8.

Über die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

(Von Herrn *E. E. Kummer*, Dr. phil. zu Liegnitz.)

(Fortsetzung von No. 3. des vorigen Hefts.)

Abschnitt IV.

Umformungen der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für den noch specielleren Fall, wo von den Quantitäten α, β, und γ nur eine noch beliebig bleibt.

§. 21.

So wie im vorigen Abschnitte etwas von der Allgemeinheit der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aufgegeben und unter den Quantitäten α, β, γ eine Bedingungsgleichung gesetzt wurde, wodurch wir eine sehr grofse Anzahl neuer, wenn auch specieller Gleichungen unter verschiedenen Functionen F erhalten haben: eben so soll in dem gegenwärtigen Abschnitte nun noch mehr von der Allgemeinheit der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aufgegeben werden, indem zwei Bedingungsgleichungen unter den Quantitäten α, β, γ gesetzt werden, oder nur eine derselben als beliebig beibehalten wird. Wenn dieser Fall eben so als der vorige behandelt wird, so zerfällt jetzt die Gleichung (4.) §. 4. (deren algebraischen particulären Integrale die Werthe des z geben) in drei besondere Gleichungen, welche mit einander identisch sein müssen. Eine Discussion der in diesen drei Gleichungen enthaltenen speciellen Fälle würde sich auf ähnliche Weise wie im vorigen Abschnitte ausführen lassen: die Anzahl der Werthe des z aber würde für diesen Fall aufserordentlich grofs sein, und die Aufgabe, alle diese Werthe des z zu finden, die ihnen zugehörigen particulären Integrale der Differenzialgleichung (1.) §. 4. und die aus diesen entspringenden Gleichungen zu bilden, würde zu allzugrofsen Weitläuftigkeiten führen, und dennoch keine wesentlich neuen Gleichungen gewähren. Wir wollen uns daher hier nur darauf beschränken, diejenigen Gleichungen, welche sich aus denen der beiden vorhergehenden Abschnitte für den gegenwärtigen Fall entwickeln lassen, aufzustellen, und zwar auch von diesen nur die, welche unter zweien Functionen F statt haben.

Die Methode, diese Gleichungen aufzufinden, ist folgende. Man nimmt in je zweien der Gleichungen (42.) bis (66.) des §. 19. unter den Gröfsen α und β, oder, wo sie vorkommen, unter den Gröfsen α und γ eine Bedingungsgleichung von der Art an, dafs die Functionen F links vom Gleichheitszeichen mit einander identisch werden, weil sodann die Theile rechts vom Gleichheitszeichen auch einander gleich sein müssen. Alsdann gewähren diese allemal eine Gleichung für den gegenwärtigen Fall. Von den Gleichungen aber, welche man auf diese Weise erhält, erweisen sich viele, welche anfangs verschieden zu sein schienen, bei näherer Untersuchung als mit einander identich; andere Gleichungen dieser Art gehören ferner nicht transcendenten Reihen F an, sondern solchen, welche sich algebraisch oder durch Kreisfunctionen ausdrücken lassen. Diese alle übergehend, nehme ich nur folgende neun Gleichungen, in welchen x in r verwandelt ist:

1. $$\left(1-\frac{r}{2}\right)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+5}{6}, \left(\frac{r}{2-r}\right)^2\right)$$
$$= (1+r)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+2}{3}, \frac{4r}{(1+r)^2}\right),$$

2. $$\left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+5}{6}, \left(\frac{1-\sqrt{(1-r)}}{1+\sqrt{(1-r)}}\right)^2\right)$$
$$= (1+r)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+2}{3}, \frac{4r}{(1+r)^2}\right),$$

3. $$(1+\sqrt{r})^{-2\alpha} F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{4\alpha+1}{3}, \frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right)$$
$$= \left(1-\frac{r}{2}\right)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+5}{6}, \left(\frac{r}{2-r}\right)^2\right),$$

4. $$(1+\sqrt{r})^{-2\alpha} F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{4\alpha+1}{3}, \frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right)$$
$$= \left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+5}{6}, \left(\frac{1-\sqrt{(1-r)}}{1+\sqrt{(1-r)}}\right)^2\right),$$

5. $$(1+r)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+2}{3}, \frac{4r}{(1+r)^2}\right)$$
$$= (1-2r)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+2}{3}, \frac{4r^2-4r}{4r^2-4r+1}\right),$$

$$6.\quad (1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right)$$
$$=(1-2r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{4r^2-4r}{4r^2-4r+1}\right),$$

$$7.\quad \left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{\sqrt{(1-r)}-1}{\sqrt{(1-r)}+1}\right)$$
$$=(1+r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{4r}{(1+r)^2}\right),$$

$$8.\quad (1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{2\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}\right)$$
$$=(1-2r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{4r^2-4r}{4r^2-4r+1}\right),$$

$$9.\quad \left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{\sqrt{(1-r)}-1}{\sqrt{(1-r)}+1}\right)$$
$$=(1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right).$$

Die Gleichung (1.) erhält man aus (50.) und (52.), wenn daselbst $\beta=\frac{\alpha+1}{3}$ genommen wird; eben so (2.) aus (50.) und (43.); (3.) aus (51.) und (52.); (4.) aus (51.) und (43.); (5.) aus (50.) und (55.), und (6.) aus (51.) und (55.). Die Gleichung (7.) erhält man aus (45.) und (50.), indem $\beta=\frac{1}{4}$ genommen wird; ferner (8.) aus (44.) und (45.), indem $\gamma=\alpha+\frac{3}{4}$, $\beta=\alpha+\frac{1}{2}$ gesetzt wird, und endlich (9.) aus (45.) und (51.), wenn in denselben $\beta=\frac{1}{4}$ gesetzt wird.

Diese neun Formeln nehmen folgende bequemere Gestalt an:

$$10.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1\pm3\sqrt{x})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{x}(1\pm\sqrt{x})}{(1\pm3\sqrt{x})^2}\right),$$

$$11.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=(1\pm6\sqrt{x}+x)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{x}(1\pm\sqrt{x})^2}{(1\pm6\sqrt{x}+x)^2}\right),$$

$$12.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{2-x+6\sqrt{(1-x)}}{8}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{(1-\sqrt{(1-x)})^4}{(2-x+6\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

$$13.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt[4]{(1-x)}}{2}\right)^{-4\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{1-\sqrt[4]{(1-x)}}{1+\sqrt[4]{(1-x)}}\right)^4\right),$$

14. $$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{3\sqrt{(1-x)}-1}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{-8\sqrt{(1-x)}(\sqrt{(1-x)}-1)}{(3\sqrt{(1-x)}-1)^2}\right),$$

15. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{x-2+6\sqrt{(1-x)}}{4}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{16\sqrt{(1-x)}(\sqrt{(1-x)}-1)^2}{(x-2+6\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

16. $$F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1-6x+x^2)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{-16x(1+x)^2}{(1-6x+x^2)^2}\right),$$

17. $$F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},x)$$
$$=\left(\frac{4-4x-x^2}{4}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{-16x^2(1-x)}{(4-4x-x^2)^2}\right),$$

18. $$F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1\pm\sqrt{(1-x)})^{-4\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{\pm8(1-x)\sqrt{(1-x)}}{(1\pm\sqrt{(1-x)})^4}\right).$$

Wenn man nämlich in (1.) setzt $\left(\frac{r}{2-r}\right)^2=x$, so erhält man (10.); wenn man in (2.) setzt $\left(\frac{1-\sqrt{(1-r)}}{1+\sqrt{(1-r)}}\right)^2=x$, so erhält man (11.); und auf ähnliche Weise die übrigen hier aufgestellten Formeln.

Werden nun in diesen Gleichungen die Functionen F rechts vom Gleichheitszeichen nach Formel (18.) §. 9. umgeformt, so erhält man folgende acht andere Gleichungen:

19. $$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1\pm\sqrt{x})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{x}(1\mp\sqrt{x})}{(1\pm\sqrt{x})^2}\right),$$

20. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1\pm\sqrt{x})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{x}(1\mp\sqrt{x})^2}{(1\pm\sqrt{x})^4}\right),$$

21. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt[4]{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{-(1-\sqrt{(1-x)})^4}{16\sqrt{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

22. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt[4]{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{-(1-\sqrt[4]{(1-x)})^4}{8\sqrt[4]{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})}\right),$$

$$23.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{8\sqrt{(1-x)}(1-\sqrt{(1-x)})}{(1+\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

$$24.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{16\sqrt{(1-x)}(1-\sqrt{(1-x)})^2}{(1+\sqrt{(1-x)})^4}\right),$$

$$25.\quad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1+x)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16x(1-x)^2}{(1+x)^4}\right),$$

$$26.\quad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},x)$$
$$=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16x^2(1-x)}{(2-x)^4}\right).$$

Werden endlich noch die Functionen F links vom Gleichheitszeichen nach Formel (18.) §. 9. umgeformt, und wird x in $\frac{x}{x-1}$ verwandelt, so erhält man aus (10.), (11.), (16.), (18.), (19.), (20.), (23.) und (25.) noch folgende acht Formeln:

$$27.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm3\sqrt{(-x)})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{(-x)}(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})}{(\sqrt{(1-x)}\pm3\sqrt{(-x)})^2}\right),$$

$$28.\quad F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1-2x\pm6\sqrt{(x^2-x)})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{(x^2-x)}(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^2}{(1-2x\pm6\sqrt{(x^2-x)})^2}\right),$$

$$29.\quad F(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1+4x-4x^2)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16x(1-x)}{(1+4x-4x^2)^2}\right),$$

$$30.\quad F(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{x})^{-4\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{\pm8\sqrt{(x-x^2)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{x})^4}\right),$$

$$31.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6};x\right)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{(-x)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^3}\right),$$

$$32.\quad F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{(x^2-x)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^6}\right),$$

$$33.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},x\right)=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{-8x}{(1+\sqrt{(1-x)})^3}\right),$$

$$34.\quad F(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},x)=(1-2x)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{-16x(1-x)}{(1-2x)^4}\right),$$

§. 22.

In allen diesen Formeln haben die letzten Elemente der Functionen F rechts vom Gleichheitszeichen verschiedene Werthe; es ist leicht, aus diesen noch viele andere Formeln derselben Art herzuleiten, welche jedoch dieselben Werthe des letzten Elementes haben, indem man nämlich die eine oder die andere Function F dieser Formeln, oder auch beide zugleich, nach Formel (17.) §. 9. umformt; es würde jedoch zu weitläuftig sein, diese Umformungen hier aufzunehmen. Alle diese Formeln sind ferner nur in bestimmten Grenzen des x gültig, weil die letzten Elemente dieser Functionen, von dem Werthe 0 an, nur bis -1 auf der einen, und $+1$ auf der andern Seite ausgedehnt werden dürfen: sobald aber das letzte Element für einen Werth des x die Grenze -1 oder $+1$ erreicht hat, darf x nicht gröfser angenommen werden, wenn auch das letzte Element der andern Function dadurch wieder kleiner würde. So z. B. die Gleichung (26.) ist gültig in den Grenzen $x=-1$ bis $x=2\sqrt{2}-2$; denn für den letzteren Werth des x erreicht $z=\frac{16x^2(1-x)}{(2-x)^4}$ zuerst die Grenze $+1$: nimmt man x etwas gröfser, so wird dadurch zwar z wieder kleiner als 1, aber die Gleichung (26.) hört auf, richtig zu sein. Nach derselben Methode, welche im vorigen Abschnitte zur Bildung der Gleichungen unter dreien Functionen F angewendet worden ist, können nun auch in diesem Falle aus den gefundenen Gleichungen unter zweien Functionen F, die Gleichungen unter dreien Functionen gebildet werden; aber auch diese wollen wir Kürze halber übergehen.

Nachdem nun die drei Fälle durchgegangen worden sind: erstens, wo α, β, γ von einander ganz unabhängig waren: zweitens, wo eine Bedingungsgleichung unter denselben statt fand, und drittens, wo zwei Bedingungsgleichungen statt fanden, so wäre nun noch viertens der Fall zu untersuchen, wo drei Bedingungsgleichungen unter denselben statt haben, oder wo diese Quantitäten α, β, γ bestimmte Werthe haben. Dieser Fall würde gewifs zu sehr interessanten Resultaten führen, da unter denselben zum Beispiel alle Verwandlungen der ganzen elliptischen Integrale, so wie mehrerer unbestimmter elliptischer Integrale enthalten sein müfsten, (denn diese sind, wie bald gezeigt werden soll, als specielle Fälle in der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten); aber abgesehen von der Schwierigkeit, diesen speciellsten Fall vollständig zu erschöpfen, würde er sich auch zu sehr von der allgemeinen Untersuchung der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entfernen; weshalb er für jetzt übergangen werden soll.

Abschnitt V.

Summation der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für specielle Werthe des letzten Elementes x.

§. 23.

Da wir die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, deren Haupt-Eigenschaften in den vorhergehenden drei Abschnitten entwickelt worden sind, durch eine unendliche Reihe definirt haben, so kann auch von einer Summe derselben die Rede sein, welche nichts anderes sein wird, als ein Ausdruck dieser Reihe durch bekannte Functionen. Im allgemeinen ist nun die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine Transcendente eigener Art; in vielen speciellen Fällen aber läfst sie sich auf bekannte Functionen reduciren. Hierbei sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden: man kann nämlich die Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ suchen für specielle Werthe des letzten Elementes x, wie sie z. B. von Gaufs für den Fall $x=1$ gefunden worden ist: oder man kann die Summe dieser Reihe suchen, indem x als veränderlich beibehalten wird, für bestimmte Werthe der Quantitäten α, β, γ. Wir werden uns in diesem Abschnitte nur auf den ersten jener beiden Fälle beschränken, und was den zweiten Fall betrifft, so werden wir in dem folgenden Abschnitte untersuchen, unter welchen Bedingungen die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sich durch elliptische Transcendenten ausdrücken läfst; die zahlreichen Summationen aber, welche algebraisch oder durch logarithmische und Kreisfunctionen ausgeführt werden können, (für welche Gaufs in der erwähnten Abhandlung eine Sammlung gegeben hat), übergehen wir ganz, da die gegenwärtige Abhandlung nur die Theorie der höheren Transcendenten zum Zwecke hat.

