + 122)\xi_1 + 1 = 0,$$

oder

$$(303\text{a})\quad 242\xi_1 = \xi^5 + 14\xi^4 + 73\xi^3 + 184\xi^2 + 240\xi + 122 - (\xi+3)(\xi+5)w,$$

wobei

$$(304)\quad w = \sqrt{(\xi^3 + 4\xi^2 + 8\xi + 4)(\xi^3 + 8\xi^2 + 16\xi + 16)} = +z^{-3} + \cdots.$$

Die zu ξ und ξ_1 complementären Parameter sind

$$(305)\quad \bar{\xi} = \frac{4}{\xi} \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_1 = \frac{\xi_2}{121},$$

folglich besteht zwischen ξ und ξ_2 die Gleichung

$$(306)\quad \begin{cases} \xi^5\xi_2^2 - (122\xi^5 + 960\xi^4 + 2944\xi^3 + 4672\xi^2 + 3584\xi + 1024)\xi_2 \\ \qquad + 121\xi^5 = 0, \end{cases}$$

oder

$$(306\text{a})\quad \begin{cases} \xi^5\xi_2 = 61\xi^5 + 480\xi^4 + 1472\xi^3 + 2336\xi^2 + 1792\xi + 512 \\ \qquad - 4(3\xi + 4)(5\xi + 4)w. \end{cases}$$

Dabei wird

$$(307)\quad L(2)^{24} = \frac{\xi^6}{\xi_1\xi_2}, \quad L(11)^{12} = \frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad L(22)^8 = \frac{\xi^2\xi_2}{\xi_1}.$$

Um $L(2)^{24}$ als rationale Function von ξ und w darzustellen, beachte man, dass

$$\frac{2}{\xi_1} = \xi^5 + 14\xi^4 + 73\xi^3 + 184\xi^2 + 240\xi + 122 + (\xi+3)(\xi+5)w,$$
$$\frac{121\xi^5}{\xi_2} = 61\xi^5 + 480\xi^4 + 1472\xi^3 + 2336\xi^2 + 1792\xi + 512 + 4(3\xi + 4)(5\xi + 4)w$$

ist. Setzt man jetzt

$$(308) \qquad (\xi+2)(\xi^4+9\xi^3+26\xi^2+36\xi+16)=A,$$

so erhält man

$$(309) \qquad 2L(2)^{24}=\xi[A^2+2\xi^5+(\xi+1)(\xi+4)Aw],$$

oder

$$(309a) \qquad L(2)^{48}-\xi(A^2+2\xi^5)L(2)^{24}+\xi^{12}=0.$$

Deshalb findet man aus der Gleichung (132), welche für die Transformation 2ten Grades aufgestellt wurde,

$$(310) \quad \begin{cases} J:J-1:1=[\xi(A^2+2\xi^5)+32+\xi(\xi+1)(\xi+4)Aw]^3 \\ \qquad :[\xi(A^2+2\xi^5)-16+\xi(\xi+1)(\xi+4)Aw]^2 \\ \qquad \times[\xi(A^2+2\xi^5)+128+\xi(\xi+1)(\xi+4)Aw] \\ \qquad :1728\cdot 4\xi[A^2+2\xi^5+(\xi+1)(\xi+4)Aw]. \end{cases}$$

Einfacher gestaltet sich die Gleichung, wenn man J rational durch ξ, ξ_1 und ξ_2 darstellt, dann wird

$$(310a) \quad \begin{cases} J:J-1:1=(\xi^6+16\xi_1\xi_2)^3:(\xi^6-8\xi_1\xi_2)^2(\xi^6+64\xi_1\xi_2) \\ \qquad :1728\xi^6\xi_1^2\xi_2^2, \end{cases}$$

und

$$(311) \quad \begin{cases} \overline{J}:\overline{J}-1:1=(256+\xi^6\xi_1\xi_2)^3:(512-\xi^6\xi_1\xi_2)^2(64+\xi^6\xi_1\xi_2) \\ \qquad :1728\xi^{12}\xi_1^2\xi_2^2. \end{cases}$$

§ 34.

Transformation vom Grade 11.

Besonders bemerkenswerth ist es, dass die Transformation vom Grade 22 auch einen *Parameter vom niedrigsten Charakter* für die Transformation vom Grade 11 liefert. Setzt man nämlich wieder

$$h^{\frac{1}{11}}=z, \qquad e^{\frac{\pi i}{11}}=\varepsilon$$

und nennt man die drei Werthe von $\xi=\frac{L(22)^2L(2)^2}{L(11)^2}$, welche dem Parameter

$$L(11)^{12}=\frac{Q\left(\omega,\frac{\omega'}{11}\right)^{12}}{Q(\omega,\omega')^{12}}=\frac{Q\left(\frac{\omega'}{11},-\omega\right)^{12}}{Q(\omega',-\omega)^{12}}$$

zugeordnet sind, ξ', ξ'' und ξ''', so hat man bez. zu setzen:

$$\varpi=\omega',\ \varpi'=-\omega; \quad \varpi=11\omega+\omega',\ \varpi'=-\omega;$$
$$\varpi=11\omega+2\omega',\ \varpi'=5\omega+\omega';$$

und es wird

$$(312)\quad\begin{cases} \xi' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{22}, -\omega\right)^2 Q\left(\frac{\omega'}{2}, -\omega\right)^2}{Q\left(\frac{\omega'}{11}, -\omega\right)^2 Q(\omega', -\omega)^2} = \dfrac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{22}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}, \\[2ex] \xi'' = \dfrac{Q\left(\frac{11\omega+\omega'}{22}, -\omega\right)^2 Q\left(\frac{11\omega+\omega'}{2}, -\omega\right)^2}{Q\left(\frac{11\omega+\omega'}{11}, -\omega\right)^2 Q(11\omega+\omega', -\omega)^2} \\[2ex] \quad = i\,\dfrac{Q\left(\omega, \frac{33\omega+\omega'}{22}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{3\omega+\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}, \\[2ex] \xi''' = \dfrac{Q\left(\frac{11\omega+2\omega'}{22}, 5\omega+\omega'\right)^2 Q\left(\frac{11\omega+2\omega'}{2}, 5\omega+\omega'\right)^2}{Q\left(\frac{11\omega+2\omega'}{11}, 5\omega+\omega'\right)^2 Q(11\omega+2\omega', 5\omega+\omega')^2} \\[2ex] \quad = \dfrac{Q\left(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}.\text{*)} \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Formel

$$Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})$$

findet man

---

*) Die lineare Transformation der Perioden, welche hierbei erforderlich ist, geschieht nach den Regeln, welche für die lineare Transformation von $Q(\omega, \omega')$ in § 15 m. vor. Abh. gegeben sind. Dabei braucht man für ξ', ξ'', ξ''' bez. die folgenden 24ten Wurzeln der Einheit:

$$\varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}-1, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{4\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}1, & 1\\ 10, & 11\end{pmatrix} = e^{\frac{9\pi i}{12}},$$

$$\varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}4, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}11, & 1\\ 10, & 1\end{pmatrix} = e^{\frac{9\pi i}{12}},$$

$$\varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}1, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{2\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}1, & 2\\ 5, & 11\end{pmatrix} = e^{\frac{3\pi i}{12}},$$

$$\varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}11, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{\frac{8\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}11, & 2\\ 5, & 1\end{pmatrix} = e^{\frac{3\pi i}{12}}.$$

$$(313)\begin{cases} \xi' = z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1-z^{\nu})^2(1-z^{11\nu})^2}{(1-z^{2\nu})^2(1-z^{22\nu})^2} = z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-z^{2\nu-1})^2(1-z^{22\nu-11})^2, \\ \xi'' = -z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1-z^{\nu}\varepsilon^{33\nu})^2(1-z^{11\nu}\varepsilon^{33\nu})^2}{(1-z^{2\nu})^2(1-z^{22\nu})^2} \\ \quad = -z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+z^{2\nu-1})^2(1+z^{22\nu-11})^2, \\ \xi''' = 4z^2\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1-z^{4\nu})^2(1-z^{44\nu})^2}{(1-z^{2\nu})^2(1-z^{22\nu})^2} = 4z^2\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+z^{2\nu})^2(1+z^{22\nu})^2. \end{cases}$$

Da nun bekanntlich $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-z^{2\nu-1})(1+z^{2\nu-1})(1+z^{2\nu}) = +1$ ist, so erhält man

$$(314)\qquad \xi'\xi''\xi''' = -4.$$

Durch Entwickelung nach Potenzen von z findet man

$$\xi' = z^{-1} - 2 + z - 2z^2 + 4z^3 - 4z^4 + 5z^5 - 6z^6 + 9z^7 - 12z^8 + 13z^9 + \cdots,$$

$$\xi'' = -z^{-1} - 2 - z - 2z^2 - 4z^3 - 4z^4 - 5z^5 - 6z^6 - 9z^7 - 12z^8 - 13z^9 + \cdots,$$

folglich ist

$$\xi' + \xi'' = -4(+1 + z^2 + 2z^4 + 3z^6 + 6z^8 + \cdots);$$

ferner ist

$$\xi''' = +4(z^2 + 2z^4 + 3z^6 + 6z^8 + 9z^{10} + 14z^{12} + \cdots),$$

so dass mit grosser Wahrscheinlichkeit

$$(315)\qquad \xi' + \xi'' + \xi''' = -4$$

sein wird. Der *strenge* Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich aus dem Folgenden. Nimmt man nämlich vorläufig an, diese Gleichung sei richtig, und setzt man noch

$$(316)\qquad \xi'\xi'' + \xi'\xi''' + \xi''\xi''' = -\eta,$$

so ist ξ eine Wurzel der Gleichung

$$(317)\qquad \xi^3 + 4\xi^2 - \eta\xi + 4 = 0,$$

und es wird

$$(317\text{a})\qquad \eta = \xi^2 + 4\xi + 4\xi^{-1}$$

ein Parameter für die Transformation 11^ten^ *Grades.* Umgekehrt: Ist η durch die Gleichung (317a) definirt, und lässt sich zeigen, dass η wirklich ein solcher Parameter ist, so gelten auch die Gleichungen (317), (316) und (315). Dies kann aber leicht geschehen. Es war nämlich nach Gleichung (307)

$$L^{12} = L(11)^{12} = \frac{\xi_2}{\xi_1^2};$$

oder, wenn man für ξ_1 und ξ_2 nach den Gleichungen (303a) und (306a) ihre Werthe einsetzt und die daraus folgende Gleichung zwischen ξ und L^{12} rational macht,

$$(318)\quad \begin{cases} L^{24} - (\xi^{10} + 10\xi^9 + 158\xi^8 + 628\xi^7 + 1321\xi^6 + 1356\xi^5 + 312\xi^4 \\ \qquad -276\xi^3 + 288\xi^2 - 384\xi + 586 - 832\xi^{-1} + 896\xi^{-2} \\ \qquad -448\xi^{-3} - 512\xi^{-4} + 1024\xi^{-5})L^{12} + 11^6 = 0, \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (317a)

$$(319)\quad L^{24} - (\eta^5 - 2\eta^4 - 87\eta^3 + 104\eta^2 + 1536\eta - 614)L^{12} + 11^6 = 0.$$

Hieraus erkennt man, dass η für die Transformation 11ten Grades ein Parameter mit dem Charakter 2 ist, und dass η sogar für $n = 11$, wo $\varrho = 1$ wird, ein *Parameter vom niedrigsten Charakter* ist.

Setzt man

$$(320)\quad \begin{cases} W = +\sqrt{(\eta+8)(\eta^3+4\eta^2-72\eta-364)} \\ \quad = +\sqrt{\eta^4 + 12\eta^3 - 40\eta^2 - 940\eta - 2912}, \end{cases}$$

so wird

$$(321)\quad W = w(\xi + 2 - 2\xi^{-2}),$$

wobei nach Gleichung (304)

$$w = +\sqrt{(\xi^3+4\xi^2+8\xi+4)(\xi^3+8\xi^2+16\xi+16)}$$

ist. Nach Einführung dieser Bezeichnung folgt aus Gleichung (319)

$$(322)\quad \begin{cases} 2L^{12} = \eta^5 - 2\eta^4 - 87\eta^3 + 104\eta^2 + 1536\eta - 614 \\ \qquad + (\eta-3)(\eta^2-5\eta-16)W. \end{cases}$$

Um auch die Gleichung zwischen η und J zu erhalten, setze man in Gleichung (310) der Kürze wegen $A^2 + 2\xi^5 = C$, dann wird

$$C^2 - (\xi+1)^2(\xi+4)^2 A^2 w^2 = 4\xi^{10}$$

und die Gleichung (310) geht über in

$$(323)\quad \begin{cases} 1728 \cdot 4\xi[C + (\xi+1)(\xi+4)Aw]J \\ = [\xi C + 32 + \xi(\xi+1)(\xi+4)Aw]^3. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun mit J_1 den Werth, der aus J hervorgeht, indem man w mit $-w$ vertauscht, so wird

$$(324)\quad 1728^2 JJ_1 = (\xi^8 + 16C\xi^{-3} + 256\xi^{-4})^3.$$

Ferner wird

$$1728(J+J_1) = \xi^2C^2 + 16(3\xi + 256\xi^{-11})C - 2\xi^{12} + 1536,$$

folglich ist die Gleichung zwischen ξ und J, wenn man sie rational macht,

$$(324)\quad \begin{cases} 1728^2 J^2 - 1728[\xi^{22} + 44\xi^{21} + 902\xi^{20} + 11484\xi^{19} + 102113\xi^{18} \\ \quad + 675796\xi^{17} + 3462008\xi^{16} + 14084708\xi^{15} \\ \quad + 46285536\xi^{14} + 124201792\xi^{13} \\ \quad + 273795522\xi^{12} + 496807216\xi^{11} \\ \quad + 740569632\xi^{10} + 901431344\xi^{9} \\ \quad + 886328960\xi^{8} + 692209408\xi^{7} \\ \quad + 418722656\xi^{6} + 188931072\xi^{5} \\ \quad + 59992064\xi^{4} + 12176384\xi^{3} + 1318912\xi^{2} \\ \quad + 49152\xi + 1536 + 4096(\xi^{-1} + 22\xi^{-2} \\ \quad + 209\xi^{-3} + 1144\xi^{-4} + 4048\xi^{-5} + 9746\xi^{-6} \\ \quad + 16192\xi^{-7} + 18304\xi^{-8} + 13376\xi^{-9} \\ \quad + 5632\xi^{-10} + 1024\xi^{-11})]J \\ + [\xi^{8} + 16\xi^{7} + 176(2\xi^{6} + 19\xi^{5} + 104\xi^{4} + 368\xi^{3} \\ \quad + 886\xi^{2} + 1472\xi + 1664 + 1216\xi^{-1} + 512\xi^{-2}) \\ \quad + 16384\xi^{-3} + 256\xi^{-4}]^3 = 0. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\xi^2 + 4\xi + 4\xi^{-1} = \eta$, so geht sie über in

$$(325\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} 1728^2 J^2 - [\eta^{11} + 11(2\eta^{10} + 3\eta^{9} - 8\cdot 29\eta^{8} - 128\cdot 13\eta^{7} \\ \quad + 2\cdot 2275\eta^{6} + 64\cdot 1267\eta^{5} + 64\cdot 2633\eta^{4} \\ \quad - 128\cdot 6331\eta^{3} - 1024\cdot 3389\eta^{2}) \\ \quad - 4096(5541\eta - 8\cdot 1181)]\,1728 J \\ \quad + (\eta^4 + 256\eta^3 + 64\cdot 87\eta^2 + 64\cdot 643\eta \\ \quad\quad + 512\cdot 197)^3 = 0. \end{cases}$$

Noch einfacher ist die Herleitung dieser Gleichung, wenn man J und η nach steigenden Potenzen von $z = h^{\frac{1}{11}}$ entwickelt. Da die Entwickelung von $1728J$ mit z^{-22} und die von η mit z^{-2} beginnt, so hat die Gleichung zwischen η und J die Form

$$1728^2(a\eta + a_1)J^2 + 1728(b\eta^{12} + b_1\eta^{11} + b_2\eta^{10} + \cdots + b_{11}\eta + b_{12})J \\ + (c\eta^4 + c_1\eta^3 + c_2\eta^2 + c_3\eta + c_4)^3 = 0.$$

Daraus findet man dann verhältnissmässig leicht die Werthe der einzelnen Zahlcoefficienten.

