Sulle curve multiple di superficie algebriche

(*del Dr.* MAX NOETHER, *a Heidelberg.*)

Qui mi propongo di riunire alcune formole relative al sistema dei punti d'intersezione di tre superficie, che abbiano in comune una curva multipla, ed anche relative al numero delle condizioni che per una superficie sono assorbite da tali curve. Questi risultati sono qui presentati soltanto come estensioni o anche come esatte determinazioni di altri risultati già noti, dovuti principalmente al sig. CAYLEY (*); ma appunto per la precisione della loro forma, sembrano ora suscettivi di molteplici applicazioni a diversi rami della geometria. Alla fine di questi scritti, si troverà l'applicazione alle trasformazioni birazionali (*eindeutig*) nello spazio.

I. L'equivalenza di una curva multipla.

1. Nella *Geometry of three dimensions* di SALMON (**) si trova l'espressione del numero de'punti d'intersezione di tre superficie, assorbiti da una comune curva, che sia semplice per due superficie e doppia per la terza. Adoperando semplicemente, come già ha fatto il sig. CAYLEY (***), una ripetizione del processo ivi usato, si ottiene gradualmente l'espressione generale del numero di punti assorbiti da una curva, che sia multipla per ciascuna delle tre superficie. Questo numero si dirà l'*equivalenza* della curva.

(*) Vedi particolarmente le formole di *equivalence* e di *postulation* di CAYLEY nella sua Memoria *On the rational transformation between two spaces* (Proceedings of the London math. Society, vol. 3, 1870, p. 179).

(**) Pag. 280. Cfr. anche CREMONA, *Preliminari* n.° 97.

(***) *On reciprocal surfaces* (Phil. Transact. vol. 159, 1869, p. 221).

2. Sia m l'ordine della curva; r il rango della medesima, vale a dire l'ordine della sviluppabile formata dalle sue tangenti; e la curva abbia h punti doppi apparenti, k punti doppi effettivi; dove per ora intendo di escludere punti di più alta moltiplicità. Allora è

$$r = m(m-1) - 2h - 2k.$$

Le tre superficie F_1, F_2, F_3 siano rispettivamente d'ordine n_1, n_2, n_3, e per esse la curva C sia multipla secondo i_1, i_2, i_3. La curva sarà equivalente a

$$m[i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3] - 2 i_1 i_2 i_3 \left(m + \frac{r+2k}{2}\right)$$

punti d'intersezione delle tre superficie. Poi, la curva C incontra la curva residua d'intersezione delle due superficie F_1, F_2 in

$$m(i_2 n_1 + i_1 n_2) - 2 i_1 i_2 \left(m + \frac{r+2k}{2}\right)$$

punti.

3. Passo oltre a determinare il numero delle intersezioni assorbite da più curve multiple, che fra loro si seghino. A quest'uopo, cerco la riduzione che le equivalenze di due curve subiscono in conseguenza di un punto ad esse comune. Siccome questa riduzione non può dipendere che dalla configurazione delle due curve in prossimità del punto d'intersezione, così io la dedurrò dal caso semplicissimo che le due curve siano due rette segantisi G, G'.

La retta G sia multipla secondo i_1, i_2, i_3 per le tre superficie F_1, F_2, F_3; e i_1', i_2', i_3' siano i numeri analoghi per G'; e suppongasi $i_1 \geqq i_1'$, $i_2 \geqq i_2'$.