Um nun die Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für bestimmte Werthe des x zu finden, werden wir von dem Werthe $x=1$ ausgehen, für welchen, wie schon erwähnt worden, die Summe der Reihe durch die Transcendente Π von Gaufs gefunden worden ist. Durch Umformungen der Reihe, deren letztes Element gleich 1 ist, werden wir sodann Reihen mit anderen Werthen des letzten Elementes finden, welche sich also ebenfalls durch die Function Π müssen summiren lassen.

Setzt man in Formel (53.) §. 19. $x=-1$, so ist:

$$F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,-1)=2^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha-2\beta+1}{2},\alpha-\beta+1,1\right),$$

und wenn die Function F, rechts vom Gleichheitszeichen, deren letztes Element 1 ist, nach der allgemeinen Formel

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

durch die Function Π ausgedrückt wird, so ist:

$$1.\qquad F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,-1)=\frac{2^{-\alpha}\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\beta)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}.$$

Setzt man ferner in Formel (57.) §. 19. $x=\frac{1}{2}$, so wird:

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},1\right);$$

also wenn die Function F, deren letztes Element 1 ist, durch die Function Π ausgedrückt wird:

$$2.\qquad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}.$$

Diese Summation geht auch unmittelbar aus (73.) oder (74.) §. 20. hervor, wenn daselbst $x=0$ gesetzt wird.

Setzt man endlich in Formel (66.) §. 19. $x=\frac{1}{2}$, so ist:

$$F(\alpha,1-\alpha,\gamma,\tfrac{1}{2})=2^{1-\gamma}F\left(\frac{\gamma-\alpha}{2},\frac{\gamma+\alpha-1}{2},\gamma,1\right),$$

und daher

$$3.\qquad F(\alpha,1-\alpha,\gamma,\tfrac{1}{2})=\frac{2^{1-\gamma}\sqrt{\pi}\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi\left(\frac{\gamma-\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\gamma+\alpha-2}{2}\right)}.$$

§. 24.

Aufser diesen drei Summationen der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für die Werthe $x=-1$ und $x=\frac{1}{2}$, wobei noch zwei der Quantitäten α, β, γ beliebig bleiben, gewähren die Formeln des dritten Abschnittes keine anderen derselben Art; indessen können diese noch verallgemeinert werden.

Im allgemeinen hat nämlich Gaufs l. c. pag. 11 von den drei Functionen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha+\lambda, \beta+\mu, \gamma+\nu, x)$ und $F(\alpha+\lambda', \beta+\mu', \gamma+\nu', x)$, in welchen λ, μ, ν, λ', μ', ν' beliebige ganze, positive oder negative Zahlen bedeuten, gezeigt, dafs aus zweien derselben die dritte durch Reductionsformeln hergeleitet werden kann. Setzt man nun in Gleichung (1.) $\alpha+1$ statt α, so ist:

$$F(\alpha+1, \beta, \alpha-\beta+2, -1) = \frac{2^{-\alpha-1}\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\beta+1)}{\Pi\left(\frac{\alpha-2\beta+1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Aus $F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, -1)$ und $F(\alpha+1, \beta, \alpha-\beta+2, -1)$ kann man aber nach dem angeführten Satze $F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+k, -1)$ herleiten, wo k irgend eine beliebige ganze Zahl bedeutet; und deshalb läfst sich auch diese allgemeinere Reihe durch die Function Π summiren. Eben so aus dem gefundenen Ausdrucke für $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, wenn $\alpha+1$ statt α und $\beta+1$ statt β gesetzt wird, erhält man auch $F\left(\alpha+1, \beta+1, \frac{\alpha+\beta+1}{2}+1, \frac{1}{2}\right)$ und aus diesen beiden vermittelst der Reductionsformeln $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+k}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Auf dieselbe Weise leitet man auch aus $F(\alpha, 1-\alpha, \gamma, \frac{1}{2})$ die allgemeinere Reihe $F(\alpha, k-\alpha, \gamma, \frac{1}{2})$ ab. Hieraus folgt: erstens, die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ läfst sich durch die Function Π summiren, wenn $\gamma-\alpha+\beta$ oder $\gamma-\beta+\alpha$ eine ganze Zahl ist; zweitens, die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{2})$ läfst sich durch die Function Π summiren, wenn $2\gamma-\alpha-\beta$ oder $\alpha+\beta$ eine ganze Zahl ist.

§. 25.

So wie die Formeln des dritten Abschnittes diese Summationen gegeben haben: eben so geben die Formeln des vierten Abschnittes einige speciellere Summationen, bei welchen nur noch eine der Quantitäten α, β, γ beliebig bleibt.

In Formel (19.) §. 21. gesetzt $x=\frac{1}{9}$, giebt:

$$4.\quad F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\alpha+5}{6}, \frac{1}{9}\right) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+2}{3}, 1\right);$$

in (20.) gesetzt $x=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2$, giebt:

$$5.\quad F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+5}{6}, \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\right) = (4-2\sqrt{2})^{-2\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+2}{3}, 1\right);$$

in (23.) gesetzt $x=\frac{8}{9}$, giebt:

$$6.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\tfrac{8}{9}\right)=(\tfrac{1}{3})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (24.) gesetzt $x=\frac{4\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}$, giebt:

$$7.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},\frac{4\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}\right)=(2-\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (31.) gesetzt $x=-\frac{1}{8}$, giebt:

$$8.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},-\tfrac{1}{8}\right)=2^{-\frac{\alpha}{2}}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (32.) gesetzt $x=-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4\sqrt{2}}$, giebt:

$$9.\quad F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4\sqrt{2}}\right)=2^{-\frac{\alpha}{2}}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (25.) gesetzt $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, giebt:

$$10.\quad F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=(4-2\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},1\right);$$

in (26.) gesetzt $x=\frac{2}{\sqrt{2}+1}$, giebt:

$$11.\quad F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)=(2-\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},1\right);$$

in (34.) gesetzt $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, giebt:

$$12.\quad F\left(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)=2^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},1\right).$$

Für die beiden Reihen, welche hier rechts vom Gleichheitszeichen vorkommen: $F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right)$ und $F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\frac{3}{4},1\right)$, darf man nur ihre Ausdrücke durch die Function Π setzen, nämlich:

$$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\alpha-1}{3}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha-2}{6}\right)},$$

$$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},1\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\frac{1}{4})}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)},$$

so erhält man diese neun Reihen durch die Function Π summirt. Man kann auch die Reihen links vom Gleichheitszeichen in diesen Formeln nach Gleichung (17.) §. 9. umformen, und wird dadurch neun andere Summationen erhalten, bei welchen jedoch die letzten Elemente der summirten Reihen dieselben sind, wie in (4.) bis (12.). Übrigens ist klar, daſs alle hier gefundenen Summationen sich eben so durch willkürliche ganze Zahlen verallgemeinern lassen, wie die des vorigen Paragraphs, oder, was dasselbe ist: es lassen sich, da diese einmal gefunden sind, auch alle diejenigen Reihen summiren, welche vermittelst der Reductionsformeln aus jenen abgeleitet werden können.

Die Formeln des zweiten, dritten und vierten Abschnittes gewähren ebenfalls eine große Anzahl noch speciellerer Summationen für den Fall, daß von den Quantitäten α, β, γ keine mehr beliebig bleibt; von diesen mag es hinreichen, ein einziges merkwürdiges Beispiel zu geben.

Setzt man in (45.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$, so wird:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x)=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{\sqrt{(1-x)}+1}\right),$$

setzt man ferner:

$$\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{\sqrt{(1-x)}+1}=x', \qquad \frac{\sqrt{(1-x')}-1}{\sqrt{(1-x')}+1}=x'', \qquad \frac{\sqrt{(1-x'')}-1}{\sqrt{(1-x'')}+1}=x''' \text{ etc.},$$

so erhält man folgende Reihe von Gleichungen:

$$13. \quad \begin{cases} F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x\ ) = \sqrt{(1-x'\ )}\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'\ ), \\ F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'\ ) = \sqrt{(1-x''\ )}\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x''), \\ F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'') = \sqrt{(1-x''')}\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'''), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenn man nun für irgend einen Werth des x die Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ summiren kann, so wird man vermittelst dieser Gleichungen daraus auch die Summe derselben Reihe für die entsprechenden Werthe x', x'', x''', etc. ableiten können. Es ist nun aber für $x=1$

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},1)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})},$$

und die dem $x=1$ entsprechenden Werthe von x', x'', x''', etc. sind:

$$x'=-1, \qquad x''=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \qquad x'''=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+\sqrt{2})}}, \quad \text{etc.}$$

Für alle diese Werthe des letzten Elementes läßt sich also die Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ summiren.

Die Function $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ hat, wie man aus den Gleichungen (13.) ersieht, die merkwürdige Eigenschaft, daß sich eine unendliche Reihe solcher Functionen bilden läßt, welche in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen. Dies erinnert an die Eigenschaften der elliptischen Integrale, und es wird auch wirklich in dem folgenden Abschnitte gezeigt werden, daß die Function $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ sich durch ein elliptisches Integral der ersten Gattung ausdrücken läfst. Denkt man sich die Reihe der Gleichungen bei (13.) bis in's unendliche fortgesetzt und alle diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man folgende Entwickelung in ein Product unendlich vieler Factoren:

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{4}, x) = \sqrt{((1-x')(1-x'')(1-x''') \ldots \text{ in inf.})},$$

welches, weil die Gröfsen x', x'', x''', etc. sich rasch der Grenze 0 nähern, recht gut convergirt.

Abschnitt VI.

Anwendungen der gefundenen Formeln auf verschiedene transcendente Functionen, welche in der allgemeinen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten sind.

§. 26.

Als in der allgemeinen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten, können auch folgende drei Reihen betrachtet werden:

1. $$1+\frac{\alpha.y}{\gamma.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots,$$

2. $$1+\frac{y}{\gamma.1}+\frac{y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots$$

3. $$1+\frac{\alpha.\beta}{1}y+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2}y^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}y^2+\ldots$$

Von diesen Reihen sind die beiden ersten immer convergent, die dritte aber wird von einem bestimmten Gliede an allemal divergent, und ist nur, wenn dem y sehr kleine Werthe gegeben werden, für eine gewisse Anzahl der ersten Glieder convergent; dieselbe gehört also zu der Classe der semiconvergenten Reihen. Die Reihe (1.) erhält man aus $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, wenn $\beta = m$, $x = \frac{y}{m}$ gesetzt, und m unendlich grofs angenommen wird. Die Reihe (2.) entspringt aus $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, indem $\alpha = m$, $\beta = m'$, $x = \frac{y}{m.m'}$ gesetzt wird, wo m und m' unendlich grofse Quantitäten bezeichnen. Die Reihe (3.) endlich erhält man, indem $\gamma = m$, $x = my$ und $m = \infty$ genommen wird. Einige der gefundenen Umformungen der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ lassen sich nun auch auf diese Reihen anwenden.

Setzt man in Formel (17.) §. 9. $\beta = m$, $x = \frac{y}{m}$, so wird

$$F\left(\alpha, m, \gamma, \frac{y}{m}\right) = \left(1-\frac{y}{m}\right)^{\gamma-\alpha-m} F\left(\gamma-\alpha, \gamma-m, \gamma, \frac{y}{m}\right).$$

Wird nun $m=\infty$ gesetzt, so ist bekanntlich $\left(1-\frac{y}{m}\right)^{-m}=e^y$; also, wenn die Functionen F in Reihen entwickelt werden, hat man

$$4.\quad 1+\frac{\alpha.y}{\gamma.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots=$$

$$e^y\left(1-\frac{(\gamma-\alpha)y}{\gamma.1}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)y^2}{\gamma.(\gamma+1)1.2}-\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha+2)y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots\right),$$

eine Formel, durch welche jede Reihe (1.) in eine andere Reihe derselben Art verwandelt werden kann.

Setzt man in Formel (51.) §. 19. $\alpha=m$, $\beta=m-\gamma+1$, $x=\frac{y}{m^2}$, so ist

$$F\left(m,m-\gamma+1,\gamma,\frac{y}{m^2}\right)=\left(1\pm\frac{\sqrt{y}}{m}\right)^{-2m}F\left(m,\gamma-\tfrac{1}{2},2\gamma-1,\frac{\pm4\sqrt{y}}{m\left(1\pm\frac{\sqrt{y}}{m}\right)^2}\right).$$

Wird nun $m=\infty$ gesetzt, so ist $\left(1\pm\frac{\sqrt{y}}{m}\right)^{-2m}=e^{\mp2\sqrt{y}}$, und wenn die Functionen F entwickelt werden,

$$5.\quad 1+\frac{y}{\gamma.1}+\frac{y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots=$$

$$e^{\pm2\sqrt{y}}\left(1\pm\frac{(\gamma-\frac{1}{2})4\sqrt{y}}{(2\gamma-2)1}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2y}{(2\gamma-1).2\gamma.1.2}\pm\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})4^3y\sqrt{y}}{(2\gamma-1).2\gamma(2\gamma+1)1.2.3}+\dots\right).$$

Durch diese Formel kann eine jede Reihe (2.) in eine Reihe (1.) verwandelt werden; wenn y negativ wird, so muſs man derselben eine andere Form geben. Man erhält, wenn $y=-z$ gesetzt wird, durch Trennung der realen und der imaginären Theile:

$$6.\quad 1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\frac{z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots=$$

$$\cos(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2z}{(2\gamma-1)2\gamma.1.2}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})4^4z^2}{(2\gamma-1).2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)1.2.3.4}-\dots\right)$$

$$-2\sqrt{z}\sin(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})4^2z}{2\gamma(2\gamma+1)2.3}+\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})(\gamma+\frac{7}{2})4^2z^2}{2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)(2\gamma+3)2.3.4.5}-\dots\right)$$

und

$$0=\sin(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2z}{(2\gamma-1)2\gamma.1.2}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})4^4z^2}{(2\gamma-1).2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)1.2.3.4}-\dots\right)$$

$$-2\sqrt{z}\cos(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})4^2z}{2\gamma(2\gamma+1)2.3}+\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})(\gamma+\frac{7}{2})4^2z^2}{2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)(2\gamma+3)2.3.4.5}-\dots\right),$$

woraus man durch Elimination der zweiten Reihe erhält:

$$7.\quad 1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\frac{z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots=$$

$$\frac{1}{\cos(2\sqrt{z})}\left(1-\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2z}{(2\gamma-1)2\gamma.1.2}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})4^4z^2}{(2\gamma-1)2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)1.2.3.4}-\dots\right),$$

Aus dieser Formel (7.) folgt eine höchst merkwürdige Eigenschaft der in Klammern eingeschlossenen Reihe, nämlich daſs sie verschwinden muſs, sobald z einen der Werthe $\frac{\pi^2}{16}$, $\frac{9.\pi^2}{16}$, $\frac{25.\pi^2}{16}$, $\frac{49.\pi^2}{16}$, u. s. w. erhält, und zwar für jeden beliebigen Werth des γ. Wäre dies nicht der Fall, so müſste die stets convergirende Reihe

$$1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\ldots,$$

für jeden beliebigen Werth des γ unendlich werden, sobald z einen der Werthe $\frac{\pi^2}{16}$, $\frac{9.\pi^2}{16}$, u. s. w. erhält.