Eine Bestätigung dafür, dass die Gleichung (325) richtig berechnet ist, gewährt ihre Auflösung nach J. Es muss sich nämlich J *rational* durch η und W darstellen lassen. In der That wird

$$(325\,\mathrm{b})\left\{\begin{aligned}2\cdot 1728 J = \eta^{11} + 11\,(2\eta^{10} + 3\eta^{9} - 8\cdot 29\eta^{8} - 128\cdot 13\eta^{7}\\ + 2\cdot 2275\eta^{6} + 64\cdot 1267\eta^{5} + 64\cdot 2633\eta^{4}\\ - 128\cdot 6331\eta^{3} - 1024\cdot 3389\eta^{2})\\ + 4096(-5541\eta + 8\cdot 1181)\\ + W(\eta^{9} + 16\eta^{8} - 25\eta^{7} - 1552\eta^{6} - 5344\eta^{5} + 33544\eta^{4}\\ + 199168\eta^{3} + 30208\eta^{2} - 1077760\eta - 946176).\end{aligned}\right.$$

Der Parameter $\bar{\xi}$, welcher für die Transformation 11ten Grades zu

$$\xi = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{22}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}$$

complementär ist, wird

$$(326)\qquad \bar{\xi} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{11}, \frac{\omega'}{2}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\frac{\omega}{11}, \omega'\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}.$$

Dies ist aber einer der 36 Werthe von ξ, die zur Transformation 22ten Grades gehören, so dass die Gleichung (325) ungeändert bleibt, wenn man ξ mit $\bar{\xi}$ vertauscht. Dasselbe gilt von Gleichung (325a) wenn man η mit $\bar{\eta}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, J mit $\bar{J}$ vertauscht; d. h. *J und $\bar{J}$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung* (325a), oder mit anderen Worten: „*Die Invariante J geht in $\bar{J}$ über, wenn man in Gleichung* (325b) $+ W$ *mit* $- W$ *vertauscht.*“

Man kann dies auch in folgender Weise zeigen. Der zu $L(11)^{12}$ complementäre Parameter ist $\frac{11^6}{L(11)^{12}}$; aus Gleichung (322) folgt aber

$$(327)\qquad \begin{aligned}\frac{2\cdot 11^6}{L(11)^{12}} = \eta^5 - 2\eta^4 - 87\eta^3 + 104\eta^2 + 1536\eta - 614\\ - (\eta-3)(\eta^2-5\eta-16)\,W,\end{aligned}$$

deshalb sind $L(11)^{12}$ und $\frac{11^6}{L(11)^{12}}$ die beiden Wurzeln der Gleichung (319).

§ 35.

Transformation vom Grade 26.

Für $n = 26$ wird $a = 13$, $c = 3$ und $\varrho = 2$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

$$(328)\qquad \begin{aligned}21\delta_1 = -11k_0 + 28k_1 + 3k_2,\quad 21\delta_2 = 11k_0 + 14k_1 + 39k_2,\\ 21\delta_3 = -25k_0 - 28k_1 - 39k_2,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\delta_1 + \delta_2 = 2(k_1+k_2),\quad 3(\delta_2+\delta_3) = -2(k_0+k_1),\\ 7(\delta_1+\delta_3) = -12(k_0+k_2);\end{aligned}$$

deshalb muss $k_0 + k_1$ durch 3 und $k_0 + k_2$ durch 7 theilbar sein. Man findet daher nur *einen* Parameter mit dem Charakter 2, nämlich

(329) $$\xi = \frac{L(26)^2}{L(13)^2\, L(2)^2}$$

und vier Parameter mit dem Charakter 3, nämlich

(330) $$\begin{cases} \xi_1 = L(13)^2, & \xi_2 = \dfrac{L(26)^2}{L(2)^2}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(26)^2}{L(13)^4 L(2)^2}, & \xi_4 = \dfrac{L(26)^4}{L(13)^2 L(2)^4}.\text{*)} \end{cases}$$

Nun ist

(331) $$\xi_1 = \frac{\xi}{\xi_3}, \quad \xi_2 = \xi\xi_1, \quad \xi_4 = \xi\xi_2,$$

und zwischen ξ und $\frac{1}{\xi_3}$ besteht eine Gleichung von der Form

$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\frac{1}{\xi_3^2} + (a_1\xi^2 + b_1\xi^2 + c_1\xi + d_1)\frac{1}{\xi_3} \\ + (a_2\xi^3 + b_2\xi^2 + c_2\xi + d_2) = 0.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\xi_1^2 + (a_1\xi^4 + b_1\xi^3 + c_1\xi^2 + d_1\xi)\xi_1 \\ + (a_2\xi^5 + b_2\xi^4 + c_2\xi^3 + d_2\xi^2) = 0,$$

$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\xi_2^2 + (a_1\xi^5 + b_1\xi^4 + c_1\xi^3 + d_1\xi^2)\xi_2 \\ + (a_2\xi^7 + b_2\xi^6 + c_2\xi^5 + d_2\xi^4) = 0,$$

$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\xi_4^2 + (a_1\xi^6 + b_1\xi^5 + c_1\xi^4 + d_1\xi^3)\xi_4 \\ + (a_2\xi^9 + b_2\xi^8 + c_2\xi^7 + d_2\xi^6) = 0.$$

Da aber diese Gleichungen in Bezug auf ξ sämmtlich nur vom dritten Grade sein dürfen, so ist

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0,$$

folglich reducirt sich die Gleichung zwischen ξ und ξ_1 auf

(332) $$a\xi^2\xi_1^2 + (a_1\xi^3 + b_1\xi^2 + c_1\xi + d_1)\xi_1 + d_2\xi = 0.$$

Dabei ist, wenn man $h^{\frac{1}{13}} = z$ setzt,

$$\xi = z - 2z^2 + z^3 - 2z^4 + 4z^5 - 4z^6 + 5z^7 - 6z^8 + 9z^9 + \cdots,$$
$$\xi_1 = z^{-2} - 2 - z^2 + 2z^4 + z^6 + 2z^8 + \cdots,$$

---

*) $k_0 = +1,\ k_1 = -1,\ k_2 = -1,\ k_3 = +1$ giebt den Parameter ξ,
$k_0 = -2,\ k_1 = -1,\ k_2 = +2,\ k_3 = +1$ „ „ „ ξ_1,
$k_0 = -1,\ k_1 = -2,\ k_2 = +1,\ k_3 = +2$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +3,\ k_1 = 0,\ k_2 = -3,\ k_3 = 0$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = 0,\ k_1 = -3,\ k_2 = 0,\ k_3 = +3$ „ „ „ ξ_4.

so dass man erhält

$$(333)\qquad \xi^2\xi_1^2-(\xi^3-4\xi^2-4\xi+1)\xi_1+13\xi=0,$$

oder

$$(333\text{a})\qquad 2\xi^2\xi_1=2\xi^2L(13)^2=\xi^3-4\xi^2-4\xi+1+w,$$

wobei

$$(334)\qquad w=+\sqrt{\xi^6-8\xi^5+8\xi^4-18\xi^3+8\xi^2-8\xi+1}.$$

Für die Transformation 13ten Grades gilt (nach Gleichung (148) m. vor. Abh.) die Gleichung

$$(335)\begin{cases} J:J-1:1=(\xi_1^2+5\xi_1+13)(\xi_1^4+7\xi_1^3+20\xi_1^2+19\xi_1+1)^3 \\ \qquad :(\xi_1^2+6\xi_1+13)(\xi_1^6+10\xi_1^5+46\xi_1^4+108\xi_1^3 \\ \qquad\qquad +122\xi_1^2+38\xi_1-1)^2:1728\xi_1, \end{cases}$$

wobei $\xi_1=L(13)^2$ ist und sich nach Gleichung (333a) rational durch ξ und w darstellen lässt.

Die zu ξ und ξ_1 complementären Parameter sind

$$(336)\qquad \bar{\xi}=\xi \quad\text{und}\quad \bar{\xi}_1=\frac{13}{\xi_2},$$

folglich ist

$$(337)\begin{cases} \bar{J}:\bar{J}-1:1=(\xi_2^2+5\xi_2+13)(\xi_2^4+19\cdot13\xi_2^3+20\cdot13^2\xi_2^2 \\ \qquad +7\cdot13^3\xi_2+13^4)^3 \\ \qquad :(\xi_2^2+6\xi_2+13)(\xi_2^6-38\cdot13\xi_2^5-122\cdot13^2\xi_2^4 \\ \qquad\qquad -108\cdot13^3\xi_2^3-46\cdot13^4\xi_2^2-10\cdot13^5\xi_2-13^6)^2 \\ \qquad :1728\xi_2^{13}, \end{cases}$$

wobei

$$(338)\begin{cases} \xi_1=\dfrac{1}{2\xi^2}(\xi^3-4\xi^2-4\xi+1+w), \\ \xi_2=\xi\xi_1=\dfrac{1}{2\xi}(\xi^3-4\xi^2-4\xi+1+w). \end{cases}$$

Da $\xi=\frac{\xi_2}{\xi_1}$ ist, so kann man aus Gleichung (333) auch leicht die Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_2 herstellen; es wird nämlich

$$(339)\qquad \xi_1^3+\xi_2^3-\xi_1\xi_2[\xi_1\xi_2+4(\xi_1+\xi_2)+13]=0.$$

Wegen der Beziehungen, welche zwischen den Parametern ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 nach Gleichung (331) bestehen, ist es nothwendig, noch andere Parameter einzuführen, um die Grössen $L(2)^{24}$ und $L(26)^{24}$ rational durch ξ und w darzustellen. Zu diesem Zwecke setze man

$$(340)\qquad \eta_1=\frac{L(13)^{13}L(2)}{L(26)^{13}} \quad\text{und}\quad \eta_2=\frac{L(26)}{L(13)L(2)^{13}}=\xi^7\eta_1.$$

Nach Gleichung (58) Nr. 8 ist zunächst η_2 ein Parameter, und deshalb auch $\eta_1 = \eta_2 : \xi^7$; und zwar ist der Charakter dieser beiden Parameter gleich 7. Deshalb hat die Gleichung zwischen ξ und η_1 die Form

$$(a\xi^7 + a_1\xi^6 + \cdots + a_7)\eta_1^2 + (b\xi^7 + b_1\xi^6 + \cdots + b_7)\eta_1 + (c\xi^7 + c_1\xi^6 + \cdots + c_7) = 0.$$

Dies giebt

$$(341)\quad \begin{cases} (a\xi^7 + a_1\xi^6 + \cdots + a_7)\eta_2^2 + (b\xi^{14} + b_1\xi^{13} + \cdots + b_7\xi^7)\eta_2 \\ \qquad + (c\xi^{21} + c_1\xi^{20} + \cdots + c_7\xi^{14}) = 0. \end{cases}$$

Da aber diese Gleichung in Bezug auf ξ auch nur vom 7ten Grade sein darf, so muss

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_7 = 0,$$
$$c = c_1 = c_2 = \cdots = c_6 = 0$$

sein, folglich reducirt sich die Gleichung (341) auf

$$a\eta_2^2 + (b\xi^7 + b_1\xi^6 + \cdots + b_7)\eta_2 + c_7\xi^7 = 0.$$

Durch die Entwickelung von ξ und η_2 nach steigenden Potenzen von z findet man hieraus leicht die Gleichung

$$(342)\quad \begin{cases} 64\eta_2^2 + (\xi^7 - 13\xi^6 + 52\xi^5 - 78\xi^4 + 78\xi^3 - 52\xi^2 + 13\xi - 1)\eta_2 \\ \qquad + \xi^7 = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(343)\quad \xi^7 - 13\xi^6 + 52\xi^5 - 78\xi^4 + 78\xi^3 - 52\xi^2 + 13\xi - 1 = E$$

setzt,

$$(342\text{a})\qquad 128\eta_2 = -E - (\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1)w,$$

oder

$$(342\text{b})\quad \frac{2\xi^7}{\eta_2} = -E + (\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1)w = 2\xi^6\sqrt{\xi}\,L(2)^{12}.$$

Hieraus folgt

$$(344)\quad 2\xi^{13}L(2)^{24} = E^2 - 128\xi^7 - E(\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1)w,$$

oder

$$(344\text{a})\qquad \xi^{13}L(2)^{48} - (E^2 - 128\xi^7)L(2)^{24} + 4096\xi = 0,$$

$$(345)\quad L(26)^2 = \xi_2 L(2)^2 = \frac{1}{2\xi}(\xi^3 - 4\xi^2 - 4\xi + 1 + w)\,L(2)^2.$$

Dadurch erhält man auch noch eine zweite Darstellung der absoluten Invarianten J und $\overline{J}$ als rationale Functionen von ξ und w. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$(346)\qquad (\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1) = F,$$

so wird nach Gleichung (132)

$$(347)\begin{cases} J:J-1:1=(E^2+32\xi^{13}-128\xi^7-EFw)^3 \\ \qquad :(E^2-16\xi^{13}-128\xi^7-EFw)^2(E^2+128\xi^{13}-128\xi^7-EFw) \\ \qquad :1728\cdot 4\xi^{26}(E^2-128\xi^7-EFw). \end{cases}$$

Dabei geht J in $\overline{J}$ über, wenn man $+w$ mit $-w$ vertauscht.

VII. Abschnitt.

Transformation vom Grade $4a$.

§ 36.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $4a$.

Ist $n=4a$ und hat die Primzahl a die Form $2b+1$, so ist der Rang ϱ nach der Tabelle in § 8 gleich $b-1$. Setzt man in diesem Falle

$$(348)\qquad \xi = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(a)^{\delta_3} L(2a)^{\delta_4} L(4a)^{\delta_5},$$

so erhält man

$$S(n,D)=2a\delta_1(t_1^2-2)+a\delta_2(t_2^2-4)+4\delta_3(t_3^2-a)$$
$$+2\delta_4(t_4^2-2a)+\delta_5(t_5^2-4a).$$

Deshalb findet man aus der Gleichung (126) die sechs Gleichungen

$$(349)\begin{cases} -2a\delta_1-3a\delta_2-4(a-1)\delta_3-2(2a-1)\delta_4-(4a-1)\delta_5=24k_0, \\ +a\delta_1+0-(a-1)\delta_3-(a-2)\delta_4-(a-1)\delta_5=24k_1, \\ +a\delta_1+3a\delta_2-(a-1)\delta_3-(a-2)\delta_4-(a-4)\delta_5=24k_2, \\ -2\delta_1-3\delta_2+4(a-1)\delta_3+2(a-2)\delta_4+(a-4)\delta_5=24k_3, \\ +\delta_1+0+(a-1)\delta_3+(2a-1)\delta_4+(a-1)\delta_5=24k_4, \\ +\delta_1+3\delta_2+(a-1)\delta_3+(2a-1)\delta_4+(4a-1)\delta_5=24k_5, \end{cases}$$

oder

$$(350)\begin{cases} b(b+1)\delta_1=2[-(b+1)k_0+(5b+2)k_1-(b+1)k_2 \\ \qquad +0-3k_4], \\ b(b+1)\delta_2=2[+k_0-2bk_1+2(b+1)k_2 \\ \qquad +k_3+2k_4], \\ b(b+1)\delta_3=2[-k_0+k_1+0 \\ \qquad +(2b+1)k_3-(2b+1)k_4], \\ b(b+1)\delta_4=2[+(b+1)k_0+(b-2)k_1+(b+1)k_2 \\ \qquad +0+3(2b+1)k_4], \\ b(b+1)\delta_5=2[-(2b+1)k_0-2bk_1-2(b+1)k_2 \\ \qquad -(2b+1)k_3-2(2b+1)k_4]. \end{cases}$$

§ 37.

Transformation vom Grade 12.

Für $n = 12$ ist ϱ gleich 0 und die Gleichungen (350) gehen über in

$$(351)\qquad \begin{cases} \delta_1 = -2k_0 + 7k_1 - 2k_2 + 0 - 3k_4, \\ \delta_2 = + k_0 - 2k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4, \\ \delta_3 = - k_0 + k_1 + 0 + 3k_3 - 3k_4, \\ \delta_4 = + 2k_0 - k_1 + 2k_2 + 0 + 9k_4, \\ \delta_5 = - 3k_0 - 2k_1 - 4k_2 - 3k_3 - 6k_4. \end{cases}$$

Setzt man also von den 6 Zahlen $k_0, k_1, \ldots k_5$ die eine gleich $+1$, die andere gleich -1 und die 4 übrigen gleich 0, so erhält man 15 L-Producte mit dem Charakter 1. Es genügt aber, zunächst nur 5 von diesen Grössen anzugeben, nämlich

$$(352)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(12)^4 L(2)^2}{L(6)^2 L(4)^4}, \qquad \xi_2 = \dfrac{L(6)^2}{L(3)^4 L(2)^2}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(12)^4 L(3)^4 L(2)^{10}}{L(6)^{10} L(4)^4}, \quad \xi_4 = \dfrac{L(12)}{L(4)^3 L(3)}, \\ \qquad\qquad \xi_5 = \dfrac{L(12) L(3)^2 L(2)^9}{L(6)^3 L(4)^3}.\text{*)} \end{cases}$$

Dabei erkennt man ohne Weiteres, dass die Hülfsgrössen ξ_1, ξ_2 und ξ_3, bei denen die Exponenten sämmtlich *gerade* sind, *Parameter* werden. Ferner sind nach den Gleichungen (14) und (15)

$$\xi_4 = \frac{f(12)}{f(4)^3 f(3)} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{6}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{6}\right)\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2 \tau(\varpi)} = \frac{\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)}{\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)},$$

$$\frac{\xi_5}{\xi_4} = \frac{f(3)^3 f(2)^9}{f(6)^3} = \frac{\tau(\varpi)^3}{\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)^3} = \frac{\left[\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)\right]^3}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)^2}$$

rationale Functionen von $\wp\left(\frac{\varpi}{6}\right)$, die sich gar nicht ändern, wenn man $\wp\left(\frac{\varpi}{6}\right)$ mit $\wp\left(\frac{5\varpi}{6}\right)$ vertauscht, folglich sind ξ_4 und ξ_5 Transformationsgrössen nullter Dimension, d. h. auch ξ_4 und ξ_5 sind *Parameter*.