La curva residua d'intersezione delle due superficie F_1, F_2 ha allora con G

$$i_2 n_1 + i_1 n_2 - 2 i_1 i_2 - i_1' i_2'$$

e con G'

$$i_2' n_1 + i_1' n_2 - 2 i_1' i_2' - (i_1 i_2' + i_2 i_1' - i_1' i_2')$$

punti comuni e non passa più oltre pel punto GG'. Dall'intersezione di questa curva con F_3 segue pertanto che l'equivalenza del sistema delle due rette è

$$\begin{aligned}&(i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3) - 2 i_1 i_2 i_3 + \\ &+ (i_2' i_3' n_1 + i_3' i_1' n_2 + i_1' i_2' n_3) - 2 i_1' i_2' i_3' - \\ &- (i_2' i_3' i_1 + i_3' i_1' i_2 + i_1' i_2' i_3 - i_1' i_2' i_3').\end{aligned}$$

4. Le superficie F_1, F_2, F_3 abbiano ora in comune due curve C e C', la prima delle quali sia multipla secondo i numeri i_1, i_2, i_3, e l'altra secondo i numeri i_1', i_2', i_3'. Le equivalenze di queste due curve siano M, M'. Se C e C' si segano in s punti, l'equivalenza del loro sistema sarà

$$M+M'-s(i_2'i_3'i_1+i_3'i_1'i_2+i_1'i_2'i_3-i_1'i_2'i_3'),$$

dove si supponga che due dei numeri i_1, i_2, i_3 siano uguali o maggiori dei corrispondenti numeri i_1', i_2', i_3'.

E la curva residua d'intersezione di F_1, F_2 incontra C, ossia la curva (m, r, k), in

$$\left[m\,(i_2\,n_1+i_1\,n_2)-2i_1\,i_2\left(m+\frac{r+2k}{2}\right)\right]-i_1'i_2's \text{ (per } i_1\geqq i_1',\ i_2\gtreqless i_2'),$$

punti; incontra invece C', ossia la curva (m', r', k'), in

$$\left[m'(i_2'n_1+i_1'n_2)-2i_1'i_2'\left(m'+\frac{r'+2k'}{2}\right)\right]-(i_1i_2'+i_2i_1'-i_1'i_2')s$$

punti, se $i_1\geqq i_1'$, $i_2\geqq i_2'$, ed in

$$\left[m'(i_2'n_1+i_1'n_2)-2i_1'i_2'\left(m'+\frac{r'+2k'}{2}\right)\right]-i_1i_2s$$

punti, se $i_1\geqq i_1'$, $i_2\leqq i_2'$.

Qui osservo che la riduzione ora ottenuta dell'equivalenza $M+M'$ sussiste anche pei punti doppi effettivi di una curva, perchè il termine della formola al n.° 2, che contiene il fattore k, si può riguardare come esprimente la riduzione dovuta a tali punti; il che accadrà anche in seguito.

5. Trattisi ora il seguente caso generale.

Le superficie F_1, F_2, F_3 abbiano il punto comune P, multiplo rispettivamente secondo i numeri l_1, l_2, l_3, e le curve comuni C, C',..., delle quali la prima sia contenuta i_1, i_2, i_3 volte e passi con j rami per P, la seconda sia contenuta i_1', i_2', i_3' volte ed abbia j' rami passanti per P, ecc. Suppongasi poi che i coni osculatori alle superficie F in P non si decompongano, in virtù delle singolarità ammesse, in parti che siano comuni ai coni medesimi: il che involge un limite inferiore per le l_1, l_2, l_3.

La deduzione dell'equivalenza di un siffatto sistema può attuarsi ancora col metodo indicato nel n.° 3. A ciascun ramo delle curve C, C',... si sostituiscano rette dotate della corrispondente moltiplicità e uscenti da P; e si determini direttamente la riduzione dell'equivalenza di questo nuovo sistema. Io darò a dirittura il risultato della deduzione.

Il rango r di C è nel caso attuale

$$r=m(m-1)-2h-2k-j(j-1)$$

e come equivalenza M di C s'intenda la quantità

$$M=m(i_2i_3n_1+i_3i_1n_2+i_1i_2n_3)-2i_1i_2i_3\left(m+\frac{r}{2}\right).$$

Analogo significato abbia M' per C', ecc. L'equivalenza

$$l_1l_2l_3+M+M'+\cdots$$

del sistema $(P, C, C',\ldots)$ subisce la riduzione

$$-\sum_{\rho}\{i_2^{(\rho)}i_3^{(\rho)}l_1+i_3^{(\rho)}i_1^{(\rho)}l_2+i_1^{(\rho)}i_2^{(\rho)}l_3-2i_1^{(\rho)}i_2^{(\rho)}i_3^{(\rho)}\}j^{(\rho)}$$

dove la somma s'intende estesa alle diverse curve passanti per P.