Setzt man in Formel (52.) §. 19. $\alpha=m$, $x=\frac{y}{m}$, so ist:

$$F\left(m,\beta,2\beta,\frac{y}{m}\right)=\left(1-\frac{2}{2m}\right)^{-m}F\left(\frac{m}{2},\frac{m+1}{2},\beta+\tfrac{1}{2},\frac{y^2}{(2m-y)^2}\right),$$

und diese Gleichung, für $m=\infty$ entwickelt, giebt:

$$8.\quad 1+\frac{\beta.y}{2\beta.1}+\frac{\beta(\beta+1)y^2}{2\beta(2\beta+1)1.2}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)y^2}{2\beta(2\beta+1)(2\beta+2)1.2.3}+\ldots,$$
$$=e^{\frac{y}{2}}\left(1+\frac{y^2}{(\beta+\frac{1}{2})1.2^4}+\frac{y^4}{(\beta+\frac{1}{2})(\beta+\frac{3}{2})1.2.2^8}+\ldots\right).$$

Diese Formel, welche eigentlich mit (5.) identisch ist, zeigt, wie diejenige Reihe (1.), in welcher $\gamma=2\beta$ ist, durch eine Reihe (2.) ausgedrückt werden kann.

Die semiconvergente Reihe (3.), kann, wie gezeigt werden soll, durch zwei, immer convergirende Reihen (1.) ausgedrückt werden. Setzt man nämlich in Formel (27.) §. 12. $\gamma=m$, $x=-\frac{m}{y}$, so wird

$$F\left(\alpha,\beta,m,-\frac{m}{y}\right)=$$
$$\frac{m^{-\alpha}\Pi(m-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(m-\alpha-1)\Pi(\beta-1)}y^{\alpha}F\left(\alpha,\alpha-m+1,\alpha-\beta+1,-\frac{y}{m}\right)$$
$$+\frac{m^{-\beta}\Pi(m-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(m-\beta-1)\Pi(\alpha-1)}y^{\beta}F\left(\beta,\beta-m+1,\beta-\alpha+1,-\frac{y}{m}\right).$$

Für $m=\infty$ ist aber (cfr. Gauſs Abhandlung pag. 27):

$$\frac{m^{-\alpha}\Pi(m-1)}{\Pi(m-\alpha-1)}=1,\quad\text{und daher auch}\quad\frac{m^{-\beta}\Pi(m-1)}{\Pi(m-\beta-1)}=1;$$

wenn also $m=\infty$ gesetzt wird, und die Functionen F entwickelt werden, so erhält man:

$$9.\quad 1-\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma^3}+\dots$$
$$=\gamma^\alpha\frac{\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}\left(1+\frac{\alpha.\gamma}{(\alpha-\beta+1).1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\gamma^2}{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta+2)1.2}+\dots\right)$$
$$+\gamma^\beta\frac{\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\beta-1)}\left(1+\frac{\beta.\gamma}{(\beta-\alpha+1).1}+\frac{\beta(\beta+1)\gamma^2}{(\beta-\alpha+1)(\beta-\alpha+2)1.2}+\dots\right).$$

Für den Fall, wo β oder α eine ganze negative Zahl ist, bestehen die in dieser Formel vorkommenden Reihen nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, und es läfst sich dann die Richtigkeit derselben leicht anderweitig beweisen.

§. 27.

Die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ läfst sich auf folgende Weise durch bestimmte Integrale ausdrücken:

$$10.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du}{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}.$$

Entwickelt man nämlich den Theil rechts vom Gleichheitszeichen nach Potenzen von x, so erhält man im allgemeinen für den Coefficienten der Potenz x^k:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\int_0^1 u^{\beta+k-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}{1.2\dots k\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du},$$

Es ist aber (man sehe Gaufs Abh. pag. 30)

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du=\frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}{\Pi(\gamma-1)},$$

also

$$\frac{\int_0^1 u^{\beta+k-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}=\frac{\Pi(\beta+k-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma+k-1)\,\Pi(\beta-1)}=\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}.$$

Der Coefficient von x^k ist also

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{1.2\dots k.\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)},$$

welches genau der Coefficient von x^k in der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ist, so dafs der zweite Theil der Gleichung (10.), nach Potenzen von x entwickelt, wirklich $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ giebt, und diese Gleichung deshalb richtig ist. Schreibt man anstatt des unbestimmten Integrales im Nenner seinen Ausdruck durch die Function Π, so ist:

$$12.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x,)=\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du.$$

Diese bestimmten Integrale haben aber, wie man sieht, nur dann endliche Werthe, wenn β und $\gamma-\beta$ positiv sind; in jedem anderen Falle werden sie unendlich grofs.

Man kann nun auch die Reihen (1.) und (2.) des vorigen Paragraph's durch bestimmte Integrale ausdrücken. Setzt man nämlich in (11.) $\alpha=m$, $x=\frac{y}{m}$ und $m=\infty$, so erhält man:

$$13.\quad 1+\frac{\beta.y}{\gamma.1}+\frac{\beta(\beta+1)y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\dots=\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}e^{yu}du.$$

Wird nun $\gamma=2\beta$ gesetzt, so ist:

$$1+\frac{\beta y}{2\beta.1}+\frac{\beta(\beta+1)y^2}{2\beta(2\beta+1)1.2}+\dots=\frac{\Pi(2\beta-1)}{(\Pi(\beta-1))^2}\int_0^1(u(1-u))^{\beta-1}e^{yu}du,$$

und, wenn diese Reihe nach der Formel (8.) umgeformt wird:

$$e^{\frac{y}{2}}\left(1+\frac{y^2}{(\beta+\frac{1}{2})1.2^4}+\frac{y^4}{(\beta+\frac{1}{2})(\beta+\frac{3}{2})1.2.2^8}+\dots\right)=$$
$$\frac{\Pi(2\beta-1)}{(\Pi(\beta-1))^2}\int_0^1(u(1-u))^{\beta-1}e^{yu}du,$$

und, wenn $y=4\sqrt{x}$, $\beta=\gamma-\frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$13.\quad 1+\frac{x}{\gamma.1}+\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\dots=\frac{\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^1(u-u^2)e^{\gamma-\frac{3}{2}}e^{(2u-1)2\sqrt{x}}du.$$

Wenn x negativ $=-z$, so müssen die unmöglichen Exponentialgröfsen in Kreisfunctionen verwandelt werden, woraus hervorgeht:

$$14.\quad 1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots=\frac{\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^1(u-u^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\cos((4u-2)\sqrt{z})du.$$

Dieses Integral besteht, wie man leicht sieht, aus zwei ganz gleichen Theilen, von denen der eine von $u=0$ bis $u=\frac{1}{2}$, der andere von $u=\frac{1}{2}$ bis $u=1$ geht. Es ist daher

$$1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots=\frac{2\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^{\frac{1}{2}}(u-u^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\cos((4u-2)\sqrt{z})du,$$

und, wenn $1-2u=v$ gesetzt wird,

$$15.\quad 1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots=\frac{2^{3-2\gamma}\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^1(1-v^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\cos(2v\sqrt{z})du.$$

Dieses Resultat stimmt vollkommen mit dem überein, welches ich auf eine andere Weise in diesem Journal Bd. 12. pag. 145 hergeleitet habe, um das vollständige Integral der Riccatischen Gleichung durch bestimmte Integrale auszudrücken.

§. 28.

Zwei besonders merkwürdige Fälle der allgemeinen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ sind die Fälle $\gamma=\beta+1$ und $\beta=1$. Setzt man in (10.) oder (11.) §. 27. $\gamma=\beta+1$, so erhält man

$$F(\alpha,\beta,\beta+1,x)=\beta\int_0^1 u^{\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,$$

und daher, wenn $u=\frac{v}{x}$ gesetzt, und sodann das Zeichen v in x verwandelt wird:

$$16.\qquad F(\alpha,\beta,\beta+1,x)=\beta x^{-\beta}\int_0^x x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}\,dx.$$

Formt man diese Reihe F nach Formel (17.) §. 9. um, und setzt alsdann $\beta-\alpha+1$ statt α und $\gamma-1$ statt β, so erhält man

$$17.\qquad F(\alpha,1,\gamma,x)=(\gamma-1)x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\int_0^x x^{\gamma-2}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx.$$

Die beiden Reihen $F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$ und $F(\alpha,1,\gamma,x)$ lassen sich also durch unbestimmte Integrale ausdrücken. Durch Reductionsformeln kann man aber aus diesen Reihen die beiden allgemeineren $F(\alpha,\beta,\beta+k,x)$ und $F(\alpha,k,\gamma,x)$ ableiten, in welchen k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so dafs man also eine jede Reihe F, in welcher eines der beiden ersten Elemente eine ganze Zahl ist, oder in welcher das dritte Element von einem der beiden ersten um eine ganze Zahl unterschieden ist, durch unbestimmte Integrale ausdrücken kann. Von der andern Seite kann man nun auch jedes Integral von der Form

$$\int_0^z z^{\lambda-1}(1\pm z^{\mu})^{\nu}\,dz$$

durch die Function F ausdrücken. Setzt man nämlich in (16.) $x=\pm z^{\mu}$ $\beta=\frac{\lambda}{\mu}$, $\alpha=-\nu$, so wird

$$18.\qquad F\left(-\nu,\frac{\lambda}{\mu},\frac{\lambda}{\mu}+1,\pm z^{\mu}\right)=\lambda z^{-\lambda}\int_0^z z^{\lambda-1}(1\mp z^{\mu})^{\nu}\,dz,$$

und daher

$$19.\qquad \int_0^z z^{\lambda-1}(1\mp z^{\mu})^{\nu}\,dz=\frac{z^{\lambda}}{\lambda}F\left(-\nu,\frac{\lambda}{\mu},\frac{\lambda}{\mu}+1,\pm z^{\mu}\right).$$

Für die Functionen $F(\alpha,1,\gamma,x)$ und $F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$ vereinfachen sich auch die Formeln des §. 11. sehr, indem allemal eine der darin vorkommenden drei Functionen F sich algebraisch ausdrücken läfst.

In (21.) §. 11. gesetzt $\beta=1$, giebt:

$$20.\qquad F(\alpha,1,\gamma,x)$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}+\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha-1}F(\alpha,1,\alpha-\gamma+2,1-x).$$

In (22.) §. 11. gesetzt $\gamma=\beta+1$, giebt:

$$21. \quad F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$$
$$=\frac{\Pi(\beta)\Pi(-\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)}x^{-\beta}+\frac{\beta}{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha}F(\beta-\alpha+1,1,2-\alpha,1-x).$$

In (24.) §. 11. gesetzt $\gamma=\beta+1$, giebt:

$$22. \quad F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$$
$$=\frac{\Pi(\beta)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)}(-x)^{-\beta}+\frac{\beta(1-x)^{-\alpha}}{\beta-\alpha}F\left(\alpha,1,\alpha-\beta+1,\frac{1}{1-x}\right).$$

In (25.) §. 11. gesetzt $\beta=1$, giebt:

$$23. \quad F(\alpha,1,\gamma,x)$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)}(-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}+\frac{\gamma-1}{(\alpha-1)(1-x)}F\left(\gamma-\alpha,1,2-\alpha,\frac{1}{1-x}\right).$$

Diese Gleichungen können mit Hülfe der beiden Formeln (17.) und (18.) des §. 9. auf verschiedene Weise umgeformt werden. Man kann auch statt der Functionen F ihre Ausdrücke durch bestimmte Integrale nehmen, und hat dadurch die Grundgleichungen für die Transcendenten, welche in der Form $\int_0^z z^{\lambda-1}(1\pm z^{\mu})^{\nu}\,dz$ enthalten sind.

§. 29.