---

*) $k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0,\ k_5 = +1$ giebt die Grösse ξ_1,
$k_0 = +1,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = -1,\ k_4 = 0,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = 0,\ k_1 = +1,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_4 = -1,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = +1,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = -1,\ k_1 = +1,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_5.

Deshalb besteht zwischen je zweien dieser Parameter mit dem Charakter 1 eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch Entwickelung nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{6}} = z$ bestimmen kann. Auf diese Weise findet man

$$(353)\quad \xi_2 = \frac{1-\xi_1}{3+\xi_1},\quad \xi_3 = \frac{1+\xi_1}{3-\xi_1},\quad \xi_4 = \frac{1-\xi_1}{4},\quad \xi_5 = \frac{2(1+\xi_1)}{1-\xi_1},$$

oder

$$(354)\quad \xi_1 = \frac{1-3\xi_2}{1+\xi_2},\quad \xi_3 = \frac{1-\xi_2}{1+3\xi_2},\quad \xi_4 = \frac{\xi_2}{1+\xi_2},\quad \xi_5 = \frac{1-\xi_2}{\xi_2}.$$

Jetzt kann man auch ohne Weiteres die übrigen L-Producte mit dem Charakter 1 angeben und aus ihrer Darstellung als rationale Functionen von ξ_1 schliessen, dass sie sämmtlich Parameter sind. Es wird nämlich

$$(355)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi_6 &= \frac{1+\xi_1}{2} = \xi_4\xi_5 = \frac{L(12)^2 L(3) L(2)^9}{L(6)^3 L(4)^6},\\
\xi_7 &= \frac{3+\xi_1}{4} = \frac{\xi_4}{\xi_2} = \frac{L(12) L(3)^3 L(2)^2}{L(6)^2 L(4)^3},\\
\xi_8 &= \frac{3-\xi_1}{2} = \frac{\xi_4\xi_5}{\xi_3} = \frac{L(6)^7}{L(12)^2 L(4)^2 L(3)^3 L(2)},\\
\xi_9 &= \frac{4\xi_1}{1-\xi_1} = \frac{\xi_1}{\xi_4} = \frac{L(12)^3 L(3) L(2)^2}{L(6)^2 L(4)},\\
\xi_{10} &= \frac{2\xi_1}{1+\xi_1} = \frac{\xi_1}{\xi_4\xi_5} = \frac{L(12)^2 L(6) L(4)^2}{L(3) L(2)^7},\\
\xi_{11} &= \frac{4\xi_1}{3+\xi_1} = \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_4} = \frac{L(12)^3}{L(4) L(3)^3},\\
\xi_{12} &= \frac{2\xi_1}{3-\xi_1} = \frac{\xi_1\xi_3}{\xi_4\xi_5} = \frac{L(12)^6 L(3)^3 L(2)^3}{L(6)^9 L(4)^2},\\
\xi_{13} &= \frac{1-\xi_1}{2(3-\xi_1)} = \frac{\xi_3}{\xi_5} = \frac{L(12)^8 L(3)^2 L(2)}{L(6)^7 L(4)},\\
\xi_{14} &= \frac{2(1+\xi_1)}{3+\xi_1} = \xi_2\xi_5 = \frac{L(12) L(2)^7}{L(6) L(4)^3 L(3)^2};\\
\xi_{15} &= \frac{3+\xi_1}{2(3-\xi_1)} = \frac{\xi_3}{\xi_2\xi_5} = \frac{L(12)^8 L(3)^6 L(2)^3}{L(6)^9 L(4)}.
\end{aligned}\right.$$

Es könnte überflüssig erscheinen, diese 10 Parameter wirklich zu bilden; ihre Form ist aber doch von Interesse, weil man mitunter durch Nachbildung derartiger Formen auch für andere Werthe von n Parameter findet.

Aus den Gleichungen (352) erhält man

$$(356)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_5^4}{\xi_3 \xi_4^4} = \dfrac{(1-\xi_2^2)^3(1-9\xi_2^2)}{\xi_2^6}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^4 \xi_3} = \dfrac{1-9\xi_2^2}{\xi_2^4(1-\xi_2^2)}, \\ L(6)^{24} = \dfrac{\xi_1^5 \xi_5^4}{\xi_2^2 \xi_3^5 \xi_4^4} = \dfrac{(1-9\xi_2^2)^5}{\xi_2^{10}(1-\xi_2^2)}. \end{cases}$$

Da

$$(357)\qquad \xi_2^2 = \xi_2(6)$$

ist, so stimmen diese Gleichungen genau mit den Gleichungen (267) überein. Ferner wird

$$(358)\quad \begin{cases} L(4)^8 = \dfrac{\xi_1 \xi_2}{\xi_4^4} = \dfrac{(1-3\xi_2)(1+\xi_2)^3}{\xi_2^3}, \\ L(12)^{24} = \dfrac{\xi_1^{11} \xi_2}{\xi_3^2 \xi_4^{12}} = \dfrac{(1-3\xi_2)^{11}(1+3\xi_2)^2(1+\xi_2)}{\xi_2^{11}(1-\xi_2)^2}. \end{cases}$$

Sehr einfach gestaltet sich schliesslich die Beziehung zwischen den absoluten Invarianten J und $\overline{J}$. Nach Gleichung (268) wird nämlich

$$(359)\quad \begin{cases} J : J-1 : 1 = (1-9\xi_2^2+3\xi_2^4-3\xi_2^6)^3(1-3\xi_2^2)^3 \\ \qquad : (1-12\xi_2^2+30\xi_2^4-36\xi_2^6+9\xi_2^8)^2(1-6\xi_2^2-3\xi_2^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_2^{12}(1-\xi_2^2)^3(1-9\xi_2^2). \end{cases}$$

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist

$$(360)\qquad \overline{\xi}_2 = \frac{\xi_1}{3},$$

folglich wird

$$(361)\quad \begin{cases} \overline{J} : \overline{J}-1 : 1 = (243-243\xi_1^2+9\xi_1^4-\xi_1^6)^3(3-\xi_1^2)^3 \\ \qquad : (729-972\xi_1^2+270\xi_1^4-36\xi_1^6+\xi_1^8)^2(27-18\xi_1^2-\xi_1^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_1^{12}(9-\xi_1^2)^3(1-\xi_1^2). \end{cases}$$

§ 38.

Transformation vom Grade 20.

Für $n = 20$ ist $a = 5$, $b = 2$ und $\varrho = 1$. Die Gleichungen (349) und (350) gehen daher über in

$$(362)\quad \begin{cases} -10\delta_1 - 15\delta_2 - 16\delta_3 - 18\delta_4 - 19\delta_5 = 24k_0, \\ +\ 5\delta_1 + 0 - 4\delta_3 - 3\delta_4 - 4\delta_5 = 24k_1, \\ +\ 5\delta_1 + 15\delta_2 - 4\delta_3 - 3\delta_4 - \delta_5 = 24k_2, \\ -\ 2\delta_1 - 3\delta_2 + 16\delta_3 + 6\delta_4 + \delta_5 = 24k_3, \\ +\ \delta_1 + 0 + 4\delta_3 + 9\delta_4 + 4\delta_5 = 24k_4, \\ +\ \delta_1 + 3\delta_2 + 4\delta_3 + 9\delta_4 + 19\delta_5 = 24k_5, \end{cases}$$

und

$$(363)\qquad \begin{cases} 3\delta_1 = -3k_0 + 12k_1 - 3k_2 + 0 - 3k_4, \\ 3\delta_2 = +k_0 - 4k_1 + 6k_2 + k_3 + 2k_4, \\ 3\delta_3 = -k_0 + k_1 + 0 + 5k_3 - 5k_4, \\ 3\delta_4 = +3k_0 + 0 + 3k_2 + 0 + 15k_4, \\ 3\delta_5 = -5k_0 - 4k_1 - 6k_2 - 5k_3 - 10k_4. \end{cases}$$

Die Anzahl der *Parameter* mit dem Charakter 2, welche man durch passende Wahl der ganzen Zahlen k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 erhält, ist ziemlich gross; deshalb mögen hier nur diejenigen hervorgehoben werden, welche schon bei der Transformation 10ten Grades Parameter mit dem Charakter 1 waren, nämlich

$$(364)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(10)^4}{L(5)^2 L(2)^4}, \quad \xi_2 = \dfrac{L(10)^2}{L(5)^4 L(2)^2}, \quad \xi_3 = \dfrac{L(10)}{L(5)\, L(2)^5}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(10)^3 L(2)}{L(5)}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(10)\, L(2)^3}{L(5)^3}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(10)^5}{L(5)^5 L(2)} \end{cases}$$

und ausserdem diejenigen, welche aus diesen durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ hervorgehen, nämlich

$$(365)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{L(20)^4 L(2)^2}{L(10)^2 L(4)^4}, \quad \eta_2 = \dfrac{L(20)^2 L(2)^4}{L(10)^4 L(4)^2}, \quad \eta_3 = \dfrac{L(20)\, L(2)^5}{L(10)\, L(4)^5}, \\ \eta_4 = \dfrac{L(20)^3 L(4)}{L(10)\, L(2)^3}, \quad \eta_5 = \dfrac{L(20)\, L(4)^3}{L(10)^3 L(2)}, \quad \eta_6 = \dfrac{L(20)^5 L(2)}{L(10)^5 L(4)}. \text{*)} \end{cases}$$

Diese 12 Grössen haben alle den Charakter 2, wie man aus der Anmerkung ersieht; ferner sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6 Parameter für die Transformation 10ten Grades, folglich sind sie erst recht Parameter für die Transformation 20ten Grades. Nach Gleichung (272) bestehen zwischen ihnen die Relationen

$$(366)\qquad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1-\xi_1}{5-\xi_1}, \quad \xi_3 = \dfrac{1-\xi_1}{4}, \quad \xi_4 = \dfrac{4\xi_1}{1-\xi_1}, \quad \xi_5 = \dfrac{4}{5-\xi_1}, \\ \xi_6 = \dfrac{4\xi_1}{5-\xi_1}. \end{cases}$$

*) Diese 12 Parameter erhält man, indem man für k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 die folgenden Werthe einsetzt:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6
k_0	0	$+2$	$+2$	-2	0	0	0	$+1$	$+1$	-1	0	0
k_1	-1	0	-1	0	$+1$	0	0	$+1$	$+1$	-1	0	0
k_2	-1	0	-1	0	$+1$	0	-2	0	-2	0	$+2$	0
k_3	0	-2	0	0	-2	-2	0	-1	0	0	-1	-1
k_4	$+1$	0	0	$+1$	0	$+1$	0	-1	0	0	-1	-1
k_5	$+1$	0	0	$+1$	0	$+1$	$+2$	0	0	$+2$	0	$+2$

Deshalb gelten auch die entsprechenden Gleichungen zwischen den Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_6$, nämlich

$$(367)\quad \begin{cases} \eta_2 = \dfrac{1-\eta_1}{5-\eta_1}, \quad \eta_3 = \dfrac{1-\eta_1}{4}, \quad \eta_4 = \dfrac{4\eta_1}{1-\eta_1}, \quad \eta_5 = \dfrac{4}{5-\eta_1}, \\ \qquad\qquad \eta_6 = \dfrac{4\eta_1}{5-\eta_1}. \end{cases}$$

Nun ist η_1 ein Parameter, weil die Exponenten sämmtlich *gerade* sind, folglich gilt wegen der Gleichungen (367) dasselbe auch von $\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ und η_6.

Zwischen ξ_3 und η_1 besteht eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_3^2+b\xi_3+c)\eta_1^2 + (a_1\xi_3^2+b_1\xi_3+c_1)\eta_1 + (a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten sehr leicht bestimmen kann, indem man ξ_3 und η_1 nach Potenzen von $h^{\frac{1}{10}} = z$ entwickelt. Es ist nämlich

$$\xi_3 = z^2 - z^4 + 0 - z^8 + z^{10} + 4z^{12} + \cdots,$$
$$\eta_1 = 1 - 4z + 4z^2 + 0 + 4z^4 - 4z^5 - 16z^6 + 16z^7 + 4z^8 + 12z^9 - 12z^{10} + \cdots;$$

daraus ergiebt sich

$$(368)\qquad \eta_1^2 - 2(8\xi_3^2+4\xi_3+1)\eta_1 + (16\xi_3^2-8\xi_3+1) = 0,$$

oder

$$(368\text{a})\qquad \eta_1 = 8\xi_3^2 + 4\xi_3 + 1 - 4w,$$

wo

$$(369)\qquad w = +\sqrt{\xi_3(\xi_3+1)(4\xi_3^2+1)} = +z+\cdots.$$

Daraus folgt noch

$$(370)\qquad \eta_6 = \frac{4\eta_1}{5-\eta_1} = \frac{(1+\xi_3)(1+6\xi_3)-5w}{(1+\xi_3)(1-4\xi_3)}.$$

Nach den Gleichungen (273) wird

$$(371)\qquad L(2)^{24} = \frac{1-4\xi_3}{\xi_3^5(1+\xi_3)}, \quad L(5)^6 = \frac{(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2}{\xi_3^2},$$
$$L(10)^8 = \frac{(1-4\xi_3)^3(1+\xi_3)}{\xi_3^3};$$

ferner ist

$$(372)\quad \begin{cases} L(4)^8 = \dfrac{\xi_1\eta_5}{\xi_3^2\eta_3} = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3^2}\,\dfrac{16}{(1-\eta_1)(5-\eta_1)}, \\ L(20)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2\eta_1^9}{\xi_3^6\eta_3^9\eta_5^3} = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3^5(1+\xi_3)}\cdot\dfrac{2^{12}\eta_1^9(5-\eta_1)^3}{(1-\eta_1)^9}. \end{cases}$$

Nach Gleichung (274) wird schliesslich

$$(373)\quad \begin{cases} J:J-1:1 = (1-4\xi_3+16\xi_3^5+16\xi_3^6)^3 \\ \quad :(1+4\xi_3^2)(1-2\xi_3+2\xi_3^2)^2(1-2\xi_3-4\xi_3^2)^2(1-2\xi_3-6\xi_3^2-8\xi_3^3-4\xi_3^4)^2 \\ \quad :1728\,\xi_3^{10}(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2. \end{cases}$$

Nun ist der zu ξ_3 complementäre Parameter

$$(374) \qquad \bar{\xi}_3 = \frac{\eta_6}{4} = \frac{(1+\xi_3)(1+6\xi_3) - 5w}{4(1+\xi_3)(1-4\xi_3)},$$

so dass man erhält

$$(375) \begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (1 - 4\bar{\xi}_3 + 16\bar{\xi}_3^5 + 16\bar{\xi}_3^6)^3 \\ \qquad : (1+4\bar{\xi}_3^2)(1 - 2\bar{\xi}_3 + 2\bar{\xi}_3^2)^2 (1 - 2\bar{\xi}_3 - 4\bar{\xi}_3^2)^2 \\ \qquad \times (1 - 2\bar{\xi}_3 - 6\bar{\xi}_3^2 - 8\bar{\xi}_3^3 - 4\bar{\xi}_3^4)^2 \\ \qquad : 1728\bar{\xi}_3^{10}(1 - 4\bar{\xi}_3)(1+\bar{\xi}_3)^2. \end{cases}$$

Die Gleichung, welche dabei zwischen ξ_3 und $\bar{\xi}_3$ besteht, folgt aus Gleichung (374), es wird nämlich

$$(374\text{a}) \quad 16(1+\xi_3)(1-4\xi_3)\bar{\xi}_3^2 - 8(1+\xi_3)(1+6\xi_3)\bar{\xi}_3 + (1-4\xi_3)^2 = 0;$$

sie ist in Bezug auf ξ_3 und $\bar{\xi}_3$ symmetrisch.

§ 39.

Transformation vom Grade 28.