La curva residua d'intersezione delle superficie F_1, F_2 incontra la curva C in

$$\left[m(i_2n_1+i_1n_2)-2i_1i_2\left(m+\frac{r+2k}{2}\right)\right]-(i_2l_1+i_1l_2-2i_1i_2)j$$

punti, oltre a P, e passa con

$$l_1l_2-\sum_{\rho}i_1^{(\rho)}i_2^{(\rho)}j^{(\rho)}$$

rami pel punto P.

6. Se l'ipotesi fatta nel n.° 5 non è soddisfatta, come p. es. nel caso del n.° 4, tuttavia si raggiunge ancora lo scopo mediante considerazioni analoghe a quelle fatte nel n.° 3. Siccome la grande moltiplicità de' casi particolari non permette di giungere ad una formola generale, così io mi limito a riferire il seguente esempio.

Le tre superficie F siano d'ordine n e posseggano tre rette multiple secondo i e uscenti da un punto P. Il punto P deve allora essere multiplo per le F secondo $\frac{3i}{2}$ o secondo $\frac{3i+1}{2}$, secondochè i è pari o dispari. Se n è abbastanza grande, onde le F non abbiano a decomporsi, l'equivalenza del sistema sarà per i pari

$$(9ni^2-6i^3)-\tfrac{9}{2}i^3,$$

per i dispari

$$(9ni^2-6i^3)-(\tfrac{9}{2}i^3-\tfrac{1}{2}),$$

e la curva residua d'intersezione di due F nel solo secondo caso passa cón un ramo per P.

II. La postulazione di una curva multipla.

7. Denomino (insieme col sig. CAYLEY) **postulazione** di una curva C, rispetto ad una superficie F_n d'ordine n, il numero delle condizioni lineari che F_n dee soddisfare, affinchè per essa la curva C sia multipla secondo un numero i.

La postulazione di una curva che sia l'**intersezione completa di due superficie** si può determinare direttamente. Per una siffatta curva C, intersezione completa di due superficie P, Q rispettivamente d'ordine p, q, che si tocchino in k punti, l'ordine m e il rango r sono dati dalle formole

$$m = pq, \quad r + 2k = pq(p+q-2).$$

L'equazione di una superficie F_n, che debba contenere C come curva i-pla è della forma

$$0 = F_n \equiv A_0 P^i + A_1 P^{i-1} Q + \cdots + A_i Q^i;$$

infatti, siccome F_n passa per la completa intersezione di P^i e Q, così F_n deve avere la forma (*)

$$F_n \equiv A_0 P^i + Q \cdot F_{n-q},$$

dove la superficie F_{n-q} contenga C come curva $(i-1)$-pla; perciò F_{n-q} avrà la forma

$$F_{n-q} \equiv A_1 P^{i-1} + Q \cdot F_{n-2q},$$

e così di seguito.

S'indichi con

$$(N - \rho Q)_{i-\varrho}$$

il numero delle costanti assorbite nella superficie $F_{n-\varrho q}$ dalla condizione che essa contenga C come curva $(i-\rho)$-pla; e inoltre si scriva per brevità

$$\tfrac{1}{6}(s+1)(s+2)(s+3) = [s].$$

Dalla formola

$$F_n \equiv A_0 P^i + F_{n-q} Q,$$

mediante un processo di numerazione già adoperato da JACOBI (**), si ottiene

$$\begin{aligned} N_i &= [n] \{ - [n-ip] + [n-q] - (N-Q)_{i-1} - [n-ip-q] \} \\ &= ipqn - \tfrac{1}{2} ipq(ip+q-4) + (N-Q)_{i-1} \end{aligned}$$

(*) Vedi p. es. Math. Annalen, t. 2, p. 314.