Setzt man in der Formel (11.) §. 27., in welcher die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt ist, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $x=c^2$, so erhält man daraus:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-c^2u)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

und wenn $u=\sin\varphi^2$ genommen wird:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}}.$$

Dieses Integral ist aber das ganze elliptische Integral der ersten Gattung, welches nach Legendre durch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}}=\mathrm{F}^1(c)$$

bezeichnet wird. Man hat daher:

$$24. \quad \frac{2}{\pi}F^1(c)=F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2).$$

Setzt man ferner in Formel (11.) §. 27. $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $x=c^2$, so erhält man:

$$F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-c^2u)^{\frac{1}{2}}\,du,$$

und wenn $u=\sin\varphi^2$ genommen wird,

$$F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi,$$

Dies ist das ganze elliptische Integral der zweiten Gattung, nach Legendre bezeichnet durch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi=\mathrm{E}^1(c).$$

Man hat daher:

$$25.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{E}^1(c)=F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2).$$

Die ganzen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung (und folglich auch die der dritten Gattung) lassen sich also durch die Reihe F ausdrücken. Aus den beiden Formeln (24.) und (25.) können nun durch Verwandlung der Reihen $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)$ und $F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)$ eine grofse Anzahl anderer hergeleitet werden, von welchen wir einige der merkwürdigsten hier zusammenstellen wollen, wobei, wie es bei Legendre gebräuchlich ist, $b^2=1-c^2$ gesetzt werden mag:

$$26.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=\frac{1}{\sqrt{(1+c^2)}}F\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,\frac{4c^2}{(1+c^2)^2}\right),$$

$$27.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},1,4b^2c^2),$$

$$28.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=(1-2c^2)F(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},4b^2c^2),$$

$$29.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=\frac{1}{b+c}F\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},1,\frac{8bc^3}{(b+c)^4}\right),$$

$$30.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{2}\right)}}F\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,\frac{c^4}{(2-c^2)^2}\right),$$

$$31.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=\frac{1}{\sqrt{(1+c^2)}}F\left(\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8},1,\frac{16c^2b^4}{(1+c^2)^4}\right),$$

$$32.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=\frac{\sqrt{\pi}}{(\Pi(-\frac{1}{4}))^2}F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},(1-2c^2)^2)-\frac{2\sqrt{\pi}(1-2c^2)}{(\Pi(-\frac{3}{4}))^2}F(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{2},(1-2c^2)^2),$$

$$33.\qquad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(b)=\frac{\sqrt{\pi}}{(\Pi(-\frac{1}{4}))^2}F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},(1-2c^2)^2)+\frac{2\sqrt{\pi}(1-2c^2)}{(\Pi(-\frac{3}{4}))^2}F(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{2},(1-2c^2)^2).$$

Die Gleichung (26.) ist durch Verwandlung der Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)$ abgeleitet aus (50.) §. 19.; die drei folgenden, (27.), (28.) und (29.), welche nur in den Grenzen $c^2=0$ bis $c^2=\frac{1}{2}$ gelten, sind abgeleitet aus (57.) und (63.) des §. 19. und (34.) §. 21.; eben so (30.) aus (52.) §. 19.; die Gleichung (31.), welche nur von $c=0$ bis $c=\sqrt{2}-1$ gültig ist, aus (25.) §. 21. Endlich die beiden Gleichungen (32.) und (33) sind aus Formel (72.) §. 20. abgeleitet und stimmen vollkommen mit denen überein, welche **Jacobi**, *Fundamenta nova etc.* pag. 67 und 68, aufgestellt hat.

Als einige von den mannigfaltigen Ausdrücken der Function $E^1(c)$, welche aus Gleichung (25.) durch Verwandlung der Reihe $F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)$ gefunden werden, wollen wir folgende aufstellen:

$$34.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=b^2F(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2),$$

$$35.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=b\,F\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{-c^2}{b^2}\right),$$

$$36.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{2}\right)}\,F\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},1,\frac{c^4}{(2-c^2)^2}\right),$$

$$37.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\sqrt{b}\,F\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,-\frac{c^4}{4b^2}\right),$$

$$38.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\frac{1+b}{2}F\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\right),$$

$$39.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\sqrt{b}\,F\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1,\frac{-(1-b)^2}{4b}\right).$$

Diese sind der Reihe nach aus (17.) und (18.) §. 9. und (52.), (54.), (43.) und (48.) des §. 19. abgeleitet.

Umgekehrt kann man nun auch diese hier vorkommenden Reihen F durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken, welches häufiger in Anwendung kommen wird, da die elliptischen Integrale, für welche überdies vollständige Tafeln berechnet sind, als bekanntere Functionen gelten müssen, als die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Wenn man alle möglichen durch die Formeln des zweiten, dritten und vierten Abschnittes zu bewirkenden Umformungen der Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x)$ berücksichtigt, so wird man folgende hypergeometrische Reihen F durch ganze elliptische Integrale ausdrücken können:

$$40.\quad\left\{\begin{array}{lllll}
F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x), & F(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,x), & F(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,x), & F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,x), & F(\frac{1}{8},\frac{3}{8},1,x),\\
F(\frac{1}{8},\frac{5}{8},1,x), & F(\frac{5}{8},\frac{7}{8},1,x), & F(\frac{3}{8},\frac{7}{8},1,x), & F(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,x), & F(\frac{3}{4},\frac{1}{2},1,x),\\
F(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},x), & F(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{2},x), & F(\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{2},x), & F(\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{2},x), & F(\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{3}{2},x),\\
F(\frac{5}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{2},x), & F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},x), & F(\frac{5}{8},\frac{5}{8},\frac{3}{2},x), & F(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},x), & F(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},x),\\
F(\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{3}{4},x), & F(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{3}{4},x), & F(\frac{5}{8},\frac{5}{8},\frac{3}{4},x), & F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},x), & F(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{4},x),\\
F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},x), & F(\frac{3}{8},\frac{7}{8},\frac{3}{4},x), & F(\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{4},x), & F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4},x), & F(\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{5}{4},x).
\end{array}\right.$$

Es soll nun überdies gezeigt werden, dafs wenn in diesen Reihen die drei ersten Elemente um beliebige ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, auch die so entstandenen Reihen sich durch die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung ausdrücken lassen; oder im allgemeinen, wenn $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sich durch ganze elliptische Integrale ausdrücken läfst, dafs dasselbe auch von $F(\alpha+\lambda, \beta+\mu, \gamma+\nu, x)$ gilt, wo λ, μ, ν beliebige ganze positive oder negative Zahlen bedeuten. Um dies zu zeigen setze ich

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P,$$

wo P ein Ausdruck ist, der die elliptischen Integrale F^1 und E^1 enthält. Durch Differentiation folgt hieraus

$$\frac{\alpha.\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) = \frac{dP}{dx}.$$

Da nun die Differenzialquotienten der ganzen elliptischen Integrale wieder auf dieselben Functionen F^1 und E^1 zurückführen, so folgt, dafs $\frac{dP}{dx}$ und daher auch $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$ durch diese elliptischen Integrale sich ausdrücken lassen müssen. Aus $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$ kann man aber $F(\alpha+\lambda, \beta+\mu, \gamma+\nu, x)$ durch Reductionsformeln herleiten, so dafs auch diese allgemeinere Reihe sich durch elliptische Integrale ausdrücken lassen mufs. Jede einzelne der bei (40.) angegebenen Reihen, welche sich durch die elliptischen Integrale ausdrücken lassen, wird daher eine unendliche Anzahl anderer nach sich ziehen, welche dieselbe Eigenschaft haben.

Die bei (40.) zusammengestellten Reihen, nebst denen, welche sich auf die so eben angegebene Weise aus denselben ableiten lassen, erschöpfen aber noch nicht alle Fälle, in welchen die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ganze elliptische Integrale ausgedrückt werden kann. Man nehme z. B. das Integral

$$41. \qquad y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{(1-c^2\sin\varphi^2)}},$$

welches Legendre (*Traité des fonctions elliptiques, Tom. I. page* 180 *et* 181) durch ein ganzes elliptisches Integral der ersten Gattung ausgedrückt hat. Dasselbe verwandelt sich, wenn $u=\sin\varphi^2$ gesetzt wird, in

$$y = \tfrac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-c^2u)^{-\frac{1}{3}}\,du,$$

und es ist daher, nach Formel (11.) §. 27.,

$$42. \qquad y = \frac{\pi}{2} F(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1, c^2).$$

Es mufs sich daher auch die Reihe $F(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,x)$ nebst allen ihren Umformungen durch ganze elliptische Integrale ausdrücken lassen, also:

$$43.\ \begin{cases} F(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,x), & F(\frac{2}{3},\frac{1}{2},1,x), & F(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,x), & F(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1,x), & F(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,x), \\ F(\frac{1}{6},\frac{2}{3},1,x), & F(\frac{1}{6},\frac{1}{3},1,x), & F(\frac{5}{6},\frac{2}{3},1,x), & F(\frac{5}{6},\frac{1}{3},1,x), & \end{cases}$$

und folglich auch alle diejenigen Reihen F, welche aus diesen entstehen, indem die drei ersten Elemente um beliebige ganze Zahlen vermehrt, oder vermindert werden. Es folgt ferner hieraus, dafs auch die Reihe $F(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,z)$ eine Umformung der Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x)$ sein mufs. Diese Umformung aber ist in den Formeln des zweiten, dritten und vierten Abschnittes nicht enthalten, weil wir daselbst nur diejenigen Umformungen gesucht haben, bei welchen wenigstens eine der Quantitäten α, β, γ beliebig bleibt.

§. 30.

Es hat im allgemeinen die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, welche wir in dieser Abhandlung untersuchen, eine unverkennbare Analogie mit den elliptischen Transcendenten, und viele der gefundenen Formeln für die Reihe F, geben wichtige Resultate für die Theorie der elliptischen Functionen.

Setzt man in Formel (51.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $x=c^2$, so ist:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{1}{1+c}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{4c}{(1+c)^2}\right);$$

daher hat man, wenn diese beiden Reihen durch elliptische Functionen ausgedrückt werden,

$$44.\qquad \mathrm{F}^1(c)=\frac{1}{1+c}\mathrm{F}^1\left(\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right),$$

welches eine bekannte Eigenschaft der ganzen elliptischen Integrale der ersten Gattung ist. Eben so, wenn in Formel (43.) §. 19. gesetzt wird $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $x=c^2$, erhält man:

$$45.\qquad \mathrm{F}^1(c)=\frac{2}{1+b}\mathrm{F}^1\left(\frac{1-b}{1+b}\right).$$

Setzt man in Formel (13.) §. 21. $\alpha=\frac{1}{2}$, $x=c^2$, so erhält man daraus:

$$46.\qquad \mathrm{F}^1(c)=\left(\frac{2}{1+\sqrt{b}}\right)^2\mathrm{F}^1\left(\left(\frac{1-\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}\right)^2\right),$$

welche Gleichung in dieser Form zwar neu erscheint, aber unter der Form

$$\frac{1}{1+c}\mathrm{F}^1\left(\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right)=\frac{2}{1+b}\mathrm{F}^1\left(\frac{1-b}{1+b}\right),$$

welche man aus (46.) erhält, indem statt c gesetzt wird $\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, sogleich als ein bekanntes Resultat erkannt wird.

Setzt man in der Formel (34.) §. 13. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $x=c^2$, so erhält man daraus unmittelbar jene merkwürdige Gleichung, welche von Legendre, Abel und Jacobi auf sehr verschiedene Arten hergeleitet und bewiesen worden ist, nämlich:

$$47. \qquad F^1(c)\,E^1(b)+F^1(b)\,E^1(c)-F^1(b)\,F^1(c)=\frac{\pi}{2}.$$

Betrachtet man ferner jene Differenzialgleichung der dritten Ordnung (4.) §. 4., welche die Bestimmung des z enthält, damit $wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ und $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ einer und derselben lineären Differenzialgleichung der zweiten Ordnung (1.) §. 4. als particuläre Integrale genügen, und setzt man in derselben $\alpha=\alpha'=\frac{1}{2}$, $\beta=\beta'=\frac{1}{2}$, $\gamma=\gamma'=1$, $x=k^2$, $z=\lambda^2$, so erhält man daraus:

$$48. \qquad 2\frac{d^3\lambda}{d\lambda\, dk^2}-3\left(\frac{d^2\lambda}{d\lambda\, dk}\right)^2+\frac{1+2\lambda^2+\lambda^4}{\lambda^2(1-\lambda^2)^2}\cdot\frac{d\lambda^2}{dk^2}-\frac{1+2k^2+k^4}{k^2(1-k^2)^2}=0.$$

Dies ist die von Jacobi (*Fund. nova etc. pag.* 77) gefundene Differenzialgleichung, welcher alle Modulargleichungen als algebraische particuläre Integrale genügen.

Werden endlich dieselben Werthe der Quantitäten α, β, γ, α', β', γ', x und z in der Gleichung für den Multiplicator (3.) §. 4. substituirt, so erhält man für den Multiplicator der umgeformten elliptischen Integrale:

$$49. \qquad w^2=c\,\frac{\lambda(1-\lambda^2)\,dk}{k(1-k^2)\,d\lambda},$$

welches genau mit dem von Jacobi (*Fund. nova etc. pag.* 75.) gefundenen Ausdrucke übereinstimmt.

§. 31.

Es lassen sich auch die unbestimmten elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung für viele bestimmten Werthe des Modulus durch die Reihe F ausdrücken; umgekehrt läſst sich daher auch die Reihe F in vielen Fällen durch bestimmte elliptische Integrale ausdrücken. Dies soll in dem gegenwärtigen Paragraphen gezeigt werden.

Wir wollen zu diesem Zwecke folgendes unbestimmte Integral betrachten:

$$50. \qquad z=\int_0 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

welches zugleich mit x verschwinden soll. Dasselbe läſst sich nach Formel (19.) §. 28. durch die Reihe F wie folgt ausdrücken:

$$z=4x^{\frac{1}{4}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x).$$

setzt man aber in diesem Integrale $x=\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2$, so erhält man das umgeformte Integral:

$$z=2\sqrt{2}\int_0\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin\varphi^2)}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi).$$

Werden diese beiden Ausdrücke des z einander gleich gesetzt, und wird für x sein Werth substituirt, so ist:

$$51.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2\right).$$

Aus dieser Formel können durch Umformung der Reihe F mehrere andern abgeleitet werden. Setzt man z. B. in Formel (45.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$ und $x=\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2$, so geht dieselbe über in:

$$F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\varphi^2)}}{1+\cos\varphi}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},-\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^4\right);$$

dies in (51.) substituirt, giebt:

$$52.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},-(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)^4).$$

Setzt man ferner in Formel (43.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{4}$, $x=1-\cos\varphi^4$, so wird

$$F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1-\cos\varphi^4)=\frac{2}{1+\cos\varphi^2}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2\right),$$

und dies, in (51.) substituirt, giebt:

$$53.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi^4}{2}\right)}F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1-\cos\varphi^4).$$

Verwandelt man die in dieser Formel enthaltene Reihe F weiter nach Formel (21.) §. 28., so wird

$$\mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}-\sqrt{2}.\cos\varphi\sqrt{(1-\cos\varphi^4)}\,F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{4},\cos\varphi^4),$$

und wenn diese Reihe endlich nach Formel (17.) §. 9. verwandelt wird:

$$54.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}-\sqrt{2}\cos\varphi\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\cos\varphi^4).$$

Diese Formel giebt, wenn $\varphi=\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird,

$$\mathrm{F}^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}})=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}.$$

Auch das elliptische Integral der zweiten Gattung, dessen Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, kann durch die Reihe F ausgedrückt werden. Setzt man nämlich in

$$\mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\int_0 d\varphi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin\varphi^2)}$$

$\cos\varphi^4=1-x$, so erhält man

$$\mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}dx,$$

und wenn diese beiden Integrale durch die Reihe F ausgedrückt werden,

$$55.\quad \mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}}(F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},x)+F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},x)),$$

wo $x=1-\cos\varphi^4$.