Für $n = 28$ ist $a = 7$, $b = 3$ und $\varrho = 2$. Deshalb gehen die Gleichungen (350) über in

$$(376) \begin{cases} 6\delta_1 = -4k_0 + 17k_1 - 4k_2 + 0 - 3k_4, \\ 6\delta_2 = +k_0 - 6k_1 + 8k_2 + k_3 + 2k_4, \\ 6\delta_3 = -k_0 + k_1 + 0 + 7k_3 - 7k_4, \\ 6\delta_4 = +4k_0 + k_1 + 4k_2 + 0 + 21k_4, \\ 6\delta_5 = -7k_0 - 6k_1 - 8k_2 - 7k_3 - 14k_4. \end{cases}$$

Hieraus findet man zunächst 2 L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(377) \qquad \xi_1 = \frac{L(28)\,L(4)}{L(7)}, \quad \xi_2 = \frac{L(28)^2 L(7) L(4)^2}{L(14)^3 L(2)^3},$$

und 5 L-Producte mit dem Charakter 3, nämlich

$$(378) \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{L(28) L(14)^2 L(4)}{L(7) L(2)^2}, \quad \xi_4 = \dfrac{L(14)^2}{L(2)^2}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(14)^2 L(7)}{L(28)\,L(4)\,L(2)^2}, \\ \xi_6 = \dfrac{L(28)^4 L(2)^2}{L(14)^2 L(4)^4}, \qquad \xi_7 = \dfrac{L(28)^2 L(7) L(4)^2}{L(14)^5 L(2)}. \text{*)} \end{cases}$$

Zum Beweise, dass ξ_1 ein Parameter ist, bilde man mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (15)

*) Die 7 Hülfsgrössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_7$ erhält man, indem man für $k_0, k_1, \ldots k_5$ die folgenden Werthe einsetzt:

$$\frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{\wp\left(\frac{2\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{5\varpi}{7}\right)}\cdot\frac{\wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{\wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{3\varpi}{7}\right)}\cdot\frac{\wp\left(\frac{6\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{\wp\left(\frac{6\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\tau\left(\frac{\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{3\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{9\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{11\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{13\varpi}{14}\right)\cdot\tau\left(\frac{\varpi}{7}\right)\tau\left(\frac{3\varpi}{7}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{7}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{2}\right)^{6}\,\tau(\varpi)^{3}}=\frac{f(28)}{f(7)\,f(4)^{7}}.$$

Dies ist eine rationale Function von $\wp\left(\frac{\varpi}{14}\right)$, die sich gar nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{\varpi}{14}\right)$ mit einem der Theilwerthe

$$\wp\left(\frac{3\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{5\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{9\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{11\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{13\varpi}{14}\right)$$

vertauscht, folglich ist dieser Ausdruck eine Transformationsgrösse nullter Dimension d. h. also ein Parameter. Ebenso ist auch $L(4)^8$ ein Parameter, denn es ist

$$L(4)^8=\frac{g_2^3-27g_3^2}{\wp'\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2\left[\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)-\wp(\varpi)\right]^3}.$$

Deshalb ist auch

$$\xi_1=L(4)^8\,\frac{f(28)}{f(7)\,f(4)^7}$$

ein Parameter und hat den Charakter 2. Bei ξ_4 und ξ_6 sind die Exponenten gerade, folglich sind ξ_4 und ξ_6 Parameter mit dem Charakter 3. Dasselbe gilt von ξ_3 und ξ_5, denn es ist

(379) $$\xi_3=\xi_1\xi_4,\quad \xi_4=\xi_1\xi_5.$$

Die Form der Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_3 ist daher

(380) $$\begin{cases}(a\xi_1^3+b\xi_1^2+c\xi_1+d)\xi_3^2+(a_1\xi_1^3+b_1\xi_1^2+c_1\xi_1+d_1)\xi_3\\ \qquad\qquad+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2)=0.\end{cases}$$

Dies giebt ausserdem die Gleichungen

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7
k_0	-1	0	-2	-1	0	0	$+1$
k_1	0	-1	-1	-1	-1	0	0
k_2	$+1$	$+1$	0	-1	-2	-3	$+2$
k_3	-1	0	0	$+1$	$+2$	0	-1
k_4	0	-1	$+1$	$+1$	$+1$	0	-2
k_5	$+1$	$+1$	$+2$	$+1$	0	$+3$	0

$$(a\xi_1^5+b\xi_1^4+c\xi_1^3+d\xi_1^2)\xi_4^2+(a_1\xi_1^4+b_1\xi_1^3+c_1\xi_1^2+d_1\xi_1)\xi_4$$
$$+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2)=0,$$
$$(a\xi_1^7+b\xi_1^6+c\xi_1^5+d\xi_1^4)\xi_5^2+(a_1\xi_1^5+b_1\xi_1^4+c_1\xi_1^3+d_1\xi_1^2)\xi_5$$
$$+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2)=0,$$

aus denen hervorgeht, dass

$$a=0,\quad b=0,\quad c_2=0,\quad d_2=0$$

sein muss. Die Gleichung (380) reducirt sich daher auf

(380a) $$(c\xi_1+d)\xi_3^2+(a_1\xi_1^3+b_1\xi_1^2+c_1\xi_1+d_1)\xi_3+(a_2\xi_1+b_2)\xi_1^2=0.$$

Setzt man $h^{\frac{1}{14}}=z$, so wird

$$\xi_1=z^{-1}-1-z+0+z^3+0-z^5+0+3z^7+0-2z^9+0+2z^{11}+\cdots,$$
$$\xi_3=z^{-2}-z^{-1}-3+2z+2z^2+z^3+0-2z^5+3z^6-z^7-4z^8-2z^9$$
$$-2z^{10}+\cdots,$$

folglich geht die Gleichung (380a) über in

(381) $$(\xi_1+2)\xi_3^2-(\xi_1^3+3\xi_1^2-6\xi_1-8)\xi_3-7\xi_1^2(\xi_1+2)=0,$$

oder

(381a) $$2(\xi_1+2)\xi_3=\xi_1^3+3\xi_1^2-6\xi_1-8+w,$$

wo

(382) $$\begin{cases} w=+\sqrt{(\xi_1+1)^6+10(\xi_1+1)^4+25(\xi+1)^2+28} \\ \quad=+\sqrt{(\xi_1^2+\xi_1+2)(\xi_1^2+2\xi_1+8)(\xi_1^2+3\xi_1+4)} \\ \quad=+z^{-3}+\cdots. \end{cases}$$

Dies giebt auch noch die Gleichung

(383) $$2\xi_1(\xi_1+2)\xi_4=\xi_1^3+3\xi_1^2-6\xi_1-8+w.$$

In ähnlicher Weise findet man die Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_6, nämlich

(384) $$\xi_1^3\xi_6^2+2(3\xi_1^3+16\xi_1^2+24\xi_1+32)\xi_6-7\xi_1^3=0,$$

oder

(384a) $$\xi_1^3\xi_6=-(3\xi_1^3+16\xi_1^2+24\xi_1+32)+4w.$$

Da nun

(385) $$\xi_4\xi_6=\frac{L(28)^4}{L(4)^4}$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (381a) und (384a) durch Multiplication

(386) $$\begin{cases} 2\xi_1^4(\xi_1+2)\frac{L(28)^4}{L(4)^4} \\ =(\xi_1^6-\xi_1^5+46\xi_1^4+256\xi_1^3+576\xi_1^2+768\xi_1+512) \\ +(\xi_1+4)(\xi_1^2-8\xi_1-16)w. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

(387) $$L(7)^4=\eta,$$

so werden die zu ξ_1 und η complementären Parameter

(388) $$\bar{\xi}_1 = \frac{4}{\xi_1} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{49\,L(4)^4}{L(28)^4} = \frac{49}{\xi_4\xi_6}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (386)

(389) $$\begin{cases} 2\xi_1^4(\xi_1+2)\bar{\eta} = (\xi_1^6 - \xi_1^5 + 46\xi_1^4 + 256\xi_1^3 + 576\xi_1^2 + 768\xi_1 + 512) \\ \qquad - (\xi_1+4)(\xi_1^2 - 8\xi_1 - 16)w \end{cases}$$

und

(390) $$\begin{cases} 2\xi_1(\xi_1+2)\eta = (\xi_1^6 + 6\xi_1^5 + 18\xi_1^4 + 32\xi_1^3 + 23\xi_1^2 - 2\xi_1 + 8) \\ \qquad + (\xi_1+1)(\xi_1^2 + 2\xi_1 - 1)w. \end{cases}$$

Die Beziehung zwischen den beiden absoluten Invarianten J und $\bar{J}$ ergiebt sich daher unmittelbar aus Gleichung (146) m. vor. Abh., und zwar wird

(391) $$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^2 + 13\eta + 49)(\eta^2 + 5\eta + 1)^3 \\ \qquad : (\eta^4 + 14\eta^3 + 63\eta^2 + 70\eta - 7)^2 : 1728\eta, \end{cases}$$

(392) $$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^2 + 13\bar{\eta} + 49)(\bar{\eta}^2 + 5\bar{\eta} + 1)^3 \\ \qquad : (\bar{\eta}^4 + 14\bar{\eta}^3 + 63\bar{\eta}^2 + 70\bar{\eta} - 7)^2 : 1728\bar{\eta}. \end{cases}$$

Wenn man also die Werthe von η und $\bar{\eta}$ aus den Gleichungen (390) und (389) einsetzt, so sind J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von ξ_1 und w dargestellt.

Setzt man noch

(393) $$\eta_1 = \frac{L(14)}{L(7)\,L(2)^7} = \xi_4(14),$$

so ist η_1 sicher ein Parameter für die Transformation 14^{ten} Grades, also auch für die Transformation 28^{ten} Grades; dabei ist der Charakter von η_1 gleich 4. Deshalb findet man zwischen ξ_1 und η_1 die Gleichung

(394) $\xi_1^2(\xi_1+2)^2\eta_1^2 - (\xi_1^4 + 4\xi_1^3 + 11\xi_1^2 + 14\xi_1 + 8)\eta_1 + 1 = 0,$

oder

(394 a) $2\xi_1^2(\xi_1+2)^2\eta_1 = (\xi_1^4 + 4\xi_1^3 + 11\xi_1^2 + 14\xi_1 + 8) - (\xi_1+1)w.$

Daraus folgt dann

(395) $$\begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_4^2}{\eta\eta_1^4}, \quad 49\,L(4)^8 = \xi_1^4\eta\bar{\eta}, \\ L(14)^{24} = \dfrac{\xi_4^{14}}{\eta\eta_1^4}, \quad L(28)^8 = \dfrac{49\,\xi_1^4\eta}{\bar{\eta}}, \end{cases}$$

so dass man diese Grössen ohne Schwierigkeit als rationale Functionen von ξ_1 und w darstellen kann.

Da ϱ in diesem Falle gleich 2 ist, so müssen alle Parameter mit dem Charakter 2 *linear* von einander abhängig sein; es besteht daher auch zwischen ξ_1 und ξ_2 eine *lineare* Gleichung, nämlich

(396) $$(\xi_1+2)\xi_2 = \xi_1.$$

VIII. Abschnitt.

Transformation vom Grade $2^\alpha a$.

§ 40.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $8a$.

Ist a eine Primzahl von der Form $2b+1$, so wird für $n=8a$ der Rang $\varrho = a-2$, während für $n=4a$ der Rang $\varrho_1 = \frac{a-3}{2}$ war.

Es sei nun

$$\xi(4a) = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(a)^{\delta_3} L(2a)^{\delta_4} L(4a)^{\delta_5}$$

ein Parameter für die Transformation vom Grade $4a$, und der Charakter von $\xi(4a)$ sei ch; dann kann man durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ aus $\xi(4a)$ sogleich einen Parameter $\xi(8a)$ mit dem Charakter $2ch$ herleiten.

Setzt man nämlich

$$\delta = -\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - \delta_5, \tag{397}$$

so wird

$$\xi(8a) = L(2)^{\delta} L(4)^{\delta_1} L(8)^{\delta_2} L(2a)^{\delta_3} L(4a)^{\delta_4} L(8a)^{\delta_5}. \tag{398}$$

Dabei ergiebt sich der Charakter von $\xi(4a)$ aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}
-2a\delta_1 - 3a\delta_2 - 4(a-1)\delta_3 - 2(2a-1)\delta_4 - (4a-1)\delta_5 = 24k_0,\\
+a\delta_1 + 0 - (a-1)\delta_3 - (a-2)\delta_4 - (a-1)\delta_5 = 24k_1,\\
+a\delta_1 + 3a\delta_2 - (a-1)\delta_3 - (a-2)\delta_4 - (a-4)\delta_5 = 24k_2,\\
-2\delta_1 - 3\delta_2 + 4(a-1)\delta_3 + 2(a-2)\delta_4 - (a-4)\delta_5 = 24k_3,\\
+\delta_1 + 0 + (a-1)\delta_3 + (2a-1)\delta_4 + (a-1)\delta_5 = 24k_4,\\
+\delta_1 + 3\delta_2 + (a-1)\delta_3 + (2a-1)\delta_4 + (4a-1)\delta_5 = 24k_5.
\end{array}\right. \tag{399}$$

Für $\xi(8a)$ sind dagegen die entsprechenden Gleichungen, wenn man die Relationen (397) berücksichtigt,

$$\left\{\begin{array}{l}
-2a\delta_1 - 3a\delta_2 - 4(a-1)\delta_3 - 2(2a-1)\delta_4 - (4a-1)\delta_5 = 24l_0 = 24k_0,\\
-2a\delta_1 - 3a\delta_2 - 4(a-1)\delta_3 - 2(2a-1)\delta_4 - (4a-1)\delta_5 = 24l_1 = 24k_0,\\
+2a\delta_1 + 0 - 2(a-1)\delta_3 - 2(a-2)\delta_4 - 2(a-1)\delta_5 = 24l_2 = 48k_1,\\
+2a\delta_1 + 6a\delta_2 - 2(a-1)\delta_3 - 2(a-2)\delta_4 - 2(a-4)\delta_5 = 24l_3 = 48k_2,\\
-2\delta_1 - 3\delta_2 + 4(a-1)\delta_3 + 2(a-2)\delta_4 + (a-4)\delta_5 = 24l_4 = 24k_3,\\
-2\delta_1 - 3\delta_2 + 4(a-1)\delta_3 + 2(a-2)\delta_4 + (a-4)\delta_5 = 24l_5 = 24k_3,\\
+2\delta_1 + 0 + 2(a-1)\delta_3 + 2(2a-1)\delta_4 + 2(a-1)\delta_5 = 24l_6 = 48k_4,\\
+2\delta_1 + 6a\delta_2 + 2(a-1)\delta_3 + 2(2a-1)\delta_4 + 2(4a-1)\delta_5 = 24l_7 = 48k_5.
\end{array}\right. \tag{400}$$

Es ist also

$$l_0 + l_1 = 2k_0, \quad l_2 = 2k_1, \quad l_3 = 2k_2, \quad l_4 + l_5 = 2k_3, \quad l_6 = 2k_4, \quad l_7 = 2k_5,$$

d. h. der Charakter von $\xi(8a)$ für die Transformation vom Grade $8a$ ist genau doppelt so gross wie der von $\xi(4a)$ für die Transformation vom Grade $4a$. Ist z. B. der Charakter von $\xi(4a)$, nämlich

$$ch \leqq \frac{\varrho_1+2}{2} = \frac{a+1}{4},$$

so ist der Charakter von $\xi(8a)$ für die Transformation vom Grade $8a$

$$2ch \leqq \frac{a+1}{2} = \frac{\varrho+3}{2},$$

also im Allgemeinen möglichst niedrig, wenn der von $\xi(4a)$ möglichst niedrig ist.

Auch die weiteren Rechnungen lassen sich jetzt verhältnissmässig einfach durchführen. Ist nämlich $\xi(2a)$ irgend ein Parameter für die Transformation vom Grade $2a$, so findet man bei der Transformation vom Grade $4a$ eine Gleichung

$$F(\xi(2a),\ \xi(4a)) = 0. \tag{401}$$

Indem man nun ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht, geht

$$\xi(2a) \text{ in } \xi_1(4a) \quad \text{und} \quad \xi(4a) \text{ in } \xi(8a)$$

über, wodurch man aus der Gleichung (401)

$$F(\xi_1(4a),\ \xi(8a)) = 0 \tag{402}$$

erhält. Ist dabei

$$\xi(2a) = L(2)^{\varepsilon_1} L(a)^{\varepsilon_2} L(2a)^{\varepsilon_3}, \tag{403}$$

so setze man

$$\delta_1 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3), \quad \delta_2 = \varepsilon_1, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_4 = \varepsilon_2, \quad \delta_5 = \varepsilon_3.$$

Dadurch wird nach den früheren Angaben

$$\xi_1(4a) = \xi(4a) = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(2a)^{\delta_4} L(4a)^{\delta_5},$$
$$\xi(8a) = L(4)^{\delta_1} L(8)^{\delta_2} L(4a)^{\delta_4} L(8a)^{\delta_5},$$

und der Charakter von $\xi(4a)$ wird doppelt so gross als der Charakter von $\xi(2a)$ für die Transformation vom Grade $2a$. Da zwischen $\xi(4a)$ und $\xi(8a)$ dieselbe Gleichung besteht wie zwischen $\xi(2a)$ und $\xi(4a)$, so ist jede weitere Rechnung vermieden.

§ 41.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $16a$.

Ist a wieder eine Primzahl von der Form $2b+1$ und $n = 16a$, so wird der Rang ϱ gleich $4b-1$, also $\frac{1}{2}(\varrho+3) = 2b+1 = a$. In diesem Falle lässt sich der folgende Satz beweisen: *Ist*

(407) $\quad \xi(8a) = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(8)^{\delta_3} L(a)^{\delta_4} L(2a)^{\delta_5} L(4a)^{\delta_6} L(8a)^{\delta_7}$

ein Parameter mit dem Charakter ch für die Transformation vom Grade $8a$, *und geht* $\xi(16a)$ *aus* $\xi(8a)$ *durch Vertauschung von* ϖ *mit* $\frac{\varpi}{2}$ *hervor, so ist* $\xi(16a)$ *für die Transformation vom Grade* $16a$ *ein Parameter mit dem Charakter* $2ch$.