Es soll ferner folgendes Integral betrachtet werden:

$$y=\int_0 x^{-\frac{5}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

welches, durch die Reihe F ausgedrückt, giebt:

$$y=6x^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6},\tfrac{7}{6},x).$$

Um dasselbe durch elliptische Integrale auszudrücken, nehme man:

$$x=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sin\frac{1}{2}\varphi^2+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2)^3}\quad\text{oder}\quad 1+\sqrt{3}\,\mathrm{cotang}\tfrac{1}{2}\varphi^2=x^{-\frac{1}{3}},$$

und setze Kürze halber $\frac{2-\sqrt{3}}{4}=c^2$, so findet man das umgeformte Integral

$$y=3^{\frac{3}{4}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}}=3^{\frac{3}{4}}\mathrm{F}(c,\varphi).$$

Dieser Ausdruck des y, mit den anderen verbunden, giebt

$$57.\quad \mathrm{F}(c,\varphi)=2.3^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6},\tfrac{7}{6},x),$$

$$\text{wo}\quad c^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\quad\text{und}\quad x=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sin\frac{1}{2}\varphi^2+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2)^3}.$$

Geht man eben so von dem Integrale

$$y=\int z^{-\frac{5}{6}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

aus, so ist zunächst

$$y=6z^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6},\tfrac{7}{6},-z);$$

setzt man aber

$$z=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2-\sin\frac{1}{2}\varphi^2)^3}\quad\text{und}\quad b^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4},$$

so verwandelt sich dieses Integral in:

$$y=3^{\frac{3}{4}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin\varphi^2)}}=3^{\frac{3}{4}}\mathrm{F}(b,\varphi);$$

man hat daher:

$$58.\quad \mathrm{F}(b,\varphi)=2.3^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6},\tfrac{7}{6},-z),$$

$$\text{wo}\quad b^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\quad\text{und}\quad z=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2-\sin\frac{1}{2}\varphi^2)^3}.$$

Dies sind die einfachsten Ausdrücke der Functionen $\mathrm{F}(c,\varphi)$ und $\mathrm{F}(b,\varphi)$, aus welchen durch Verwandlungen der Reihe F leicht eine grofse Anzahl ähnlicher abgeleitet werden können. Es lassen sich für diese Werthe der

Moduln c und b auch die elliptischen Integrale der zweiten Gattung durch die Reihe F ausdrücken; da jedoch diese Ausdrücke minder einfach sind, so sollen sie hier übergangen werden.

Es sollen nun noch für zwei andere Werthe des Moduls die elliptischen Integrale der ersten Gattung durch die Reihe F ausgedrückt werden. Nimmt man nämlich das Integral:

$$59. \quad u=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^4-8z^2+8)}},$$

und setzt in demselben $z=m.\sin\varphi$, wo $m^2=4-2\sqrt{2}$, und $k=\sqrt{2}-1$, so wird

$$u=\frac{m}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}=\frac{m}{2\sqrt{2}}\mathrm{F}(k,\varphi).$$

Um dasselbe Integral durch die Reihe F auszudrücken, setze man $z=\frac{2x}{1+x^2}$, so wird

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^8)}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x^8)}},$$

und daher nach Formel (19.) §. 28.:

$$u=\frac{x}{\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)-\frac{x^3}{3\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8).$$

Aus den beiden Ausdrücken des u folgt:

$$60. \quad \frac{m}{2}\mathrm{F}(k,\varphi)=xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)-\frac{x^3}{3}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8),$$

wo $m.\sin\varphi=\frac{2x}{1+x^2}$, und daher $x^2=\frac{1-\sqrt{(1-m^2\sin\varphi^2)}}{1+\sqrt{(1-m^2\sin\varphi^2)}}$,

$$m^2=4-2\sqrt{2},\qquad k=\sqrt{2}-1.$$

Auf gleiche Weise findet man einen ähnlichen Ausdruck des elliptischen Integrals $\mathrm{F}(\lambda,\varphi)$, dessen Modul $\lambda=\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}$ ist, aus dem Integrale

$$61. \quad v=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^4+8z^2+8)}}.$$

Setzt man nämlich $z=m\,\mathrm{tang}\,\psi$, wo $m^2=4-2\sqrt{2}$, und $\lambda^2=2\sqrt{2}-2$, so wird

$$v=\frac{m}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2\sin\psi^2)}}=\frac{m}{2\sqrt{2}}\mathrm{F}(\lambda,\psi);$$

setzt man aber $z=\frac{2x}{1-x^2}$, so wird

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^8)}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x^8)}},$$

also

$$v=\frac{x}{\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)+\frac{x^3}{3\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8),$$

und aus den beiden Ausdrücken des v folgt:

$$62.\quad \frac{m}{2}\mathrm{F}(\lambda,\psi) = xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)+\frac{x^3}{3}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8),$$

wo $m\,\mathrm{tang}\,\psi=\frac{2x}{1-x^2}$ und daher $x^2=\frac{\sqrt{(1+m^2\,\mathrm{tang}\,\psi^2)}-1}{\sqrt{(1+m^2\,\mathrm{tang}\,\psi^2)}+1}$ und

$$m^2=4-2\sqrt{2},\qquad \lambda^2=2\sqrt{2}-2.$$

Werden die Formeln (60.) und (62.) addirt und subtrahirt, so erhält man umgekehrt für die Ausdrücke der beiden Reihen $F(\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{9}{8},-x^8)$ und $F(\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{11}{8},-x^8)$ durch elliptische Integrale:

$$63.\quad xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)=\frac{m}{4}(\mathrm{F}(\lambda,\psi)+\mathrm{F}(k,\varphi)),$$

$$64.\quad x^3F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8)=\frac{3m}{4}(\mathrm{F}(\lambda,\psi)-\mathrm{F}(k,\varphi)).$$

Wir haben hier die unbestimmten elliptischen Integrale der ersten Gattung für die Werthe der Moduln $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)}$ und $\sqrt{2}-1$ durch die Reihe F ausgedrückt; hieraus folgt unmittelbar, dafs sich noch eine unendliche Anzahl anderer elliptischer Integrale ebenfalls durch die Reihe F ausdrücken läfst, nämlich alle diejenigen, deren Moduln als umgeformt aus diesen drei Moduln betrachtet werden können, zu welchen unter andern auch die Moduln $\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)}$ und $\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}$ gehören; die obigen drei Moduln aber sind ganz unabhängig von einander, oder können nicht in einander umgeformt werden. Von der andern Seite sind die hier vorkommenden Reihen F durch elliptische unbestimmte Integrale ausgedrückt, woraus folgt, dafs auch alle Umformungen dieser Reihen F sich durch unbestimmte elliptische Integrale ausdrücken lassen. Für andere Werthe des Moduls, welche von den genannten dreien unabhängig sind, ist es mir nicht gelungen, die elliptischen unbestimmten Integrale durch die Reihe F auszudrücken, man müfste denn die beiden äufsersten Werthe des Moduls 0 und 1 nehmen, welche aber nur Kreisbogen und Logarithmen geben. Übrigens sind grade diese drei Moduln in vielen Beziehungen besonders merkwürdig und haben unter andern die Eigenschaft mit einander gemein, dafs sie sich in ihre Complementair-Moduln umformen lassen.

Eine nur einigermafsen vollständige Sammlung solcher Reihen F zu geben, welche sich durch unbestimmte elliptische Integrale summiren lassen, würde zu weitläuftig sein. Man kann in dieser Hinsicht bemerken, dafs nur solche Reihen F diese Eigenschaft haben können, welche sich überhaupt durch unbestimmte Integrale ausdrücken lassen, und dies ist, wie wir oben §. 28. gesehen haben, bei denjenigen der Fall, in welchen entweder eines der beiden ersten Elemente α oder β eine ganze Zahl ist, oder in welchen das dritte Element γ um eine ganze Zahl gröfser ist, als eines der beiden ersten. Die Integrale, durch welche solche Reihen ausgedrückt werden, sind immer von der Form:

$$\int x^{\lambda-1}(1\pm x^{\mu})^{\nu}\,dx;$$

nachdem man also eine Reihe F, welche man durch elliptische Integrale summiren will, zunächst durch Integrale von dieser Form ausgedrückt hat, mufs man untersuchen, ob diese sich entweder durch die zahlreichen, von Legendre gegebenen Substitutionen, oder durch andere, in elliptische Integrale verwandeln lassen. Endlich kann noch gezeigt werden, dafs, wenn die Reihe $F(a, b, c, x)$ sich durch elliptische unbestimmte Integrale summiren läfst, dasselbe auch bei der Reihe $F(a+\lambda, b+\mu, c+\nu, x)$ der Fall sein wird, wenn λ, μ, ν, beliebige ganze Zahlen bedeuten. Aus $F(a, b, c, x)$ kann man nämlich $F(a+1, b+1, c+1, x)$ durch Differenziation herleiten, und aus diesen beiden Reihen sodann $F(a+\lambda, b+\mu, c+\nu, x)$ durch Reductionsformeln.

§. 32.

Zu den Transcendenten, welche in der allgemeinen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten sind, gehören auch die Coefficienten der Entwickelung

65. $$(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n} = P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos 2\varphi+2P_3\cos 3\varphi+\dots$$

Diese Coefficienten sind schon sehr oft untersucht worden, und Legendre hat denselben die erste Abtheilung seines *Appendice au traité des fonctions elliptiques, Tom. II. pag.* 531. *etc.* gewidmet. Wir werden hier dieselben Bezeichnungen, welche Legendre gebraucht, beibehalten, und mit Hülfe der für die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ gefundenen Formeln die Theorie dieser Transcendenten zu vervollständigen suchen. Wenn der allgemeine Coefficient der Entwickelung (65.) als Function seines Stellenzeigers λ und des Exponenten n, durch $P(\lambda, n)$ bezeichnet wird, und Kürze halber gesetzt wird:

$$\frac{n(n+1)\dots(n+\lambda-1)}{1.2\dots\lambda} = \Lambda,$$

so ist:

66. $$P(\lambda, n) = \Lambda a^{\lambda} F(n+\lambda, n, \lambda+1, a^2).$$

Indem man die Reihe $F(n+\lambda, n, \lambda+1, a^2)$ nach den im zweiten und dritten Abschnitte gefundenen Formeln verwandelt, findet man alle bis jetzt bekannten merkwürdigen Eigenschaften dieser Coefficienten, eben so, wie die allgemeinen Reductionsformeln der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ alle Reductionsformeln dieser Coefficienten gewähren. Wir wollen uns nicht damit aufhalten, schon bekannte Eigenschaften zu entwickeln, sondern nur einige noch nicht bekannte Resultate aus dem Obigen herleiten. Alle Reihen, durch welche der Coefficient $\mathrm{P}(\lambda,n)$ bis jetzt entwickelt worden ist, haben den Mangel, dafs sie, wenn die Quantität a der Einheit sehr nahe kommt, sehr langsam convergiren, und Legndre a. a. O. pag. 570 schlägt deshalb vor, in diesem Falle die Werthe derselben aus den Ausdrücken durch bestimmte Integrale nach der Methode der Quadraturen zu berechnen. Dieser Übelstand kann auf folgende Weise gehoben werden. Setzt man in Formel (23.) §. 11. $\alpha=n+\lambda$, $\beta=n$, $\gamma=\lambda+1$, $x=a^2$, so erhält man:

$$F(n+\lambda,n,\lambda+1,a^2)=\frac{\Pi(\lambda)\,\Pi(-2n)}{\Pi(\lambda-n)\,\Pi(-n)}F(n+\lambda,n,2n,1-a^2)$$
$$+\frac{\Pi(\lambda)\,\Pi(2n-2)}{\Pi(n+\lambda-1)\,\Pi(n-1)}(1-a^2)^{1-2n}F(1-n,1+\lambda-n,2-2n,1-a^2).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit Λa^λ, so erhält man:

$$67.\quad \mathrm{P}(\lambda,n)=\frac{\Pi(-2n)(-a)^\lambda}{\Pi(-n-\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}F(n+\lambda,n,2n,1-a^2)$$
$$+\frac{\Pi(2n-2)}{(\Pi(n-1))^2}a^\lambda(1-a^2)^{1-2n}F(1-n+\lambda,1-n,2-2n,1-a^2).$$

Dieser Ausdruck des Coefficienten $\mathrm{P}(\lambda,n)$ durch zwei Reihen, welche nach Potenzen von $1-a^2$ geordnet sind, ist grade, in dem Falle, wo a der Einheit sehr nahe kommt, zur numerischen Berechnung äufserst vortheilhaft; aber derselbe kann auch noch in einen andern umgeformt werden, dessen Reihen bei weitem rascher convergiren. Setzt man nämlich in Formel (43.) §. 19. $\alpha=n+\lambda$, $\beta=n$, $x=1-a^2$, so erhält man:

$$F(n+\lambda,n,2n,1-a^2)=\left(\frac{1+a}{2}\right)^{-2n-2\lambda}F\left(n+\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2},n+\tfrac{1}{2},\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right),$$

und wenn in derselben Formel (43.) gesetzt wird $\alpha=1-n+\lambda$, $\beta=1-n$, $x=1-a^2$:

$$F(1-n+\lambda,1-n,2-2n,1-a^2)$$
$$=\left(\frac{1+a}{2}\right)^{2n-2-2\lambda}F\left(1-n+\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-n,\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right);$$

dies in der Formel (67.) substituirt, giebt:

68. $$\mathrm{P}(\lambda,n)=\frac{\Pi(-2n)(-\alpha)^\lambda}{\Pi(-n-\lambda)\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{1+a}{2}\right)^{-2n-2\lambda}F\left(n+\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2},n+\tfrac{1}{2},\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right)$$
$$+\frac{\Pi(2n-2)}{(\Pi(n-1))^2}a^\lambda(1-a^2)^{1-2n}\left(\frac{1+a}{2}\right)^{2n-2-2\lambda}F\left(1-n+\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-n,\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right).$$

Die beiden Reihen dieser Formel sind außerordentlich convergent, sobald a nur einigermaßsen der Einheit nahe kommt. So z. B. für $a=\frac{9}{10}$ ist $\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2=\frac{1}{361}$, so daſs die beiden Reihen in diesem Falle nach Potenzen von $\frac{1}{361}$ fortschreiten. Die durch die Function Π ausgedrückten Factoren findet man mit großer Genauigkeit aus den Tafeln dieser Function, welche Gauſs und Legendre berechnet haben. Für die beiden Fälle: erstens, daſs n eine ganze Zahl ist, und zweitens, daſs n von der Form $k+\frac{1}{2}$ ist (für k eine ganze Zahl), sind die beiden Formeln (67.) und (68.) unbrauchbar, weil sie unendliche Quantitäten einschlieſsen; in dem ersten Falle sind jedoch die Coefficienten $\mathrm{P}(\lambda,n)$ nur algebraische Functionen, und im zweiten Falle können sie durch elliptische Functionen ausgedrückt werden, wie Legendre a. a. O. gezeigt hat. Es ist ferner leicht zu zeigen, daſs es auſserdem noch zwei Fälle giebt, in welchen diese Coefficienten alle durch die ganzen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung können ausgedrückt werden, nämlich: erstens, wenn n von der Form $k\pm\frac{1}{4}$, und zweitens, wenn n von der Form $k\pm\frac{1}{3}$ ist, wo k eine ganze Zahl. Es ist nämlich §. 29. bei (40.) bemerkt worden, daſs unter andern die beiden Reihen $F(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,x)$ und $F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,x)$, und alle andern, welche aus diesen entstehen, indem die drei ersten Elemente um beliebige ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, sich durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken lassen; woraus unmittelbar folgt, daſs

$$\mathrm{P}(\lambda,k\pm\tfrac{1}{4})=\Lambda.a^\lambda F(\lambda+k\pm\tfrac{1}{4},k\pm\tfrac{1}{4},\lambda+1,a^2),$$

oder jeder Coefficient der Entwickelung (65.) für $n=k\pm\frac{1}{4}$ sich durch die elliptischen Integrale ausdrücken läſst. Ferner ist §. 29. bei (43.) bemerkt worden, daſs unter andern die beiden Reihen $F(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,x)$ und $F(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1,x)$ und alle, welche aus diesen entstehen, indem die drei ersten Elemente um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, sich durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken lassen; woraus eben so folgt, daſs

$$\mathrm{P}(\lambda,k\pm\tfrac{1}{3})=\Lambda.a^\lambda F(\lambda+k\pm\tfrac{1}{3},k\pm\tfrac{1}{3},\lambda+1,a^2),$$

oder jeder Coefficient der Entwickelung (65.) für $n=k\pm\frac{1}{3}$ sich durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken läſst.

Abschnitt VII.

Über die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, in welcher das letzte Element x imaginär ist.

§. 33.

Die Untersuchung der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, welche wir bisher nur für reale Werthe der vier Elemente α, β, γ und x angestellt haben, könnte von einem weit allgemeineren Gesichtspuncte aus geführt werden, wenn man auch imaginäre Werthe dieser vier Elemente zuließe. (Man vergleiche die Abhandlung von Abel über die Binomialreihe, welche ein specieller Fall der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ist, in diesem Journale Bd. 1. pag. 311.) Im allgemeinen aber würde eine Reihe, in welcher α, β, γ und x imaginär sind, nur durch höhere Transcendenten, welche von acht Elementen abhängig sein würden, real oder unter der Form $M+\sqrt{-1}\,N$ ausgedrückt werden können. Wir werden uns daher hier nur darauf beschränken, die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für imaginäre Werthe des letzten Elementes x zu betrachten.

Nimmt man $x=re^{v\sqrt{-1}}=r(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)$, so zerfällt die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ in folgende zwei Reihen:

$$1.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}r\cos v+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}r^2\cos 2v+\dots$$
$$+\sqrt{-1}\left(\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}r\sin v+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}r^2\sin 2v+\dots\right).$$

Diese Reihen können auf eben so viele Arten in andere Reihen von derselben Form verwandelt werden, wie die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ mit realem letzten Elemente; denn jede der im zweiten, dritten und vierten Abschnitte gefundenen Formeln gewährt eine Formel für die Verwandlung dieser nach Potenzen von r und Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens v fortschreitenden Reihen. Da es nur mit geringen Schwierigkeiten verknüpft ist, die oben gefundenen Formeln für den gegenwärtigen Zweck einzurichten, so mag es hinreichen, dies an einigen der Hauptformeln zu zeigen. Damit aber diese Formeln eine einfachere Gestalt gewinnen, wird es nöthig sein, zunächst einige passende Bezeichnungen einzuführen. Die Reihen, welche hier vorkommen, sollen, wie dies häufig geschieht, durch ihre allgemeinen Glieder bezeichnet werden, welchen das Zeichen Σ vorgesetzt wird; der Stellenzeiger des Gliedes soll stets durch k bezeichnet werden; ferner soll der $k$te Coefficient der Entwickelung von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch $C_k(\alpha,\beta,\gamma)$ bezeichnet werden, so dafs

$$2.\quad C_k(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{1\dots k.\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}.$$

Auf diese Weise wird die Gleichung (1.) folgendermafsen dargestellt werden:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos kv+\sqrt{-1}\,\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\sin kv.$$

Es soll nun zunächst die Formel (17.) §. 9. für den gegenwärtigen Zweck eingerichtet werden. Setzt man in derselben $x=re^{v\sqrt{-1}}$, so ist:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=(1-re^{v\sqrt{-1}})^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}}).$$

Setzt man nun ferner $1-re^{v\sqrt{-1}}=\varrho e^{-w\sqrt{-1}}$, oder

$$\varrho=\sqrt{(1-2\cos v.r+r^2)}\quad\text{und}\quad \operatorname{tang} w=\frac{r\sin v}{1-r\cos v},$$

so hat man nach der angenommenen Art der Bezeichnung:

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^ke^{kv\sqrt{-1}}=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k.e^{(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w)\sqrt{-1}},$$

und wenn die realen und die imaginären Theile getrennt werden:

$$3.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos kv=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k.\cos(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w),$$

$$4.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\sin kv=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k.\sin(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w).$$

Man kann diese beiden Formeln in eine einzige zusammenfassen. Multiplicirt man nämlich die erste mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$, wo θ eine ganz beliebige Quantität ist, und subtrahirt die Producte von einander, so ist:

$$5.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$$
$$=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k\cos(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w+\theta).$$

Auf dieselbe Weise kann man die Formel (18.) §. 9. behandeln, welche für $x=re^{v\sqrt{-1}}$ ist:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=(1-re^{v\sqrt{-1}})^{-\alpha}\Big(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{-re^{v\sqrt{-1}}}{1-re^{v\sqrt{-1}}}\Big).$$

Setzt man, eben so wie oben, $\varrho=\sqrt{(1-2\cos v.r+r^2)}$ und $\operatorname{tang} w=\frac{r\sin v}{1-r\cos v}$, so wird

$$1-re^{v\sqrt{-1}}=\varrho e^{-w\sqrt{-1}}\quad\text{und}\quad\frac{-re^{v\sqrt{-1}}}{1-re^{v\sqrt{-1}}}=-\frac{r}{\varrho}.e^{(v+w)\sqrt{-1}};$$

daher kann diese Formel jetzt so dargestellt werden:

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^ke^{kv\sqrt{-1}}=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma).\Big(\frac{-r}{\varrho}\Big)^ke^{(k(v+w)+\alpha w)\sqrt{-1}},$$

und nach Trennung der realen und imaginären Theile:

$$6.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos kv=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\Big(\frac{-r}{\varrho}\Big)^k\cos(k(v+w)+\alpha w),$$

$$7.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\sin kv=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\Big(\frac{-r}{\varrho}\Big)^k\sin(k(v+w)+\alpha w).$$

Multiplicirt man hier wieder die erste Formel mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$ und subtrahirt, so werden diese beiden in folgende Formel zusammengefafst:

$$8.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$$
$$=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k\cos(k(v+w)+\alpha w+\theta).$$

Die beiden allgemeinen Formeln (5.) und (8.) gewähren sehr zahlreiche Umformungen bekannter, nach Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens geordneter Reihen, und zwar vorzüglich für den Fall $r=1$, welchen wir daher besonders betrachten wollen. Für $r=1$ wird

$$\varrho=\sqrt{(2-2\cos v)}=2\sin\frac{v}{2},\qquad \operatorname{tang} w=\operatorname{cotang}\frac{v}{2},$$

und daher $w=\frac{2h+1}{2}\pi-\frac{v}{2}$, wo h irgend eine ganze Zahl bedeutet. Diese Werthe, in Formel (5.) substituirt, geben:

$$9.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\cos(kv+\theta=$$
$$\left(2\sin\frac{v}{2}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\cos\left(kv+(\gamma-\alpha-\beta)\left(\frac{v}{2}-\frac{2h+1}{2}\pi\right)+\theta\right).$$

Es ist nun die ganze Zahl h zu bestimmen, welche in dem zweiten Theile dieser Gleichung vorkommt. Diese Zahl kann in verschiedenen Grenzen des v andere und andere Werthe bekommen; aber sie kann nur dann ihren Werth ändern, wenn dadurch die Continuität der Werthe der Reihe nicht unterbrochen wird; also nur dann, wenn $2\sin\frac{v}{2}=0$ oder $v=0$, $v=2\pi$, $v=4\pi$, $v=6\pi$, u. s. w.: innerhalb jeder der Grenzen des v, von 0 bis 2π, 2π bis 4π, 4π bis 6π, u. s. w. mufs die ganze Zahl h einen und denselben Werth behalten. Damit nun die Formeln etwas einfacher werden, wollen wir dieselben hier und in dem Folgenden stets nur für die ersten Intervallen des Bogens v betrachten, in welchen sie gültig sind, weil dieselben, indem $v-h\pi$ statt v gesetzt wird, leicht für alle übrigen Grenzen des v erweitert werden können. Um nun den Werth der Zahl h in den Grenzen $v=0$ bis $v=2\pi$ zu bestimmen, werde $v=\pi$ gesetzt; dies giebt

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)(-1)^k\cos\theta=2^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)(-1)^k\cos(\theta-(\gamma-\alpha-\beta)h\pi),$$

welche Gleichung auch so dargestellt werden kann:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)=2^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,-1).\frac{\cos(\theta-(\gamma-\alpha-\beta)h\pi)}{\cos\theta};$$

setzt man aber in Formel (17.) §. 9. $x=-1$, so ist

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)=2^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,-1).$$

Diese Gleichung, mit der vorhergehenden verglichen, giebt:

$$\cos\theta = \cos(\theta-(\gamma-\alpha-\beta)h\pi);$$

und damit diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von α, β und γ Statt habe, mufs $h=0$ sein. Es ist also in den Grenzen $v=0$ bis $v=2\pi$, in Formel (9.), $h=0$; dieselbe wird daher

$$10.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\cos(kv+\theta)$$
$$=\left(2\sin\tfrac{v}{2}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\cos\left(kv+(\gamma-\alpha-\beta)\left(\tfrac{v-\pi}{2}\right)+\theta\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=2\pi$.

Überdies ist wohl zu beachten, dafs in dieser Formel der Werth von $\gamma-\alpha-\beta$ in den Grenzen -1 und $+1$ enthalten sein mufs, damit beide darin vorkommende Reihen convergent seien.

Ganz auf dieselbe Weise, wie aus der Formel (5.) die Formel (10.) abgeleitet worden ist, findet man, indem in Formel (8.) $r=1$ gesetzt wird:

$$11.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\cos(kv+\theta)$$
$$=\left(2\sin\tfrac{v}{2}\right)^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\left(\frac{-1}{2\sin\frac{v}{2}}\right)^k\cos\left(k\frac{v+\pi}{2}-\alpha\frac{v-\pi}{2}+\theta\right)$$

in den Grenzen $v=\frac{\pi}{3}$ bis $v=\frac{5\pi}{3}$.

Die allgemeinen Gleichungen des §. 11., welche unter dreien Functionen F Statt haben, gewähren ebenfalls jede eine Verwandlung der Reihe $\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$, in zwei andere Reihen derselben Gattung. So z. B. wenn man die Formel (23.) §. 11. auf dieselbe Weise behandelt, wie es mit den beiden Formeln (17.) und (18.) geschehen ist, findet man:

$$12.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)=A_2\Sigma C_k(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1)\varrho^k\cos(kw-\theta)$$
$$+B_2\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1)\varrho^k\cos((k-\alpha-\beta+\gamma)w-\theta),$$

wo ϱ und w dieselben Bedeutungen haben, wie in den übrigen Formeln dieses Abschnittes, und A_2 und B_2 dieselben Constanten sind, wie in der Gleichung (23.) §. 11.

§. 34.

Auf dieselbe Weise können auch alle Formeln des dritten und vierten Abschnittes so verwandelt werden, dafs sie entsprechende Umformungen der nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens und nach Potenzen zugleich geordneten Reihe

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$$

gewähren. Unter diesen sind aber einige besonders merkwürdig, durch-welche eine Reihe dieser Art in eine andere nur nach Potenzen geordnete, oder in eine Reihe F mit realem letzten Elemente verwandelt wird. Diese wollen wir daher jetzt besonders betrachten.