Der Beweis wird in ganz ähnlicher Weise geführt wie bei dem entsprechenden Satze im vorhergehenden Paragraphen. Setzt man nämlich nach Gleichung (124)

$$(A_\nu) S(8a, D_\nu) = 24 \cdot 8a k_\nu, \tag{408}$$

wobei $A_\nu D_\nu = 8a$, und wo D_ν die Werthe

$$D_0 = 1,\ D_1 = 2,\ D_2 = 4,\ D_3 = 8,\ D_4 = a,\ D_5 = 2a,\ D_6 = 4a,$$
$$D_7 = 8a$$

annimmt, und setzt man dem entsprechend

$$(A_\nu') S(16a, D_\nu') = 24 \cdot 16a l_\nu, \tag{409}$$

wobei $A_\nu' D_\nu' = 16a$, und wo D_ν' die Werthe

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a$$

annimmt, so findet man

$$\begin{cases} l_0 = k_0, & l_1 = k_0, & l_2 = 2k_1, & l_3 = 2k_2, & l_4 = 2k_3, \\ l_5 = k_4, & l_6 = k_4, & l_7 = 2k_5, & l_8 = 2k_6, & l_9 = 2k_7. \end{cases} \tag{410}$$

Daraus folgt, dass der Charakter von $\xi(16a)$ genau doppelt so gross st wie der Charakter von $\xi(8a)$.

§ 42.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $2^\alpha . a$.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf den allgemeinen Fall übertragen, wo $n = 2^\alpha \cdot a$ und $\alpha \geqq 2$ ist. Dadurch findet man auch sofort die Gleichungen, welche man bei der Transformation vom Grade $2^\alpha \cdot a$ braucht. Ist nämlich $\xi\left(\frac{n}{4}\right)$ ein Parameter mit möglichst niedrigem Grade für die Transformation vom Grade $\frac{n}{4}$, und geht $\xi\left(\frac{n}{4}\right)$ bez. in $\xi\left(\frac{n}{2}\right)$ und $\xi(n)$ über, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ und $\frac{\varpi}{4}$ vertauscht, so folgt aus der Gleichung

$$F\left(\xi\left(\frac{n}{4}\right),\ \xi\left(\frac{n}{2}\right)\right) = 0$$

unmittelbar die Gleichung

$$F\left(\xi\left(\frac{n}{2}\right),\ \xi(n)\right) = 0.$$

Beispiel. Es sei

$$(411)\qquad \xi(n) = \frac{L\left(\frac{n}{2a}\right)^2 L(n)^4}{L\left(\frac{n}{a}\right)^4 L\left(\frac{n}{2}\right)^2},$$

dann ist $\xi(n)$ ein Parameter, und es wird

$$D_1 = \frac{n}{2a},\quad D_2 = \frac{n}{a},\quad D_3 = \frac{n}{2},\quad D_4 = n$$

und

$$(412)\quad \begin{cases} S(n,D) = 4a\left(t_1^2 - \frac{n}{2a}\right) - 4a\left(t_2^2 - \frac{n}{a}\right) - 4\left(t_3^2 - \frac{n}{2}\right) + 4(t_4^2 - n) \\ \qquad = 4a(t_1^2 - t_2^2) - 4(t_3^2 - t_4^2). \end{cases}$$

Für $D = 1, 2, 4, \ldots 2^{\alpha-1}$ wird daher

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = D,$$

also

$$S(n, D) = 0.$$

Ebenso wird für $D = a, 2a, 4a, \ldots 2^{\alpha-1}a = \frac{n}{2}$

$$t_1 = t_2 = \frac{D}{a},\quad t_3 = t_4 = D$$

und deshalb

$$S(n, D) = 0.$$

Dagegen wird für $D = 2^\alpha = \frac{n}{a}$

$$t_1 = \frac{n}{2a},\ t_2 = \frac{n}{a},\ t_3 = \frac{n}{2a},\ t_4 = \frac{n}{a},$$

also

$$S\left(n, \frac{n}{a}\right) = -\frac{3n^2(a-1)}{a^2},\quad (A)\ S\left(n, \frac{n}{a}\right) = -\frac{3n^2(a-1)}{a} = 24nk_\alpha,$$

folglich ist

$$(413)\qquad k_\alpha = -2^{\alpha-3}(a-1) = -2^{\alpha-2}b.$$

Endlich wird noch für $D = n$

$$t_1 = \frac{n}{2a},\quad t_2 = \frac{n}{a},\quad t_3 = \frac{n}{2},\quad t_4 = n,$$

$$S(n, n) = \frac{3n^2(a-1)}{a} = 24nk_{2\alpha},$$

oder

$$(414)\qquad k_{2\alpha} = +2^{\alpha-3}(a-1) = +2^{\alpha-2}b.$$

Daraus ergiebt sich, dass der Charakter von ξ gleich $2^{\alpha-2}b$ ist. Man erhält auf diese Weise

für $n=$	$4a,$	$8a,$	$16a,$	$32a,$	$64a,$	$128a,$	$256a,$	$512a, \ldots,$
$\varrho+1=$	$b,$	$2b,$	$4b,$	$8b+2,$	$16b+6,$	$32b+18,$	$64b+42,$	$128b+98, \ldots,$
$ch=$	$b,$	$2b,$	$4b,$	$8b,$	$16b,$	$32b,$	$64b,$	$128b, \ldots.$

Dabei hat $\xi(n)$ die gewünschte Form, denn man erhält die Parameter $\xi\left(\frac{n}{2}\right)$ und $\xi(n)$ durch Vertauschung von ϖ bez. mit $\frac{\varpi}{2}$ und $\frac{\varpi}{4}$ aus $\xi\left(\frac{n}{4}\right)$.

§ 43.

Transformation vom Grade 24.

Für $n = 24$ wird $\varrho = 1$ und der in dem vorhergehenden Paragraphen angeführte Parameter

(415) $$\xi = \frac{L(24)^4 L(4)^2}{L(12)^2 L(8)^4}.$$

Ausserdem mögen hier noch die beiden Parameter

(416) $$\xi_1 = \frac{L(12)^4 L(2)^2}{L(6)^2 L(4)^4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{L(6)^2}{L(3)^4 L(2)^2}$$

hervorgehoben werden, die nach Gleichung (352) auch schon Parameter für die Transformation 12^{ten} Grades waren, und zwischen denen nach Gleichung (353) oder (354) die Beziehung

(417) $$\xi_2 = \frac{1-\xi_1}{3+\xi_1} \quad \text{oder} \quad \xi_1 = \frac{1-3\xi_2}{1+\xi_2}$$

besteht. Jetzt ist aber nach Gleichung (265) und (266a) für die Transformation 6^{ten} Grades

$$\xi_1(6) = \frac{L(6)^8}{L(3)^4 L(2)^8} = \frac{1-9\xi_2(6)}{1-\xi_2(6)},$$

wobei

$$\xi_2(6) = \frac{L(6)^4}{L(3)^8 L(2)^4} = \xi_2^{\,2}$$

ist, folglich ist

(418) $$\xi_1(6) = \frac{1-9\xi_2^{\,2}}{1-\xi_2^{\,2}} = \frac{\xi_1(3-\xi_1)}{1+\xi_1}.$$

Vertauscht man jetzt ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$, so geht

$$\xi_1(6) \text{ in } \xi_1^{\,2} \quad \text{und} \quad \xi_1 \text{ in } \xi$$

über, folglich wird

(419) $$\xi_1^{\,2} = \frac{\xi(3-\xi)}{1+\xi} = \frac{\xi(1+\xi)(3-\xi)}{(1+\xi)^2}$$

und

(419a) $$\xi_1 = \frac{w}{1+\xi}, \quad \text{wo} \quad w = +\sqrt{\xi(1+\xi)(3-\xi)} = 2 + \cdots;$$

(420) $$\xi_2 = \frac{1+\xi-w}{3+3\xi+w} = \frac{3+6\xi-\xi^2-4w}{(3+\xi)^2}.$$

Durch die Gleichungen (356) und (358) sind $L(2)^{24}$, $L(3)^{12}$, $L(6)^{24}$, $L(4)^8$ und $L(12)^{24}$ als rationale Functionen von ξ_2 dargestellt.

Mit Rücksicht auf Gleichung (420) kann man daher diese Grössen auch als rationale Functionen von ξ und w darstellen.

Vertauscht man noch in der Gleichung

$$L(12)^{24} = \frac{(1-3\xi_2)^{11}(1+3\xi_2)^2(1+\xi_2)}{\xi_2^{11}(1-\xi_2)^2} = \frac{2^{24}\xi_1^{11}(3-\xi_1)^2}{(1-\xi_1)^{11}(1+\xi_1)^2(3+\xi_1)}$$

ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$, so erhält man

$$L(24)^{24} = 2^{24}L(2)^{24}\,\frac{\xi^{11}(3-\xi)^2}{(1-\xi)^{11}(1+\xi)^2(3+\xi)}. \tag{421}$$

Zwischen ξ_2 und J besteht die Gleichung (359), nämlich

$$\left\{\begin{aligned} J:J-1:1 &= (1-9\xi_2^2+3\xi_2^4-3\xi_2^6)^3(1-3\xi_2^2)^3\\ &:(1-12\xi_2^2+30\xi_2^4-36\xi_2^6+9\xi_2^8)^2(1-6\xi_2^2-3\xi_2^4)^2\\ &:1728\,\xi_2^{12}(1-\xi_2^2)^3(1-9\xi_2^2).\end{aligned}\right. \tag{422}$$

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi}{3},$$

folglich findet man aus Gleichung (422)

$$\left\{\begin{aligned} \bar{J}:\bar{J}-1:1 &= (243-243\xi^2+9\xi^4-\xi^6)^3(3-\xi^2)^3\\ &:(729-972\xi^2+270\xi^4-36\xi^6+\xi^8)^2(27-18\xi^2-\xi^4)^2\\ &:1728\,\xi^{12}(9-\xi^2)^3(1-\xi^2).\end{aligned}\right. \tag{423}$$

Die Gleichung, welche dabei zwischen ξ und ξ_2 besteht, heisst

$$(3+\xi)^2\xi_2^2 - 2(3+6\xi-\xi^2)\xi_2 + (1-\xi)^2 = 0; \tag{424}$$

sie wird symmetrisch in Bezug auf ξ_2 und $\bar{\xi}_2$, wenn man für ξ den Werth $3\bar{\xi}_2$ einsetzt.

§ 44.

Transformation vom Grade 48, 96, u. s. w.

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, erhält man auch die Transformation vom Grade 48, 96, u. s. w.

Setzt man nämlich für $n = 48$

$$\xi = \frac{L(48)^4L(8)^2}{L(24)^2L(16)^4},\quad \eta_1 = \frac{L(24)^4L(4)^2}{L(12)^2L(8)^4},\quad \xi_2 = \frac{L(6)^2}{L(3)^4L(2)^2}, \tag{425}$$

so bleibt die Gleichung (422) zwischen J und ξ_2 bestehen.

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist auch hier wieder

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi}{3},$$

so dass auch die Gleichung (423) bestehen bleibt. Da jetzt aber ξ anders definirt ist als in dem vorhergehenden Paragraphen, so muss man hier die Gleichung (424) ersetzen durch die *beiden* Gleichungen

$$(426)\quad \begin{cases}(3+\eta_1)^2\xi_2^2-2(3+6\eta_1-\eta_1^2)\xi_2+(1-\eta_1)^2=0,\\(1+\xi)\eta_1^2-\xi(3-\xi)=0.\end{cases}$$

Die absolute Invariante J ist daher eine rationale Function 12^ten Grades von ξ_2^2, $\overline{J}$ ist genau dieselbe rationale Function von $\frac{\xi^2}{9}$, während die Beziehung zwischen ξ und ξ_2 durch die beiden Gleichungen (426) gegeben ist.

Für $n=96$ müsste man setzen

$$(427)\quad \begin{cases}\xi\ =\dfrac{L(96)^4L(16)^2}{L(48)^2L(32)^4}, & \xi_2=\dfrac{L(6)^2}{L(3)^4L(2)^2},\\ \eta_1=\dfrac{L(24)^4L(4)^2}{L(12)^2L(8)^4}, & \eta_2=\dfrac{L(48)^4L(8)^2}{L(24)^2L(16)^2},\end{cases}$$

dann gelten auch jetzt noch die Gleichungen (422) und (423), während die Beziehung zwischen ξ und ξ_2 durch die *drei* Gleichungen

$$(428)\quad \begin{cases}(3+\eta_1)^2\xi_2^2-2(3+6\eta_1-\eta_1^2)\xi_2+(1-\eta_1)^2=0,\\(1+\eta_2)\eta_1^2-\eta_2(3-\eta_2)=0,\\(1+\xi)\eta_2^2-\xi(3-\xi)=0\end{cases}$$

gegeben ist.

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält für $n=2^\alpha\cdot 3$

$$(429)\quad \begin{cases}\xi\ =\dfrac{L(n)^4L\left(\frac{n}{6}\right)^2}{L\left(\frac{n}{2}\right)^2L\left(\frac{n}{3}\right)^4}, & \xi_2=\dfrac{L(6)^2}{L(3)^4L(2)^2},\\ \eta_\nu=\dfrac{L(2^\nu.12)^4L(2^\nu.2)^2}{L(2^\nu.6)^2L(2^\nu.4)^4} & (\nu=1,2,3,\ldots\alpha-3).\end{cases}$$

Die Gleichungen (422) und (423) gelten dann für alle Werthe von α, welche grösser als 3 sind, während die Beziehung zwischen ξ und ξ_2 durch die Gleichungen

$$(430)\quad \begin{cases}(3+\eta_1)^2\xi_2^2-2(3+6\eta_1-\eta_1^2)\xi_2+(1-\eta_1)^2=0,\\(1+\eta_{\nu+1})\eta_\nu^2-\eta_{\nu+1}(3-\eta_{\nu+1})=0,\\(1+\xi)\eta_{\alpha-3}^2-\xi(3-\xi)=0\end{cases}$$

gegeben ist.

§ 45.

Transformation vom Grade 40, 80 u. s. w.

Setzt man

$$(431)\quad \begin{cases}\eta\ =\dfrac{L(10)}{L(5)L(2)^5}, & \eta_1=\dfrac{L(10)^5}{L(5)^5L(2)},\\ \xi_1=\dfrac{L(20)^5L(2)}{L(10)^5L(4)}, & \xi_2=\dfrac{L(40)^5L(4)}{L(20)^5L(8)},\end{cases}$$

allgemein

(432) $$\xi_\nu = \frac{L(2^\nu \cdot 10)^5\, L(2^\nu)}{L(2^\nu \cdot 5)^5\, L(2^\nu \cdot 2)},$$

so gelten nach Gleichung (272) und nach Gleichung (370) die Relationen*)

(433) $$\eta_1 = \frac{1-4\eta}{1+\eta}, \quad \xi_1 = \frac{(1+\eta)(1+6\eta)-5w}{(1+\eta)(1-4\eta)},$$

wobei

(434) $$w = \sqrt{\eta(1+\eta)(1+4\eta^2)},$$

oder

(433a) $$(1+\eta)(1-4\eta)\,\xi_1{}^2 - 2(1+\eta)(1+6\eta)\,\xi_1 + (1-4\eta)^2 = 0.$$

Daraus folgt auch noch eine Gleichung zwischen ξ_1 und η_1, nämlich

(435) $$\eta_1\xi_1{}^2 - 2(2-\eta_1)\,\xi_1 + \eta_1{}^2 = 0.$$

Indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht, geht η_1 in ξ_1 und ξ_1 in ξ_2 über, folglich findet man aus Gleichung (435)

(436) $$\xi_1\xi_2{}^2 - 2(2-\xi_1)\,\xi_2 + \xi_1{}^2 = 0.$$

Ebenso erhält man die Gleichungen

(437) $$\begin{cases} \xi_2\xi_3{}^2 - 2(2-\xi_2)\,\xi_3 + \xi_2{}^2 = 0, \\ \xi_3\xi_4{}^2 - 2(2-\xi_3)\,\xi_4 + \xi_3{}^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Jetzt gelten die beiden Gleichungen

(438) $$\begin{cases} J : J-1 : 1 = (1-4\eta+16\eta^5+16\eta^6)^3 \\ \qquad : (1+4\eta^2)(1-2\eta+2\eta^2)^2(1-2\eta-4\eta^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (1-2\eta-6\eta^2-8\eta^3-4\eta^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\eta^{10}(1-4\eta)(1+\eta)^2, \end{cases}$$

und

(439) $$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (1-4\bar\eta+16\bar\eta^5+16\bar\eta^6)^3 \\ \qquad : (1+4\bar\eta^2)(1-2\bar\eta+2\bar\eta^2)^2(1-2\bar\eta-4\bar\eta^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (1-2\bar\eta-6\bar\eta^2-8\bar\eta^3-4\bar\eta^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\bar\eta^{10}(1-4\bar\eta)(1+\bar\eta)^2, \end{cases}$$

gleichviel ob es sich um die Transformation vom Grade 10, 20, 40, 80 oder allgemein $2^\alpha \cdot 5$ handelt. Auch hat η überall dieselbe Bedeutung; dagegen ist

---

*) Die Bezeichnungen sind hier so gewählt, dass die Grössen, welche in Gleichung (271), (272) und (364) bis (374a)

$$\xi_3, \quad \xi_6, \quad \eta_6$$

genannt wurden, hier bez.