Zwei sehr einfache Formeln dieser Art können aus den Gleichungen (75.) und (76.) §. 20. hergeleitet werden. Setzt man nämlich $x = -\operatorname{tang} v^2$, so erhält man unmittelbar:

$$13.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \cos kv = cF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{tang} v^2\right),$$

$$14.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \sin kv = d.\operatorname{tang} v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang} v^2\right),$$

$$\text{wo}\quad c = \frac{\sqrt{\pi}\, \Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)} \quad\text{und}\quad d = \frac{2\sqrt{\pi}\, \Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}.$$

Wir wollen auf die beiden Reihen links vom Gleichheitszeichen eine in Formel (8.) des vorigen Paragraphs enthaltene Umformung anwenden. Setzt man nämlich in dieser Formel $r = \frac{1}{2\cos v}$, wodurch $\varrho = \frac{1}{2\cos v}$, $\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} v$ wird, so erhält man

$$15.\quad \Sigma C_k(\alpha, \beta, \gamma)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \cos(kv+\theta)$$
$$= (2\cos v)^\alpha \Sigma C_k(\alpha, \gamma-\beta, \gamma)(-1)^k \cos((\alpha+2k)v+\theta)$$
$$\text{in den Grenzen } v = -\frac{\pi}{3} \text{ bis } v = +\frac{\pi}{3},$$

und wenn $\theta = 0$, $\gamma = \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wird:

$$16.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \cos kv$$
$$= (2\cos v)^\alpha \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha-\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k \cos(\alpha+2k)v;$$

wenn aber $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\gamma = \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wird:

$$17.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \sin kv$$
$$= (2\cos v)^\alpha \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha-\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k \sin(\alpha+2k)v.$$

Diese Werthe, in (13.) und (14.) substituirt, geben:

$$18.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha-\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k \cos(\alpha+2k)v$$
$$= c(2\cos v)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{tang} v^2\right),$$

$$19.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha-\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k \sin(\alpha+2k)v$$
$$= d.\operatorname{tang} v(2\cos v)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang} v^2\right).$$

Diese beiden Formeln erhalten eine noch einfachere Gestalt, wenn die beiden Reihen F nach Formel (18.) §. 9. umgeformt werden, und β in $1-\beta$ verwandelt wird. Alsdann hat man

$$20.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k \cos(\alpha+2k)v$$
$$= f.F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right),$$
$$21.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k \sin(\alpha+2k)v$$
$$= g.\sin v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right)$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$,

$$\text{wo}\quad f=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2^\alpha\,\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)}\quad\text{und}\quad g=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2^\alpha\,\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

So wie in diesen Formeln die beiden Reihen $F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right)$ und $F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right)$, welche nach Potenzen von $\sin v^2$ geordnet sind, in andere nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von v geordnete Reihen verwandelt sind: so läfst sich auch die Reihe $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$ verwandeln, und zwar auf folgende Weise. Man setze, Kürze halber,

$$22.\quad m=\frac{2^{\beta+\alpha}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi(-\beta)}{\sqrt{\pi}\,\Pi\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

und multiplicire die Formel (20.) mit $m.\cos\frac{\beta\pi}{2}$ und (21.) mit $m.\sin\frac{\beta\pi}{2}$, so findet man zunächst, nach einigen leichten Umformungen der Function Π,

$$m.\cos\frac{\beta\pi}{2}.f=c\quad\text{und}\quad m.\sin\frac{\beta\pi}{2}.g=d,$$

wo c und d dieselben constanten Factoren bezeichnen, wie in (13.) und (14.). Durch Addition und Substraction der mit den angegebenen Quantitäten multiplicirten Gleichungen (20.) und (21.) erhält man daher

$$23.\quad m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k\cos\left((\alpha+2k)v-\frac{\beta\pi}{2}\right)$$
$$= cF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right)+d.\sin v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right),$$
$$24.\quad m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k\cos\left((\alpha+2k)v+\frac{\beta\pi}{2}\right)$$
$$= cF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right)-d.\sin v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right).$$

Aus Formel (74.) §. 20. ersieht man aber, indem daselbst $\sqrt{x}=\sin v$ gesetzt wird, dafs der zweite Theil der Gleichung (23.) gleich $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1+\sin v}{2}\right)$ ist, und eben so aus Formel (73.) §. 20., dafs der zweite Theil der Gleichung (24.) gleich $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1-\sin v}{2}\right)$ ist; substituirt man daher diese Werthe, und verwandelt überdiefs v in $\frac{\pi}{2}-2v$, so erhält man

$$25.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \cos v^2\right)$$
$$= m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)\cos\left((2\alpha+4k)v-(\alpha-\beta)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$26.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)\cos\left((2\alpha+4k)v-(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{2}$.

Noch andere Verwandlungen der Reihe $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$ erhält man aus der Gleichung (56.) §. 19. Dieselbe geht nämlich, wenn $x=\sin v^2$ gesetzt wird, über in:

$$F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)=e^{-2\alpha v\sqrt{-1}}F\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta, 2\sin 2v.e^{\left(\frac{\pi}{2}-2v\right)\sqrt{-1}}\right);$$

wenn daher die realen und imaginären Theile getrennt werden, erhält man, nach der in diesem Abschnitte eingeführten Bezeichnung:

$$27.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k\cos\left((2\alpha+2k)v-\frac{k\pi}{2}\right),$$
$$28.\quad 0 = \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k\sin\left((2\alpha+2k)v-\frac{k\pi}{2}\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{12}$.

Dafs die Reihe (28.), welche aufser v noch zwei ganz beliebige Elemente α und β enthält, in den angegebenen Grenzen allemal $=0$ wird, ist eine merkwürdige Erscheinung; es giebt jedoch viele nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens geordnete Reihen, welche dieselbe Eigenschaft haben. Man kann den Gleichungen (27.) und (28.) auch eine andere Form geben, indem man nämlich erstere mit $\cos 2\alpha v$ letztere mit $\sin 2\alpha v$ multiplicirt und dieselben sodann addirt. Alsdann ist:

$$29. \qquad \cos 2\alpha v\, F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k \cos k\left(2v-\frac{\pi}{2}\right).$$

Wenn man aber (27.) mit $\sin 2\alpha v$ und (28.) mit $\cos 2\alpha v$ multiplicirt, und diese Gleichungen sodann subtrahirt, so ist:

$$30. \qquad \sin 2\alpha v\, F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k \sin k\left(\frac{\pi}{2}-2v\right).$$

§. 35.

Die allgemeine Reihe, deren Umformungen wir in diesem Abschnitte gezeigt haben, nämlich

$$\Sigma C_k(\alpha, \beta, \gamma)\, r^k \cos(kv+\theta),$$

enthält den gröfsten Theil aller nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens geordneter Reihen, welche man als Reihen-Entwickelungen bekannter Functionen aufzustellen pflegt. Diese Reihen-Entwickelungen, und zahlreiche Umformungen derselben, sind in den Formeln dieses Abschnittes enthalten, wie wir es jetzt an einigen Beispielen zeigen wollen.

Setzt man in (8.) §. 33. $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\theta=v$, so wird:

$$\Sigma C_k(1,1,2)\, r^k \cos(k+1)v = \frac{1}{\varrho}\Sigma C_k(1,1,2)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k \cos(k+1)(v+w),$$

oder, wenn die Reihen entwickelt werden:

$$31. \qquad \frac{\cos v}{1}+\frac{r\cos 2v}{2}+\frac{r^2\cos 3v}{3}+\dots$$
$$= \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\cos(v+w)}{1}-\frac{r\cos 2(v+w)}{\varrho.2}+\frac{r^2\cos 3(v+w)}{\varrho^2.3}-\dots\right),$$

wo $\varrho = \sqrt{(1-2\cos v\, r+r^2)}$ und $\tang w = \frac{r\sin v}{1-r\cos v}$.

Die Summe der ersten Reihe ist bekanntlich $-\frac{1}{2r}l(1-2\cos vr+r^2) = -\frac{1}{r}l\varrho$: also ist

$$32.\quad -l\varrho = \frac{r\cos(v+w)}{\varrho.1} - \frac{r^2\cos 2(v+w)}{\varrho^2.2} + \frac{r^3\cos 3(v+w)}{\varrho^3.3} - \dots$$

Für den speciellen Fall $v=\frac{\pi}{2}$, wodurch $r=\operatorname{tang} w$, $\varrho=\frac{1}{\cos w}$, hat man:

$$33.\quad l\cos w = -\frac{\sin w \sin w}{1} + \frac{(\sin w)^2\cos 2w}{2} + \frac{(\sin w)^3\sin 3w}{3} - \dots$$

Setzt man ferner in (32.) $r=2\cos v$, wodurch $\varrho=1$, $w=-2v$, so wird:

$$34.\quad 0 = \frac{2\cos v\cos v}{1} - \frac{(2\cos v)^2\cos 2v}{2} + \frac{(2\cos v)^3\cos 3v}{3} - \dots$$

Wird in der Formel (10.) §. 33. $\gamma=\alpha$, $\beta=-n$, $v=\pi-2x$ und $\theta=nx$ gesetzt, so giebt dieselbe:

$$\Sigma C_k(\alpha,-n,\alpha)(-1)^k\cos(n-2k)x = (2\cos x)^n,$$

oder, entwickelt,

$$35.\quad \cos nx + \frac{n}{2}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \dots = (2\cos x)^n$$

in den Grenzen $x=-\frac{\pi}{2}$ bis $x=+\frac{\pi}{2}$,

welches die bekannte, zuerst von Euler gefundene Entwickelung der Potenz des Cosinus ist.

Setzt man ferner in Formel (11.) §. 33. $\beta=0$, $\alpha=n$, $v=\pi-2x$ und $\theta=0$, so erhält man:

$$1 = (2\cos x)^{-n}\,\Sigma C_k(n,\gamma,\gamma)\left(\frac{1}{2\cos x}\right)^k\cos(n-k)x,$$

und, wenn mit $(2\cos x)^n$ multiplicirt und die Reihe entwickelt wird,

$$36.\quad (2\cos x)^n = \cos nx + \frac{n}{1}.\frac{\cos(n-1)x}{2\cos x} + \frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{\cos(n-2)x}{(2\cos x)^2} + \dots,$$

in den Grenzen $x=-\frac{\pi}{3}$ bis $x=+\frac{\pi}{3}$.

Eine Entwickelung der Potenz des Cosinus in eine Reihe von dieser Form ist, wie ich glaube, noch nicht versucht worden. Obgleich dieselbe nur in den angegebenen Grenzen gültig ist, so hat sie doch den Vortheil, dafs sie für alle negativen und positiven Werthe des Exponenten n anwendbar ist, während von den bekannten Entwickelungen keine in den Grenzen $n=-1$ bis $n=-\infty$ convergent ist.

Eine andere Entwickelung der Potenz des Cosinus geht aus Formel (20.) hervor, wenn $\alpha=1$, $\beta=-n$, $v=x$ gesetzt wird, nämlich:

$$37.\quad (\cos x)^n = \frac{2\Pi\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\cos x + \frac{n-1}{n+3}\cos 3x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n+3)(n+5)}\cos 5x + \dots\right),$$

auf welche zuerst **Poisson** aufmerksam gemacht hat. (Man sehe meine *Dissertatio de sinuum et cosinuum potestatibus etc. Halae* 1832, *pag.* 6 und 13.)

Wird in (20.) gesetzt $\beta=0$, $\alpha=-n$, so erhält man die Entwickelung einer constanten Quantität nach Cosinussen der Vielfachen eines in den angegebenen Grenzen ganz beliebigen Bogens, nämlich

$$38.\quad \frac{2^n\sqrt{\pi}\,\Pi\left(-\frac{n}{2}\right)}{n\,\Pi\left(\frac{-n-1}{2}\right)}=\frac{\cos nv}{n}+\frac{n}{1}.\frac{\cos(n-2)v}{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{\cos(n-4)v}{n-4}+\dots$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$,

wovon folgende bekannte Entwickelung ein specieller Fall ist:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\cos v}{1}-\frac{\cos 3v}{3}+\frac{\cos 5v}{5}-\dots$$

Setzt man in (21.) $\beta=-1$, $\alpha=-n$, so erhält man

$$39.\quad \frac{2^n\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{-n-1}{2}\right)}{(n+1)\,\Pi\left(-\frac{n}{2}-1\right)}\sin v$$

$$=\frac{\sin nv}{(n+1)(n-1)}+\frac{n}{1}.\frac{\sin(n-2)v}{(n-1)(n-3)}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{\sin(n-4)v}{(n-3)(n-5)}+\dots$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$.

Wird die Gleichung (38.) nach v differenziirt, so erhält man daraus

$$40.\quad 0=\sin nv+\frac{n}{1}\sin(n-2)v+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)v+\dots$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$,

und diese Reihe ist, wie die neueren Untersuchungen über die Entwickelung der Potenzen des Cosinus und Sinus streng bewiesen haben, wirklich in den angegebenen Grenzen gleich Null.

Wird in (39.), nachdem durch n dividirt worden ist, $n=0$ gesetzt, so erhält man

$$41.\quad \frac{\pi}{4}\sin v=\frac{v}{2}+\frac{\sin 2v}{1.2.3}-\frac{\sin 4v}{3.4.5}+\frac{\sin 6v}{5.6.7}-\dots,$$

und hieraus durch Differenziation:

$$42.\quad \frac{\pi}{4}\cos v=\tfrac{1}{2}+\frac{\cos 2v}{1.3}-\frac{\cos 4v}{3.5}+\frac{\cos 6v}{5.7}-\dots$$

Diese einfache Reihe hat zuerst **Fourier** gefunden (*Théorie de la chaleur* *pag.* 242). Eine unendliche Anzahl ähnlicher Reihen-Entwickelungen habe ich in meiner erwähnten Dissertation hergeleitet (pag. 25 und 30).

Die Formeln dieses Abschnittes enthalten auch einige merkwürdige neue Reihen-Entwickelungen der elliptischen Integrale. Setzt man in den Formeln (25.) und (26.) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, so erhält man daraus, weil $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)=\frac{2}{\pi}F^1(c)$:

43. $F^1(\cos v)=\pi\left(\cos v+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos 5v+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cos 9v+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cos 13v+\ldots\right)$,

44. $F^1(\sin v)=\pi\left(\sin v+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin 5v+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin 9v+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin 13v+\ldots\right)$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{2}$.

Diese ihrer Form wegen nicht uninteressanten Entwickelungen lassen sich auch aus der Theorie der elliptischen Functionen selbst herleiten; wobei es nur darauf ankommt die Richtigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

45. $$\sqrt{c}\,F^1(c)+\frac{1}{\sqrt{c}}F^1\left(\frac{1}{o}\right)=F^2\left(\frac{1+c}{2\sqrt{c}}\right).$$

Wird in der §. 29. gefundenen Formel (26.)

$$\frac{2}{\pi}F^1(c)=\frac{1}{\sqrt{(1+c^2)}}F\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,\frac{4c^2}{(1+e^2)^2}\right)$$

$c=\tang\frac{v}{2}$ gesetzt, so erhält man daraus

46. $$F^1\left(\tang\frac{v}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{v}{2}F(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,\sin v^2).$$

Setzt man daher in Formel (26.) $\alpha=\frac{1}{4}$ und $\beta=\frac{3}{4}$, so geht daraus hervor:

47. $F^1\left(\tang\frac{v}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(-\frac{3}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}\cos\frac{v}{2}\left(\sin\frac{v}{2}+\frac{1.1}{3.2}\sin\frac{9v}{2}+\frac{1.5.1.3}{3.7.2.4}\sin\frac{17v}{2}+\ldots\right)$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{2}$.

Man kann den Factor dieser Formel auch durch ein elliptisches Integral ausdrücken. Es ist nämlich

48. $$\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(-\frac{3}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}=2\sqrt{2}\,F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}});$$

daher läſst sich, wenn $2v$ statt v gesetzt wird, diese Formel auch so darstellen:

49. $F^1\tang v)=2\sqrt{2}\,F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}})\cos v\left(\sin v+\frac{1.1}{3.2}\sin 9v+\frac{1.5.1.3}{3.7.2.4}\sin 17v+\ldots\right)$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{4}$.

Setzt man in Formel (26.) $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$, so leitet man daraus ganz auf dieselbe Weise eine ähnliche Entwickelung von $F^1(\operatorname{tang} v)$ ab:

$$50. \quad F^1(\operatorname{tang} v) = \frac{\pi\sqrt{2}}{F^1(\sqrt{\frac{1}{2}})}\cos v\left(\sin 3v + \frac{3.1}{5.2}\sin 11v + \frac{3.7.1.3}{5.9.2.4}\sin 19v + \ldots\right)$$

in den Grenzen $v = 0$ bis $v = \frac{\pi}{4}$.

Noch einige andere Reihen-Entwickelungen der ganzen elliptischen Integrale kann man aus den Formeln (27.), (29.) und (30.) ableiten.

§. 36.

Wir haben in dem Paragraph 34. mehrere Reihen F in andere Reihen verwandelt, welche nach Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Bogens geordnet sind; eine Umformung dieser Art aber haben wir noch unberücksichtigt gelassen, und zwar deshalb, weil die umgeformte Reihe nicht von der Form $\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$ ist. Denkt man sich nämlich in der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2)$ die Potenzen von $\cos v$ in Cosinus der Vielfachen von v verwandelt, so ist klar, dafs dieselbe in eine Reihe von folgender Form übergehen wird:

$$51. \quad F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2) = A_0 + 2A_1\cos 2v + 2A_2\cos 4v + 2A_3\cos 6v + \ldots.$$

Die Coefficienten A_0, A_1, A_2, etc. lassen sich nach einer bekannten Methode durch bestimmte Integrale ausdrücken, so dafs im Allgemeinen

$$52. \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2)\cos 2kv\,dv.$$

Es lassen sich ferner diese Coefficienten, welche im Allgemeinen höhere Transcendenten sind als die in der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ enthaltenen, alle auf zwei derselben reduciren. Wendet man nämlich auf die Entwickelung (51.) die Differenzialgleichung

$$53. \quad 0 = 4\alpha\beta\sin 2v.y + 2(2\gamma-\alpha-\beta-1-(\alpha+\beta)\cos 2v)\frac{dy}{dv} - \sin 2v\frac{d^2y}{dv^2}$$

an, welcher $y = F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2)$ genügt, so findet man, dafs unter je dreien auf einander folgenden Coefficienten dieser Entwickelung folgende Gleichung bestehen mufs:

$$54. \quad (k+\alpha-1)(k+\beta-1)A_{k-1} - 2k(2\gamma-\alpha-\beta-1)A_k - (k-\alpha+1)(k-\beta+1)A_{k+1} = 0.$$

Man sieht schon hieraus, dafs im Allgemeinen die Entwickelung (51.) nicht so einfach sein wird, als die §. 34. gefundenen; denn bei diesen waren die Coefficienten so beschaffen, dafs jeder folgende aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung einiger Factoren gebildet wurde. Es werden jedoch die Coefficienten der Entwickelung (51.) dieselbe Eigenschaft in dem speciellen Falle haben, wo $2\gamma-\alpha-\beta-1 = 0$ oder

$\gamma=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$, in welchem Falle die Gleichung (54.) übergeht in

55. $$(k+\alpha-1)(k+\beta-1)A_{k-1}=(k-\alpha+1)(k-\beta+1)A_{k+1}.$$

Aus dieser Gleichung zieht man

$$A_2=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}A_0,\qquad A_3=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}A_1,$$
$$A_4=\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha-4)(\beta-4)}A_2,\qquad A_5=\frac{(\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha-5)(\beta-5)}A_3,$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

so dafs die Entwickelung (51.) in folgende übergeht:

56. $$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\cos v^2\right)$$
$$=A_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 4v+\frac{2\alpha(\alpha+2)\beta(\beta+2)}{(\alpha-2)(\alpha-4)(\beta-2)(\beta-4)}\cos 8v+\dots\right)$$
$$+2A_1\left(\cos 2v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 6v+\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\beta-3)(\beta-5)}\cos 10v+\dots\right).$$

Auch in dieser Formel lassen sich die constanten Factoren A_0 und A_1, wie gezeigt werden soll, durch die Function Π ausdrücken. Hierzu ist jedoch nöthig, erst noch eine Umformung dieser Formel vorzunehmen. Setzt man in derselben $\frac{\pi}{2}-v$, so erhält man:

$$F(\sin v^2)=A_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 4v+\dots\right)$$
$$-2A_1\left(\cos 2v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 6v+\dots\right),$$

wo Kürze halber $F(\sin v^2)$ statt $F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\sin v^2\right)$ gesetzt ist. Addirt und subtrahirt man diese Gleichung und die vorige und setzt alsdann $\frac{v}{2}$ statt v, so erhält man:

57. $$\begin{cases}F\left(\cos\frac{v^2}{2}\right)+F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=2A_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 2v+\dots\right),\\ F\left(\cos\frac{v^2}{2}\right)-F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=4A_1\left(\cos v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3v+\dots\right).\end{cases}$$

Setzt man aber in den Formeln (75.) und (76.) §. 20. $x=\cos v^2$, so wird

$$F\left(\cos\frac{v}{2}\right)+F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=2c\,F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},\cos v^2\right),$$
$$F\left(\cos\frac{v}{2}\right)-F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=2d\cos v\,F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},\cos v^2\right),$$

$$\text{wo}\quad c=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}\quad\text{und}\quad d=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}.$$

Deshalb gehen nun die Formeln (57.) in folgende über:

$$58.\quad F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \cos v^2\right) = \frac{A_0}{c}\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 2v+\dots\right),$$

$$59.\quad \cos v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \cos v^2\right) = \frac{2A_1}{d}\left(\cos v^2+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3v+\dots\right).$$

Aus diesen ergiebt sich:

$$\frac{A_0}{c} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \cos v^2\right) dv,$$

$$\frac{A_1}{d} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^2 F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}\cos v^2\right) dv.$$

Entwickelt man die Functionen F unter den Integrationszeichen, und integrirt die Potenzen des Cosinus in den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$\frac{A_0}{c} = 1+\frac{\frac{\alpha}{2}.\frac{\beta}{2}.\frac{1}{2}}{1.\frac{1}{2}.1}+\frac{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2}+1\right).\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}+\dots,$$

$$\frac{2A_1}{d} = 1+\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+1}{2}\right).\frac{3}{2}}{1.\frac{3}{2}.2}+\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+3}{2}\right).\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.2.3}+\dots,$$

und weil in den einzelnen Gliedern dieser Reihen die gleichen Factoren des Zählers und Nenners $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... sich hinweghoben, so findet man

$$\frac{A_0}{c} = F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, 1, 1\right) \quad\text{und}\quad \frac{2A_1}{d} = F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, 2, 1\right),$$

und folglich durch die Function Π ausgedrückt:

$$60.\quad \frac{A_0}{c} = \frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)} \quad\text{und}\quad \frac{2A_1}{d} = \frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Pi\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Formeln (58.) und (59.), so hat man

$$61.\quad F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \cos v^2\right) =$$

$$\frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)}\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 2v+\frac{2\alpha(\alpha+2)\beta(\beta+2)}{(\alpha-2)(\alpha-4)(\beta-2)(\beta-4)}\cos 5v+\dots\right),$$

$$62.\quad \cos v.F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \cos v^2\right) =$$

$$\frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Pi\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}\left(\cos v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3v+\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\beta-3)(\beta-5)}\cos 5v+\dots\right).$$

Substituirt man in den Gleichungen bei (60.) die Werthe des c und d, so erhält man aus denselben

$$63.\quad \begin{cases} A_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)}, \\[2ex] A_1 = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Pi\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}. \end{cases}$$

Dies sind also die Werthe der constanten Factoren in der Formel (56.).

Es mögen nun auch von den Formeln dieses Paragraphs einige specielle Fälle erwähnt werden. Setzt man in den Formeln (61.) und (62.) $\alpha=n$, $\beta=-n$, $\frac{\pi}{2}-v$ statt v, und bemerkt, daſs

$$F\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1}{2},\sin v^2\right)=\cos nv,$$

$$\sin v\,F\left(\frac{1+n}{2},\frac{1-n}{2},\frac{3}{2},\sin v^2\right)=\frac{\sin nv}{n}$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$ (m. s. Gauſs Abh. pag. 5, XVI. und pag. 6, XX.), so erhält man

$$\cos nv = \frac{2n}{\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\cos 2v}{(n-2)(n+2)}+\frac{\sin 4v}{(n-4)(n+4)}-\dots\right),$$

$$\sin nv = \frac{-4n}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\left(\frac{\sin v}{(n-1)(n+1)}-\frac{\sin 3v}{(n-3)(n+3)}+\frac{\sin 5v}{(n-5)(n+5)}-\dots\right)$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$.

Wird in (56.) $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\beta=\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man eine neue Entwickelung des elliptischen Integrales:

$$66.\quad F^1(\cos v)=\frac{\pi}{2}A_0\left(1+2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cos 4v+2\left(\frac{1.5}{3.7}\right)^2\cos 8v+\dots\right)$$
$$+\pi A_1\left(\cos 2v+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos 6v+\left(\frac{3.7}{5.9}\right)^2\cos 10v+\dots\right),$$

in welcher, nach Gleichung (63.),

$$A_0=\frac{\pi}{(\Pi-\frac{1}{4})^4},\qquad A_1=\frac{\pi}{(\Pi-\frac{3}{4})^2(\Pi\frac{1}{4})^2},$$

oder, durch elliptische Integrale ausgedrückt, weil $F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}})=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}$:

$$A_0=\frac{4}{\pi^2}(F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2,\qquad A_1=\frac{1}{(F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2}.$$

Aus der Entwickelung (66.) erhält man folgende bestimmten Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F^1(\cos v).\cos 4kv\,dv = \left(\frac{1.5\dots(4k-3)}{3.7\dots(4k-1)}\right)^2 (F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F^1(\cos v).\cos(4k+2)v\,dv = \left(\frac{3.7\dots(4k-1)}{5.9\dots(4k+1)}\right)^2 \frac{\pi^2}{4(F^1(\sqrt{\frac{1}{2}}))^2},$$

welche für $k=0$ auch so dargestellt werden können:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-x^2y^2)}} = (F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(2x^2-1)\,dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-x^2y^2)}} = \frac{\pi^2}{4(F^1(\sqrt{\frac{1}{2}}))^2}.$$

Die Reihen-Entwickelungen, welche in diesem letzten Paragraphen enthalten sind, streifen eigentlich schon in ein fremdes Gebiet hinüber, indem sie nicht mehr der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, sondern der allgemeineren hypergeometrischen Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta.\lambda}{1.\beta.\nu}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)\nu(\nu+1)}x^2+\dots$$

angehören. Obgleich diese Reihe viele Eigenschaften mit der specielleren $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ gemein hat, so fehlt ihr doch gerade diejenige, auf welcher die Formeln des zweiten und dritten Abschnittes beruhen, nämlich, dafs sie sich in andere Reihen derselben Art verwandeln läfst. Nur für den Fall $x=1$ habe ich zahlreiche Verwandlungen dieser Reihe entdecken können, z. B.:

$$1+\frac{\alpha.\beta.\lambda}{1.\gamma.\nu}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)\nu(\nu+1)}+\dots$$

$$= C\left(1+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\lambda}{1.\gamma(\nu+\gamma-\alpha-\beta)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)(\nu+\gamma-\alpha-\beta)(\nu+\gamma-\alpha-\beta+1)}+\dots\right),$$

$$\text{wo}\quad C=\frac{\Pi(\nu-1)\,\Pi(\nu+\gamma-\lambda-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\nu-\lambda-1)\,\Pi(\nu+\gamma-\alpha-\beta-1)}.$$

Auch läfst sich die Summe dieser Reihe für $x=1$ im Allgemeinen nicht durch die Function Π ausdrücken, sondern nur in specielleren Fällen, von welchen einer folgender ist:

$$1+\frac{\alpha.\beta}{\gamma(\alpha+\beta-\gamma+2)}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)(\alpha+\beta-\gamma+3)}+\dots$$

$$=\frac{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\gamma-1)}{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}\left(\frac{\Pi(\gamma-2)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}-1\right).$$

Übrigens mufs die Methode, welche für die allgemeine Untersuchung dieser Reihe angewendet werden soll, von der in dieser Abhandlung enthaltenen wesentlich verschieden sein, weil die Natur dieser allgemeineren Reihe durch eine lineäre Differenzialgleichung der dritten Orodnung ausgedrückt wird, während die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ das Integral einer lineären Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ist.