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \xi_1$$

heissen.

$$(440)\quad \begin{cases} \bar{\eta}(10) = \frac{\eta_1}{4} = \frac{1-4\eta}{4(1+\eta)}, \\ 4\bar{\eta}(20) = \xi_1, \quad 4\bar{\eta}(40) = \xi_2, \quad 4\bar{\eta}(80) = \xi_3, \cdots, \\ 4\bar{\eta}(2^\alpha \cdot 5) = \xi_{\alpha-1}. \end{cases}$$

Die Beziehungen zwischen den Grössen η, η_1, ξ_1, ξ_2, $\cdots$ sind dabei durch die Gleichungen (433) bis (437) in der einfachsten Weise gegeben.

IX. Abschnitt.

Transformation vom Grade $3a$.

§ 46.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $3a$.

Ist a eine Primzahl von der Form $2b+1 = 6l \pm 1$ und $n = 3a$, so wird $\varrho = 2l - 1$. In diesem Falle erhält man also

$$(441)\qquad \xi = L(3)^{\delta_1} L(a)^{\delta_2} L(3a)^{\delta_3}$$

und

$$S(3a, D) = a\delta_1(t_1^2 - 3) + 3\delta_2(t_2^2 - a) + \delta_3(t_3^2 - 3a).$$

Dies giebt

$$(442)\quad \begin{cases} -2a\delta_1 - 3(a-1)\,\delta_2 - (3a-1)\,\delta_3 = 24k_0, \\ +2a\delta_1 - (a-1)\,\delta_2 - (a-3)\,\delta_3 = 24k_1, \\ -2\delta_1 + 3(a-1)\,\delta_2 + (a-3)\,\delta_3 = 24k_2, \\ +2\delta_1 + (a-1)\,\delta_2 + (3a-1)\,\delta_3 = 24k_3. \end{cases}$$

Für $a = 6l - 1$ erhält man hieraus

$$(443)\quad \begin{cases} 2l(3l-1)\,\delta_1 = -(3l-2)\,k_0 + 9lk_1 + 2k_2, \\ 2l(3l-1)\,\delta_2 = +(3l-2)\,k_0 + 3lk_1 + 2ak_2, \\ 2l(3l-1)\,\delta_3 = -(9l-2)\,k_0 - 9lk_1 - 2ak_2, \end{cases}$$

und für $a = 6l + 1$

$$(443\text{a})\quad \begin{cases} 2l(3l+1)\,\delta_1 = -(3l-1)\,k_0 + (9l+3)\,k_1 + 2k_2, \\ 2l(3l+1)\,\delta_2 = +(3l-1)\,k_0 + (3l+1)\,k_1 + 2ak_2, \\ 2l(3l+1)\,\delta_3 = -(9l+1)\,k_0 - (9l+3)\,k_1 - 2ak_2. \end{cases}$$

§ 47.

Transformation vom Grade 15.

Für $n = 15$ wird $a = 5$, $l = 1$, $\varrho = 1$, und die Gleichungen (443) gehen über in

$$
(444) \qquad \begin{cases} 4\delta_1 = - \;\; k_0 + 9k_1 + \;\; 2k_2, \\ 4\delta_2 = + \;\; k_0 + 3k_1 + 10k_2, \\ 4\delta_3 = - 7k_0 - 9k_1 - 10k_2, \end{cases}
$$

also

$$
(445) \qquad \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 3(k_1 + k_2), \quad \delta_1 + \delta_3 = -2(k_0 + k_2), \\ \qquad\qquad 2(\delta_2 + \delta_3) = -3(k_0 + k_1). \end{cases}
$$

Deshalb muss $k_0 + k_1$ durch 2 theilbar sein. Sobald man den Zahlen k_0, k_1, k_2 Werthe beigelegt hat, für welche δ_1 eine *ganze* Zahl ist, so liefern diese Werthe auch für δ_2 und δ_3 *ganze* Zahlen, wie man sofort aus den Gleichungen (445) erkennt. Dadurch findet man leicht die folgenden L-Producte mit dem Charakter 2

$$
(446) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(15)^3}{L(5)^3 L(3)^3}, \quad \xi_2 = \dfrac{L(15)^2 L(3)^2}{L(5)^2}, \quad \xi_3 = \dfrac{L(15)^5}{L(5)^5 L(3)}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(15)}{L(5)\, L(3)^5}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(15)^2 L(5)}{L(3)^4}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(15)^4}{L(5)\, L(3)^2}, \\ \xi_7 = \dfrac{L(15)\, L(3)}{L(5)^4}, \quad \xi_8 = L(15)\, L(5)^2 . L(3).\ ^{*)} \end{cases}
$$

Nach Gleichung (58) Nr. 5 ist

$$
R = \wp'\left(\frac{2\varpi}{15}\right) \wp'\left(\frac{4\varpi}{15}\right) \wp'\left(\frac{8\varpi}{15}\right) \wp'\left(\frac{14\varpi}{15}\right)
$$

eine Transformationsgrösse. Dabei wird aber

$$
\frac{1}{R} = \tau\left(\frac{2\varpi}{15}\right)^3 \tau\left(\frac{4\varpi}{15}\right)^3 \tau\left(\frac{8\varpi}{15}\right)^3 \tau\left(\frac{14\varpi}{15}\right)^3 = \frac{f(15)^3}{f(5)^3 f(3)^3},
$$

folglich ist

$$
\xi_1 = \frac{L(15)^3}{L(5)^3 L(3)^3} = \frac{(g_2{}^3 - 27 g_3{}^2) f(15)^3}{f(5)^3 f(3)^3}
$$

ein Parameter. Dasselbe gilt von ξ_2, denn bei ξ_2 sind die Exponenten sämmtlich gerade und auch die Bedingung

$$
\Sigma D(D-1)(D-2)\,\delta \equiv 0 \pmod{24}
$$

wird befriedigt. Deshalb sind auch

$$
(447) \qquad \xi_3 = \xi_1 \xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_4 = \frac{\xi_1}{\xi_2}
$$

---

*) Man erhält diese L-Producte, indem man für k_0, k_1, k_2, k_3 die folgenden Werthe einsetzt:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
k_0	$+1$	-1	0	$+2$	0	-1	$+1$	-2
k_1	-1	$+1$	0	-2	-2	-1	$+1$	0
k_2	-1	-1	-2	0	$+1$	0	-2	$+1$
k_3	$+1$	$+1$	$+2$	0	$+1$	$+2$	0	$+1$

Parameter, und zwar haben $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sämmtlich den Charakter 2.*)

Durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{2}{15}} = z$ findet man, dass zwischen ξ_1 und ξ_2 die Gleichung

$$\xi_1 \xi_2^2 + (\xi_1^2 + 5\xi_1 - 1)\xi_2 + 9\xi_1 = 0 \tag{448}$$

besteht. Dies giebt

$$2\xi_1\xi_2 = 1 - 5\xi_1 - \xi_1^2 + w, \tag{448a}$$

wobei

$$\begin{cases} w = +\sqrt{(1 + \xi_1 - \xi_1^2)(1 - 11\xi_1 - \xi_1^2)} \\ \quad = \sqrt{1 - 10\xi_1 - 13\xi_1^2 + 10\xi_1^3 + \xi_1^4}. \end{cases} \tag{449}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} 2\xi_1^5 L(3)^{12} = 2\xi_1^3\xi_2^3 \\ \qquad = (1 - 5\xi_1 - \xi_1^2)(1 - 10\xi_1 - 4\xi_1^2 + 10\xi_1^3 + \xi_1^4) \\ \qquad + (1 - 2\xi_1 - \xi_1^2)(1 - 8\xi_1 - \xi_1^2)\, w, \end{cases} \tag{450}$$

oder

$$\begin{cases} \xi_1^5 L(3)^{24} - (1 - 5\xi_1 - \xi_1^2)(1 - 10\xi_1 - 4\xi_1^2 + 10\xi_1^3 + \xi_1^4) L(3)^{12} \\ \qquad + 729\xi_1 = 0. \end{cases} \tag{450a}$$

Für $k_0 = -3,\ k_1 = -1,\ k_2 = +3,\ k_3 = +1$ erhält man noch den Parameter

$$\eta = L(5)^6, \tag{451}$$

dessen Charakter gleich 4 ist. Deshalb findet man durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von z die Gleichung

$$\xi_1^3 L(5)^{12} - (1 + \xi_1^2)(1 - 9\xi_1 - \xi_1^2) L(5)^6 + 125\xi_1 = 0, \tag{452}$$

oder

$$2\xi_1^3\eta = 2\xi_1^3 L(5)^6 = (1 + \xi_1^2)(1 - 9\xi_1 - \xi_1^2) + (1 - 4\xi_1 - \xi_1^2) w. \tag{452a}$$

Setzt man den Werth von $L(3)^{12}$ in die Gleichung (172), nämlich in

$$J : J - 1 : 1 = (L^{12} + 3)^3 (L^{12} + 27) : (L^{24} + 18 L^{12} - 27)^2 : 1728 L^{12},$$

---

*) Dagegen sind

$$\xi_5,\ \xi_6 = \xi_2\xi_5,\ \xi_7 = \frac{\xi_1}{\xi_5},\ \xi_8 = \frac{\xi_5}{\xi_4}$$

keine Parameter, weil

$$\frac{\xi_5}{\xi_2} = \frac{L(5)^3}{L(3)^6} = \frac{f(5)^3}{f(3)^6} = \frac{\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)^2}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{5}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{5}\right)}$$

als rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{15}\right)$ das Zeichen wechselt, wenn man $\wp\left(\frac{2\varpi}{15}\right)$ mit $\wp\left(\frac{4\varpi}{15}\right)$ vertauscht.

oder den Werth von $L(5)^6 = \eta$ in die Gleichung

(453) $J:J-1:1 = (\eta^2+10\eta+5)^3:(\eta^2+4\eta-1)^2(\eta^2+22\eta+125):1728\eta$

ein, so erhält man J als rationale Function von ξ_1 und w. Dies giebt

$$(454) \begin{cases} 1728\cdot 4[(1+\xi_1^2)(1-9\xi_1-\xi_1^2)+(1-4\xi_1-\xi_1^2)w]\,\xi_1^{15}J \\ \quad = [(1-18\xi_1+81\xi_1^2-8\xi_1^3-180\xi_1^4+18\xi_1^5+\xi_1^6+8\xi_1^7+\xi_1^8) \\ \qquad +(1-9\xi_1+\xi_1^3-\xi_1^4)(1-4\xi_1-\xi_1^2)w]^3. \end{cases}$$

Der zu ξ_1 complementäre Parameter ist wieder ξ_1, so dass man aus der Gleichung (454) auch $\bar{J}$ erhält, indem man $+w$ mit $-w$ vertauscht; oder mit anderen Worten: *J und $\bar{J}$ sind die Wurzeln derselben quadratischen Gleichung.*

Noch einfacher kann man die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ durch die Gleichung (453) und die Gleichung

(455) $\bar{J}:\bar{J}-1:1 = (\bar{\eta}^2+10\bar{\eta}+5)^3:(\bar{\eta}^2+4\bar{\eta}-1)^2(\bar{\eta}^2+22\bar{\eta}+125):1728\bar{\eta}$

darstellen, wobei

$$(456) \qquad \bar{\eta} = \frac{125\,L(3)^6}{L(15)^6} = \frac{125}{\xi_1^2\eta}$$

der zu η complementäre Parameter ist und aus dem für η gefundenen Werthe hervorgeht, indem man in Gleichung (452a) $+w$ mit $-w$ vertauscht.

Schliesslich ist noch

$$(457) \qquad L(15)^{12} = \xi_1^3\,L(3)^{12}\,L(5)^{12},$$

also gleichfalls eine rationale Function von ξ_1 und w.

§ 48.

Transformation vom Grade 21.

Für $n = 21$ wird $a = 7$, $l = 1$, $\varrho = 1$ und die Gleichungen (443a) gehen über in

$$(458) \begin{cases} 4\delta_1 = -\ \ k_0 + 6k_1 + \ \ k_2, \\ 4\delta_2 = +\ \ k_0 + 2k_1 + 7k_2, \\ 4\delta_3 = -5k_0 - 6k_1 - 7k_2, \end{cases}$$

also

$$(459) \qquad \delta_1+\delta_2 = 2(k_1+k_2), \quad \delta_2+\delta_3 = -(k_0+k_1), \\ 2(\delta_1+\delta_3) = -3(k_0+k_2).$$

Deshalb muss k_0+k_2 eine *gerade* Zahl sein. Sind die ganzen Zahlen k_0, k_1, k_2 so bestimmt, dass δ_2 eine *ganze* Zahl wird, so sind auch δ_1 und δ_3 *ganze* Zahlen. Dadurch erhält man 8 L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(460)\quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{L(21)^2}{L(7)^2 L(3)^2}, & \xi_2 = \frac{L(21)\,L(7)}{L(3)}, \quad \xi_3 = L(21)\,L(3)^2, \\ \xi_4 = \frac{L(21)^2 L(3)}{L(7)^3}, & \xi_5 = \frac{L(7)}{L(3)^3}, \quad \xi_6 = \frac{L(21)^3}{L(7)\,L(3)^3}, \\ \xi_7 = \frac{L(21)^3}{L(7)^2}, & \xi_8 = \frac{L(21)}{L(7)^3\,L(3)}.\ ^{*)} \end{cases}$$

Hierbei ist ξ_1 sicher ein Parameter, denn die Exponenten δ_1, δ_2, δ_3 sind *gerade* Zahlen und genügen der Bedingung

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\,\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Nach Gleichung (58) Nr. 5 ist

$$R = \wp'\left(\frac{2\varpi}{21}\right) \wp'\left(\frac{4\varpi}{21}\right) \wp'\left(\frac{8\varpi}{21}\right) \wp'\left(\frac{10\varpi}{21}\right) \wp'\left(\frac{16\varpi}{21}\right) \wp'\left(\frac{20\varpi}{21}\right) = \frac{f(7)^3 f(3)^3}{f(21)^3}$$

eine Transformationsgrösse, folglich ist auch

$$\frac{\sqrt{\xi_1}}{Q^{12}} = \frac{L(21)}{Q^{12} L(7)\,L(3)} = \frac{f(21)}{f(7)\,f(3)}$$

eine Transformationsgrösse. Dasselbe gilt von

$$\left[\wp\left(\frac{2\varpi}{7}\right) - \wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right)\right] \left[\wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right) - \wp\left(\frac{8\varpi}{7}\right)\right] \left[\wp\left(\frac{6\varpi}{7}\right) - \wp\left(\frac{12\varpi}{7}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{f(7)^2} = -\frac{Q^{12}}{L(7)^2},$$

so dass auch

$$\xi_2 = \frac{L(21)\,L(7)}{L(3)} = \frac{Q^{24} f(21)\,f(7)}{f(3)}$$

eine Transformationsgrösse ist, d. h. ξ_2 ist gleichfalls ein Parameter. Dasselbe gilt von

$$(461)\qquad \xi_6 = \xi_1 \xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_8 = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Dagegen sind

$$(462)\qquad \xi_3, \quad \xi_4 = \frac{\xi_1 \xi_8}{\xi_2}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_7 = \xi_1 \xi_3$$

keine Parameter. Durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{2}{21}} = z$ findet man

$$(463)\qquad \xi_1 \xi_2^2 - (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2)\,\xi_2 + 7\xi_1 = 0,$$

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 sind die folgenden:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
k_0	$+1$	-1	$+2$	0	$+1$	0	-1	$+2$
k_1	-1	-1	-1	$+1$	-2	-2	0	0
k_2	-1	$+1$	0	-2	$+1$	0	-1	-2
k_3	$+1$	$+1$	-1	$+1$	0	$+2$	$+2$	0

oder

$$(463\text{a})\qquad 2\xi_1\xi_2 = (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2) + w,$$

wobei

$$(464)\qquad w = +\sqrt{1 - 6\xi_1 - 17\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4} = +1 + \cdots.$$

Ferner wird

$$(465)\qquad \eta = L(7)^4 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{49\,L(3)^4}{L(21)^4} = \frac{49}{\xi_1^2 L(7)^4} = \frac{49}{\xi_1\xi_2^2},$$

und zwar findet man aus Gleichung (463a)

$$(466)\qquad \begin{cases} 2\xi_1^3\eta = (1 - 6\xi_1 - 3\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4) + (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2)\,w, \\ 2\xi_1^3\bar{\eta} = (1 - 6\xi_1 - 3\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4) - (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2)\,w, \end{cases}$$

d. h. η und $\bar{\eta}$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(467)\qquad \xi_1^3\eta^2 - (1 - 6\xi_1 - 3\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4)\,\eta + 49\xi_1 = 0.$$

Nun ist nach Gleichung (146) m. vor. Abh.

$$(468)\qquad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^2 + 13\eta + 49)(\eta^2 + 5\eta + 1)^3 \\ \qquad\qquad : (\eta^4 + 14\eta^3 + 63\eta^2 + 70\eta - 7)^2 : 1728\eta, \end{cases}$$

so dass man J sehr leicht als rationale Function von ξ_1 und w darstellen kann. Dabei sind die zu ξ_1 und η complementären Parameter ξ_1 und $\bar{\eta} = \frac{49}{\xi_1^2\eta}$, so dass J in $\bar{J}$ übergeht, wenn man $+w$ mit $-w$ vertauscht. Dadurch erhält man

$$(469)\qquad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^2 + 13\bar{\eta} + 49)(\bar{\eta}^2 + 5\bar{\eta} + 1)^3 \\ \qquad\qquad : (\bar{\eta}^4 + 14\bar{\eta}^3 + 63\bar{\eta}^2 + 70\bar{\eta} - 7)^2 : 1728\bar{\eta}. \end{cases}$$

Um auch noch $L(3)^{12}$ und $L(21)^6$ rational durch ξ_1 und w auszudrücken, beachte man, dass

$$(470)\qquad L(3)^{12} = \frac{\xi_3^4}{\xi_1\xi_2^2} \quad \text{und} \quad L(21)^6 = \xi_1\xi_2^2\xi_3^2$$

wird. Nun ist allerdings ξ_3 kein Parameter, aber ξ_3^2 ist einer mit dem Charakter 4 und genügt der Gleichung

$$(471)\qquad \xi_1^4\xi_3^4 - (1 - 10\xi_1 + 15\xi_1^2 + 28\xi_1^3 - 7\xi_1^4)\,\xi_3^2 + 189\xi_1^2 = 0,$$

oder

$$(471\text{a})\qquad 2\xi_1^4\xi_3^2 = (1 - 10\xi_1 + 15\xi_1^2 + 28\xi_1^3 - 7\xi_1^4) + (1 - 7\xi_1 + 7\xi_1^2)\,w.$$

Dadurch wird es auch möglich, $L(3)^{12}$ und $L(21)^6$ als rationale Functionen von ξ_1 und w darzustellen.

X. Abschnitt.

Transformation vom Grade $9a$.

§ 49.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $9a$.

Ist $n = 9a$ und a irgend eine Primzahl, so wird $\varrho = a - 2$. Setzt man jetzt wieder

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2} L(a)^{\delta_3} L(3a)^{\delta_4} L(9a)^{\delta_5}, \tag{472}$$

so ist

$$\begin{aligned} S(n, D) = 3a\delta_1(t_1^2 - 3) + a\delta_2(t_2^2 - 9) + 9\delta_3(t_3^2 - a) \\ + 3\delta_4(t_4^2 - 3a) + \delta_5(t_5^2 - 9a). \end{aligned}$$

Daraus findet man

$$\left\{\begin{aligned} & -6a\delta_1 - 8a\delta_2 - 9(a-1)\delta_3 - 3(3a-1)\delta_4 \\ & \qquad - (9a-1)\delta_5 = 24k_0, \\ & +4a\delta_1 + 0 - 2(a-1)\delta_3 - 2(a-3)\delta_4 \\ & \qquad - 2(a-1)\delta_5 = 24k_1, \\ & +2a\delta_1 + 8a\delta_2 - (a-1)\delta_3 - (a-3)\delta_4 \\ & \qquad - (a-9)\delta_5 = 24k_2, \\ & -6\delta_1 - 8\delta_2 + 9(a-1)\delta_3 + 3(a-3)\delta_4 \\ & \qquad + (a-9)\delta_5 = 24k_3, \\ & +4\delta_1 + 0 + 2(a-1)\delta_3 + 2(3a-1)\delta_4 \\ & \qquad + 2(a-1)\delta_5 = 24k_4, \\ & +2\delta_1 + 8\delta_2 + (a-1)\delta_3 + (3a-1)\delta_4 \\ & \qquad + (9a-1)\delta_5 = 24k_5, \end{aligned}\right. \tag{473}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $a^2 - 1$ mit G bezeichnet,

$$\left\{\begin{aligned} G\delta_1 &= -(a+1)k_0 + (5a-1)k_1 - (a+1)k_2 + 0 - 6k_4, \\ 2G\delta_2 &= +6k_0 - 3(a-2)k_1 + 6(a+1)k_2 + 6k_3 + 9k_4, \\ 2G\delta_3 &= -6k_0 + 3k_1 + 0 + 6ak_3 - 3ak_4, \\ G\delta_4 &= +(a+1)k_0 + (a-5)k_1 + (a+1)k_2 + 0 + 6ak_4, \\ 2G\delta_5 &= -6ak_0 + (6a-3)k_1 - 6(a+1)k_2 - 6ak_3 - 9ak_4. \end{aligned}\right. \tag{474}$$

§ 50.

Transformation vom Grade 18.

Für $n = 18$ wird $a = 2$, $\varrho = 0$ und die Gleichungen (474) gehen über in

$$(475)\quad \begin{cases} \delta_1 = -\ k_0 + 3k_1 -\ k_2 +\ 0\ - 2k_4, \\ 2\delta_2 = +2k_0 +\ 0\ + 6k_2 + 2k_3 + 3k_4, \\ 2\delta_3 = -2k_0 +\ k_1 +\ 0\ + 4k_3 - 2k_4, \\ \delta_4 = +\ k_0 -\ k_1 +\ k_2 +\ 0\ + 4k_4, \\ 2\delta_5 = -4k_0 - 3k_1 - 6k_2 - 4k_3 - 6k_4. \end{cases}$$

Setzt man daher $k_1 = 0$ und $k_4 = 0$ und von den vier Grössen k_0, k_2, k_3, k_5 die eine gleich $+1$, eine zweite gleich -1 und die beiden übrigen gleich 0, so erhält man 6 L-Producte mit dem Charakter 1, nämlich

$$(476)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(18)^2}{L(9)\,L(2)^2}, & \xi_2 = \dfrac{L(18)}{L(9)^2\,L(2)}, & \xi_3 = \dfrac{L(6)}{L(3)\,L(2)^3}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(18)^3\,L(3)}{L(9)^3\,L(6)}, & \xi_5 = \dfrac{L(18)^2\,L(3)\,L(2)}{L(9)\,L(6)}, & \xi_6 = \dfrac{L(18)\,L(3)\,L(2)^2}{L(9)^2\,L(6)}.\text{*)} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\xi_2 = \frac{L(18)}{L(9)^2\,L(2)} = \frac{f(18)}{f(9)^2\,f(2)} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{7\varpi}{9}\right)}{\tau\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{2\varpi}{3}\right)\tau\left(\frac{10\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{14\varpi}{9}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\wp'\left(\frac{\varpi}{3}\right)} \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2} \frac{\wp'\left(\frac{2.5^\alpha\varpi}{9}\right)}{\wp\left(\frac{5^\alpha\varpi}{9}\right) - \wp\left(\frac{2.5^\alpha\varpi}{9}\right)},$$

folglich ist ξ_2 eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{18}\right)$, die sich nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{2\varpi}{18}\right)$ mit $\wp\left(\frac{2.5\varpi}{18}\right)$ oder mit $\wp\left(\frac{2.25\varpi}{18}\right) = \wp\left(\frac{14\varpi}{18}\right)$ vertauscht. Deshalb ist ξ_2 eine Transformationsgrösse nullter Dimension, also ein *Parameter*.

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist

$$(477)\qquad \bar{\xi}_2 = \frac{\xi_1}{3},$$

folglich ist auch ξ_1 ein *Parameter*.

---

*) Die zugehörigen Werthe von $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ sind die folgenden:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
k_0	0	+1	+1	0	−1	0
k_1	0	0	0	0	0	0
k_2	0	−1	0	−1	0	−1
k_3	−1	0	−1	0	0	+1
k_4	0	0	0	0	0	0
k_5	+1	0	0	+1	+1	0

Die Grösse

$$(478)\qquad \xi_3^{\,3} = \frac{f(6)^3}{f(3)^3 f(2)^9} = \frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right) - \wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)^3}{\tau(\varpi)^3} = \xi_3(6)$$

ist schon für die Transformation 6ten Grades ein Parameter, ausserdem ist auch $\xi_3^{\,2}$ ein Parameter, weil die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ sämmtlich *gerade* sind. Daraus folgt, dass auch ξ_3 selbst ein Parameter ist. Mithin sind auch

$$(479)\qquad \xi_4 = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \xi_6 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$$

Parameter mit dem Charakter 1.

Zwischen je zwei von diesen 6 Parametern besteht eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha \xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wo man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch die Entwickelung von ξ_α und ξ_β nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{9}} = z$ findet. Dies giebt die Gleichungen

$$(480)\qquad \begin{cases} \xi_1 = 1 - 2\xi_3, \quad \xi_2 = \dfrac{\xi_3}{1+\xi_3}, \quad \xi_4 = \dfrac{1-2\xi_3}{1+\xi_3}, \\ \xi_5 = \dfrac{1-2\xi_3}{\xi_3}, \quad \xi_6 = \dfrac{1}{1+\xi_3}. \end{cases}$$

Da $\xi_3^{\,3} = \xi_3(6)$ ist, so folgt aus Gleichung (268a)

$$(481)\qquad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (1 - 6\xi_3^{\,3} - 12\xi_3^{\,6} - 8\xi_3^{\,9})^3 (1 - 2\xi_3^{\,3})^3 \\ \qquad : (1 - 8\xi_3^{\,3} - 8\xi_3^{\,9} - 8\xi_3^{\,12})^2 (1 - 4\xi_3^{\,3} - 8\xi_3^{\,6})^2 \\ \qquad : 1728\xi_3^{\,18}(1 + \xi_3^{\,3})^2 (1 - 8\xi_3^{\,3}). \end{cases}$$

Der zu ξ_3 complementäre Parameter ist

$$\bar{\xi}_3 = \frac{\xi_4}{2},$$

folglich wird

$$(482)\qquad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (64 - 48\xi_4^{\,3} - 12\xi_4^{\,6} - \xi_4^{\,9})^3 (4 - \xi_4^{\,3})^3 \\ \qquad : (512 - 512\xi_4^{\,3} - 8\xi_4^{\,9} - \xi_4^{\,12})^2 (8 - 4\xi_4^{\,3} - \xi_4^{\,6})^2 \\ \qquad : 1728\xi_4^{\,18}(8 + \xi_4^{\,3})^2 (1 - \xi_4^{\,3}). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (267) findet man ohne Weiteres

$$(483)\qquad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{1 - 8\xi_3^{\,3}}{\xi_3^{\,9}(1 + \xi_3^{\,3})}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{(1 + \xi_3^{\,3})^2 (1 - 8\xi_3^{\,3})}{\xi_3^{\,6}}, \\ L(6)^{24} = \dfrac{(1 + \xi_3^{\,3})(1 - 8\xi_3^{\,3})^5}{\xi_3^{\,15}}, \end{cases}$$

und aus den Gleichungen (476) folgt noch

$$(484)\quad \begin{cases} L(9)^3 = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^{\,2}} = \dfrac{(1-2\xi_3)(1+\xi_3)^2}{\xi_3^{\,2}}, \\[2ex] \dfrac{L(18)^3}{L(2)^3} = \dfrac{\xi_1^{\,2}}{\xi_2} = \dfrac{(1-2\xi_3)^2(1+\xi_3)}{\xi_3}. \end{cases}$$

§ 51.

Transformation vom Grade 45.

Für $n = 45$ wird $\varrho = 3$ und die Gleichungen (474) gehen über in

$$(485)\quad \begin{cases} 4\delta_1 = -\ k_0 + 4k_1 - \ k_2 + 0 - \ k_4, \\ 16\delta_2 = +\ 2k_0 - 3k_1 + 12k_2 + 2k_3 + 3k_4, \\ 16\delta_3 = -\ 2k_0 + k_1 + 0 + 10k_3 - 5k_4, \\ 4\delta_4 = +\ k_0 + 0 + k_2 + 0 + 5k_4, \\ 16\delta_5 = -\ 10k_0 - 9k_1 - 12k_2 - 10k_3 - 15k_4. \end{cases}$$

Hieraus findet man 10 L-Producte ξ mit dem Charakter 4, nämlich

$$(486)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(15)}{L(5)^3\,L(3)}, & \xi_2 = \dfrac{L(15)^2}{L(3)^2}, \\[2ex] \xi_3 = \dfrac{L(45)^2}{L(9)\,L(5)^2}, & \xi_4 = \dfrac{L(45)}{L(9)^2\,L(5)}, \\[2ex] \xi_5 = \dfrac{L(45)^3\,L(3)}{L(15)\,L(9)^3}, & \xi_6 = \dfrac{L(45)^2\,L(5)\,L(3)}{L(15)\,L(9)}, \\[2ex] \xi_7 = \dfrac{L(45)\,L(5)^2\,L(3)}{L(15)\,L(9)^2}, & \xi_8 = \dfrac{L(45)\,L(9)}{L(5)}, \\[2ex] \xi_9 = \dfrac{L(45)\,L(5)^2\,L(3)^3}{L(15)^3\,L(9)^2}, & \xi_{10} = \dfrac{L(45)\,L(9)\,L(5)}{L(15)^2\,L(3)^2}.\ ^{*)} \end{cases}$$

---

*) Die zugehörigen Werthe von $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ sind die folgenden:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	η_1	η_2	η_3	η_4
k_0	+4	−1	+1	+3	0	−3	−1	−2	0	+1	+1	−1	+2	0
k_1	0	−2	0	0	0	0	0	0	+2	−2	−2	−2	0	0
k_2	0	−1	−1	−3	−4	−1	−3	+2	−2	+1	−1	+1	0	+2
k_3	−4	+1	−3	−1	0	+1	+3	−2	+2	+1	+2	0	+1	−1
k_4	0	+2	0	0	0	0	0	0	−2	−2	0	0	−2	−2
k_5	0	+1	+3	+1	+4	+3	+1	+2	0	+1	0	+2	−1	+1

Die L-Producte

$$\eta_1 = \frac{L(5)}{L(3)^2}, \quad \eta_2 = \frac{L(45)\,L(9)}{L(3)^2}, \quad \eta_3 = \frac{L(5)}{L(15)^2}, \quad \eta_4 = \frac{L(45)\,L(9)}{L(15)^2},$$

welche in dieser Tabelle noch berücksichtigt sind, haben den Charakter 3, sind aber keine Parameter.

Dabei ist ξ_2 sicher ein Parameter, weil die Exponenten δ *gerade* sind und der Bedingung

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\,\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

genügen. Auch ξ_1 muss ein Parameter sein, denn

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{L(15)^3}{L(5)^3 L(3)^3} = \xi \tag{487}$$

ist schon ein Parameter für die Transformation 15ten Grades. Zwischen dieser Grösse ξ und $L(5)^6$ gilt aber nach Gleichung (452) die Beziehung

$$\xi^3 L(5)^{12} - (1+\xi^2)(1-9\xi-\xi^2)\,L(5)^6 + 125\,\xi = 0,$$

und es ist

$$\xi^2 L(5)^6 = \xi_2^{\,3},$$

folglich erhält man die Gleichung

$$\xi\xi_2^{\,6} - (1+\xi^2)(1-9\xi-\xi^2)\,\xi_2^{\,3} + 125\,\xi^3 = 0, \tag{488}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (487)

$$\xi_1(1+\xi_1^{\,3})\,\xi_2^{\,4} + 9\xi_1^{\,3}\xi_2^{\,3} + 9\xi_1\xi_2 - (1-125\xi_1^{\,3}) = 0. \tag{489}$$

Die zu ξ und ξ_2 complementären Parameter sind

$$\bar{\xi} = \frac{L(45)^3 L(3)^3}{L(15)^3 L(9)^3} \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_2 = \frac{5}{\xi_2}, \tag{490}$$

folglich besteht zwischen $\bar{\xi}$ und ξ_2 die Gleichung

$$\bar{\xi}^3\xi_2^{\,6} - (1+\bar{\xi}^2)(1-9\bar{\xi}-\bar{\xi}^2)\,\xi_2^{\,3} + 125\,\bar{\xi} = 0. \tag{491}$$

Aus den Gleichungen (488) und (491) folgt

$$\xi_2^{\,3} = \frac{-\xi^3 + \bar{\xi}(1-9\xi) - \bar{\xi}^2(\xi - 9\xi^2) + \bar{\xi}^3\xi^2}{\xi\bar{\xi}(1-\xi\bar{\xi})}, \tag{492}$$

$$\left\{\begin{aligned} &[\xi^3 - \xi^2\bar{\xi}^2(\bar{\xi}+9) + \xi\bar{\xi}(\bar{\xi}+9) - \bar{\xi}]\\ &\times[\bar{\xi}^3 - \xi^2\bar{\xi}^2(\xi+9) + \xi\bar{\xi}(\xi+9) - \xi]\\ &-125\,\xi^2\bar{\xi}^2(\xi\bar{\xi}-1)^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{493}$$

Aus der Gleichung (145) m. vor. Abh. für die Transformation 5ten Grades findet man daher

$$\left\{\begin{aligned} J : J-1 : 1 = {} & (\xi_2^{\,6} + 10\xi^2\xi_2^{\,3} + 5\xi^4)^3\\ & : (\xi_2^{\,6} + \ \,4\xi^2\xi_2^{\,3} - \xi^4)^2\,(\xi_2^{\,6} + 22\,\xi^2\xi_2^{\,3} + 125\xi^4)\\ & : 1728\,\xi^{10}\,\xi_2^{\,3}, \end{aligned}\right. \tag{494}$$

$$\left\{\begin{aligned} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = {} & (\bar{\xi}^4\xi_2^{\,6} + 250\,\bar{\xi}^2\xi_2^{\,3} + 3125)^3\\ & : (\bar{\xi}^4\xi_2^{\,6} - 500\,\bar{\xi}^2\xi_2^{\,3} - 15625)^2(\bar{\xi}^4\xi_2^{\,6} + 22\,\bar{\xi}^2\xi_2^{\,3} + 125)\\ & : 1728\,\bar{\xi}^{10}\xi_2^{\,15}. \end{aligned}\right. \tag{495}$$

Somit sind J und $\bar{J}$ als rationale Functionen der beiden Parameter ξ und $\bar{\xi}$ dargestellt, wobei zwischen ξ und $\bar{\xi}$ die Gleichung (493) besteht.

XI. Abschnitt.

Transformation vom Grade $6a$.

§ 52.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $6a$.

Ist $n = 6a$ und a eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$, so wird $\varrho = a - 2$ und

$$\xi = L(2)^{\delta_1} L(3)^{\delta_2} L(6)^{\delta_3} L(a)^{\delta_4} L(2a)^{\delta_5} L(3a)^{\delta_6} L(6a)^{\delta_7}.$$

Daraus folgt

$$(496)\quad \left\{\begin{aligned}
&-3a\delta_1 - 4a\delta_2 - 5a\delta_3 - 6(a-1)\delta_4 - 3(2a-1)\delta_5\\
&\qquad - 2(3a-1)\delta_6 - (6a-1)\delta_7 = 24k_0,\\
&+3a\delta_1 - 2a\delta_2 - a\delta_3 - 3(a-1)\delta_4 - 3(a-2)\delta_5\\
&\qquad - (3a-1)\delta_6 - (3a-2)\delta_7 = 24k_1,\\
&- a\delta_1 + 4a\delta_2 + a\delta_3 - 2(a-1)\delta_4 - (2a-1)\delta_5\\
&\qquad - 2(a-3)\delta_6 - (2a-3)\delta_7 = 24k_2,\\
&+ a\delta_1 + 2a\delta_2 + 5a\delta_3 - (a-1)\delta_4 - (a-2)\delta_5\\
&\qquad - (a-3)\delta_6 - (a-6)\delta_7 = 24k_3,\\
&- 3\delta_1 - 4\delta_2 - 5\delta_3 + 6(a-1)\delta_4 + 3(a-2)\delta_5\\
&\qquad + 2(a-3)\delta_6 + (a-6)\delta_7 = 24k_4,\\
&+ 3\delta_1 - 2\delta_2 - \delta_3 + 3(a-1)\delta_4 + 3(2a-1)\delta_5\\
&\qquad + (a-3)\delta_6 + (2a-3)\delta_7 = 24k_5,\\
&- \delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 + 2(a-1)\delta_4 + (a-2)\delta_5\\
&\qquad + 2(3a-1)\delta_6 + (3a-2)\delta_7 = 24k_6,\\
&+ \delta_1 + 2\delta_2 + 5\delta_3 + (a-1)\delta_4 + (2a-1)\delta_5\\
&\qquad + (3a-1)\delta_6 + (6a-1)\delta_7 = 24k_7,
\end{aligned}\right.$$

oder

$$(497)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a^2-1)\delta_1 = -(3a+2)k_0 + 2(3a-1)k_1 + (a-2)k_2 - 2(a+1)k_3\\
&\qquad + k_4 - 8k_5 - 3k_6,\\
&(a^2-1)\delta_2 = -(2a+3)k_0 + (a-3)k_1 + 3(2a-1)k_2 - 3(a+1)k_3\\
&\qquad - k_4 - 4k_5 - 9k_6,\\
&(a^2-1)\delta_3 = + (a+6)k_0 - 2(a-3)k_1 - 3(a-2)k_2 + 6(a+1)k_3\\
&\qquad + 5k_4 + 8k_5 + 9k_6,\\
&(a^2-1)\delta_4 = - (a+6)k_0 - (a-3)k_1 - (a-2)k_2 - (a+1)k_3\\
&\qquad + 5ak_4 - 4ak_5 - 3ak_6,
\end{aligned}\right.$$

$$(497)\begin{cases}(a^2-1)\delta_5=+(2a+3)k_0+2(a-3)k_1+(2a-1)k_2+2(a+1)k_3\\ \qquad -ak_4+8ak_5+3ak_6,\\ (a^2-1)\delta_6=+(3a+2)k_0+(3a-1)k_1+3(a-2)k_2+3(a+1)k_3\\ \qquad +ak_4+4ak_5+9ak_6,\\ (a^2-1)\delta_7=-(6a+1)k_0-2(3a-1)k_1-3(2a-1)k_2-6(a+1)k_3\\ \qquad -5ak_4-8ak_5-9ak_6.\end{cases}$$

Setzt man z. B.

$$\xi_1=\frac{L(6a)\,L(2)}{L(2a)\,L(6)},\quad \xi_2=\frac{L(3a)}{L(a)\,L(3)},\quad \xi_3=\frac{L(6a)^2\,L(a)\,L(3)\,L(2)^2}{L(3a)\,L(2a)^2\,L(6)^2},$$

so findet man bez. für

	$12k_0$	$12k_1$	$12k_2$	$12k_3$	$12k_4$	$12k_5$	$12k_6$	$12k_7$
ξ_1	$a-1$	$2(a-1)$	$-(a-1)$	$-2(a-1)$	$-(a-1)$	$-2(a-1)$	$a-1$	$2(a-1)$
ξ_2	$2(a-1)$	$a-1$	$-2(a-1)$	$-(a-1)$	$-2(a-1)$	$-(a-1)$	$2(a-1)$	$a-1$
ξ_3	0	$3(a-1)$	0	$-3(a-1)$	0	$-3(a-1)$	0	$3(a-1)$

§ 53.

Transformation vom Grade 30.

Für $n=30$ wird $a=5$ und $\varrho=3$. Die Gleichungen (497) gehen dann über in

$$(498)\begin{cases}24\delta_1=-17k_0+28k_1+\ 3k_2-12k_3+\ k_4-\ 8k_5-\ 3k_6,\\ 24\delta_2=-13k_0+\ 2k_1+27k_2-18k_3-\ k_4-\ 4k_5-\ 9k_6,\\ 24\delta_3=+11k_0-\ 4k_1-\ 9k_2+36k_3+\ 5k_4+\ 8k_5+\ 9k_6,\\ 24\delta_4=-11k_0-\ 2k_1-\ 3k_2-\ 6k_3+25k_4-20k_5-15k_6,\\ 24\delta_5=+13k_0+\ 4k_1+\ 9k_2+12k_3-\ 5k_4+40k_5+15k_6,\\ 24\delta_6=+17k_0+14k_1+\ 9k_2+18k_3+\ 5k_4+20k_5+45k_6,\\ 24\delta_7=-31k_0-28k_1-27k_2-36k_3-25k_4-40k_5-45k_6.\end{cases}$$

Daraus findet man 2 L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(499)\qquad\begin{cases}\xi_1=\dfrac{L(30)^2\,L(5)\,L(3)\,L(2)^2}{L(15)\,L(10)^2\,L(6)^2},\\ \xi_2=\dfrac{L(30)\,L(5)^2\,L(3)^2\,L(2)}{L(15)^2\,L(10)\,L(6)},\end{cases}$$

und eine grosse Anzahl von L-Producten mit dem Charakter 4. Es genügt, die folgenden hervorzuheben:

$$
(500) \quad \begin{cases}
\xi_3 = \dfrac{L(30)\,L(15)\,L(2)}{L(10)\,L(6)\,L(5)\,L(3)}, & \xi_4 = \dfrac{L(10)^4}{L(5)^2\,L(2)^4}, \\[2mm]
\xi_5 = \dfrac{L(30)^2\,L(3)^4}{L(15)^4\,L(6)^2}, & \xi_6 = \dfrac{L(10)^2}{L(5)^4\,L(2)^2}, \\[2mm]
\xi_7 = \dfrac{L(30)^4\,L(3)^2}{L(15)^2\,L(6)^4}, & \xi_8 = \dfrac{L(10)}{L(5)\,L(2)^5}, \\[2mm]
\xi_9 = \dfrac{L(30)^5\,L(3)}{L(15)^5\,L(6)}. &
\end{cases}
$$

Ausserdem sollen noch drei L-Producte mit dem Charakter 6 benutzt werden, nämlich

$$
(501) \qquad \xi_{10} = \frac{L(15)^3}{L(5)^3\,L(3)^3}, \quad \xi_{11} = \frac{L(15)^2\,L(3)^2}{L(5)^2}, \quad \xi_{12} = \frac{L(30)^2\,L(6)^2}{L(10)^2\,L(6)^2}.\text{*)}
$$

Dabei sind die Grössen

$$
(502) \qquad \xi_4 = \xi_1(10), \quad \xi_6 = \xi_2(10), \quad \xi_8 = \xi_3(10)
$$

sicher Parameter, zwischen denen nach den Gleichungen (272a) die Relationen

$$
(503) \qquad \xi_4 = 1 - 4\xi_8, \quad \xi_6 = \frac{\xi_8}{1+\xi_8}
$$

bestehen. Ebenso ist

$$
(504) \qquad \xi_{10} = \xi_1(15)
$$

ein Parameter, während ξ_5, ξ_7, ξ_{11} und ξ_{12} schon deshalb Parameter sind, weil die Exponenten δ bei ihnen sämmtlich *gerade* sind. Daher ist auch

$$
(505) \qquad \xi_1 = \frac{\xi_8{}^2}{\xi_{10}}
$$

ein Parameter, und dasselbe gilt von ξ_2, weil $\frac{1}{\xi_2} = \bar{\xi}_1$ der zu ξ_1 complementäre Parameter ist.

---

*) Die zugehörigen Werthe von $k_0, k_1, k_2, \ldots k_7$ ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}
k_0	0	-1	$+1$	0	$+1$	$+3$	0	$+3$	0	$+2$	-2	-1
k_1	$+1$	0	$+1$	-3	0	0	-1	-3	0	$+1$	-1	-2
k_2	0	$+1$	-1	0	$+3$	$+1$	0	$+1$	0	-2	$+2$	$+1$
k_3	-1	0	-1	-1	0	0	-3	-1	0	-1	$+1$	$+2$
k_4	0	$+1$	-1	0	-1	-3	0	0	-1	-2	-2	-1
k_5	-1	0	-1	$+3$	0	0	$+1$	0	$+1$	-1	-1	-2
k_6	0	-1	$+1$	0	-3	-1	0	0	-3	$+2$	$+2$	$+1$
k_7	$+1$	0	$+1$	$+1$	0	0	$+3$	0	$+3$	$+1$	$+1$	$+2$

Zwischen ξ_1 und ξ_2 besteht daher eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)\xi_2^2 + (a_1\xi_1^2 + b_1\xi_1 + c_1)\xi_2 + (a_2\xi_1^2 + b_2\xi_1 + c_2) = 0.$$

Durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{15}} = z$ findet man aber, wie zu erwarten war, dass sich diese Gleichung auf den *ersten* Grad in ξ_1 und ξ_2 reducirt. Es wird nämlich

$$\xi_2 = \frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_1} \tag{506}$$

und

$$\xi_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi_1(1 - \xi_1)}{1 + \xi_1}, \quad \xi_{10} = \frac{\xi_1}{\xi_2^2} = \frac{\xi_1(1 - \xi_1)^2}{(1 + \xi_1)^2}. \tag{507}$$

Ferner besteht zwischen ξ_1 und ξ_8 die Gleichung

$$16\xi_1^3\xi_8^2 + 4(1 + 3\xi_1 + \xi_1^3 - \xi_1^4)\xi_8 - (1 - 2\xi_1 + 2\xi_1^3 - \xi_1^4) = 0, \tag{508}$$

oder

$$8\xi_1^3\xi_8 = -(1 + 3\xi_1 + \xi_1^3 - \xi_1^4) + w, \tag{508a}$$

wobei

$$\begin{cases} w = +\sqrt{1 + 6\xi_1 + 9\xi_1^2 + 6\xi_1^3 - 4\xi_1^4 - 6\xi_1^5 + 9\xi_1^6 - 6\xi_1^7 + \xi_1^8} \\ \quad = +\sqrt{(1 + \xi_1 - \xi_1^2)(1 + 4\xi_1 - \xi_1^2)(1 + \xi_1 + 2\xi_1^2 - \xi_1^3 + \xi_1^4)} \\ \quad = +4 + \cdots. \end{cases} \tag{509}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (503) kann man jetzt auch ξ_4 und ξ_6 rational durch ξ_1 und w darstellen.

Nun sind aber die zu ξ_4, ξ_6, ξ_8 complementären Parameter bez.

$$\bar{\xi}_4 = 5\xi_5, \quad \bar{\xi}_6 = \frac{\xi_7}{5}, \quad \bar{\xi}_8 = \frac{\xi_9}{4}, \tag{510}$$

während die zu ξ_1 und w complementären Grössen

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\xi_2} = \frac{1 - \xi_1}{1 + \xi_1} \quad \text{und} \quad \bar{w} = \frac{\pm 4w}{(1 + \xi_1)^4} \tag{511}$$

sind, folglich kann man auch ξ_5, ξ_7 und ξ_9 leicht als rationale Functionen von ξ_1 und w darstellen. Ferner findet man

$$\begin{cases} 2\xi_1(1 - \xi_1^2)^2\xi_{11} = (1 - \xi_1 + 5\xi_1^2 + 18\xi_1^3 - 5\xi_1^4 - \xi_1^5 - \xi_1^6) \\ \qquad\qquad + (1 - 4\xi_1 - \xi_1^2)w \end{cases} \tag{512}$$

und für den zu ξ_{11} complementären Parameter

$$\bar{\xi}_{11} = \frac{9}{\xi_{12}}. \tag{513}$$

Deshalb lassen sich auch

$$(514)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_4\xi_6}{\xi_8^{6}}, \qquad L(5)^6 = \dfrac{\xi_4}{\xi_6^{2}}, \qquad L(10)^8 = \dfrac{\xi_4^{3}}{\xi_6\xi_8^{8}}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{\xi_2^{4}\xi_{11}^{3}}{\xi_1^{2}}, \quad L(15)^{12} = \dfrac{\xi_2^{4}\xi_7^{2}\xi_{11}^{3}}{\xi_1^{2}\xi_5^{4}}, \quad L(6)^{24} = \dfrac{\xi_4^{5}\xi_5^{2}\xi_{12}^{6}}{\xi_6\xi_7^{4}\xi_8^{6}}, \\ L(30)^{24} = \dfrac{\xi_4^{5}\xi_7^{4}\xi_{12}^{6}}{\xi_5^{2}\xi_6\xi_8^{6}} \end{cases}$$

als rationale Functionen von ξ_1 und w darstellen.

Schliesslich folgt aus Gleichung (274)

$$(515)\quad \begin{cases} J : J-1 : 1 = (1 - 4\xi_8 + 16\xi_8^{5} + 16\xi_8^{6})^3 \\ \qquad : (1 + 4\xi_8^{2})(1 - 2\xi_8 + 2\xi_8^{2})^2 (1 - 2\xi_8 - 4\xi_8^{2})^2 \\ \qquad \times (1 - 2\xi_8 - 6\xi_8^{2} - 8\xi_8^{3} - 4\xi_8^{4})^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_8^{10}(1 - 4\xi_8)(1 + \xi_8)^2 \end{cases}$$

und

$$(516)\quad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (256 - 256\xi_9 + 4\xi_9^{5} + \xi_9^{6})^3 \\ \qquad : (4 + \xi_9^{2})(8 - 2\xi_9 + \xi_9^{2})^2 (4 - 2\xi_9 - \xi_9^{2})^2 \\ \qquad \times (64 - 32\xi_9 - 24\xi_9^{2} - 8\xi_9^{3} - \xi_9^{4}) \\ \qquad : 1728\,\xi_9^{10}(1 - \xi_9)(4 + \xi_9)^2, \end{cases}$$

wobei ξ_8 und ξ_9 rationale Functionen von ξ_1 und w sind.

Hannover, im December 1887.