(**) G. Crelle, t 15, p. 285.

per $n \geqq ip+q-3$; e invece

$$N_i = ipqn - \tfrac{1}{2}ipq(ip+q-4) - [n-ip-q] + (N-Q)_{i-1}$$

per $n < ip+q-3$. Poste così le analoghe espressioni di

$$(N-Q)_{i-1}, \quad (N-2Q)_{i-2}, \ldots$$

e avuto riguardo alla

$$(N-iQ)_0 = 0,$$

si ottiene il risultato seguente.

Sia $p \geqq q$. Nel caso di $n \geqq ip+q-3$, il postulante di C ha il valore

$$N_i = \tfrac{1}{2}\frac{i(i+1)}{2\cdot 3}pq\{6n-(2i+1)(p+q)+12\}.$$

Ma, se

$$(i-\rho+1)p+\rho q-3 > n \leqq (i-\rho)p+(\rho+1)q-3,$$

per ottenere la postulazione di C, bisogna all'espressione precedente di N_i aggiungere ancora la quantità positiva

$$-[n-ip-q]-[n-(i-1)p-2q]-\cdots-[n-(i-\rho+1)p-\rho q],$$

e la medesima quantità, per $\rho = i$, è da aggiungere quando in generale

$$n < p+iq-3.$$

L'espressione di N_i si può anche porre sotto la forma

$$N_i = \frac{i(i+1)}{2\cdot 3}\{3n-2i+5\}m - \tfrac{1}{2}\frac{i(i+1)(2i+1)}{2\cdot 3}(r+2k).$$

8. La ricerca della postulazione di una qualsivoglia curva C si ridurrà al caso di un'intersezione completa, completando C in modo da ottenere appunto l'intersezione completa di due superficie.

Se una curva K, d'ordine M e di rango R, si spezza in due curve C, C' che abbiano rispettivamente gli ordini m, m', e i ranghi r, r', dalla condizione che per tale spezzamento non si altera il numero dei punti doppi apparenti, si ottiene il numero s delle intersezioni delle due curve

$$s = \tfrac{1}{2}(R-r-r'),$$

ed inoltre è $M = m+m'$. La curva spezzantesi in C, C' ha la stessa postulazione come K.

Sia ora K la completa intersezione di due superficie d'ordine p, q. Se C e C' hanno inoltre k, k' punti doppi effettivi, la postulazione di K sarà (n.° 6):

$$\begin{aligned} N'_i &= \tfrac{1}{6} i(i+1)(3n-2i+5)M - \tfrac{1}{12} i(i+1)(2i+1)(R+2k+2k') \\ &= \tfrac{1}{6} i(i+1)(3n-2i+5)m - \tfrac{1}{12} i(i+1)(2i+1)(r+2k) \\ &+ \tfrac{1}{6} i(i+1)(3n-2i+5)m' - \tfrac{1}{12} i(i+1)(2i+1)(r'+2k') \\ &- \tfrac{1}{6} i(i+1)(2i+1)s. \end{aligned}$$

In questa formola i soli primi due termini dipendono dai numeri m ed $r+2k$ della curva C; mentre gli altri termini, secondo la scelta di p e q, possono ancora assumere una serie di valori differenti. Purchè adunque n sia convenientemente grande, — cioè, in primo luogo, così grande che, giusta il n.° 6, la formola per N_i' possa sussistere, e poi così grande ancora, che l'ultimo termine di questa formola rappresenti effettivamente la riduzione della postulazione dovuta alle s intersezioni di C e C', vale a dire che queste s intersezioni possano introdursi qui come indipendenti fra loro, — la quantità

$$N_i = \tfrac{1}{6} i(i+1)(3n-2i+5)m - \tfrac{1}{12} i(i+1)(2i+1)(r+2k)$$

esprimerà la postulazione per una qualsivoglia C. Pare che non si possano assegnare in generale le modificazioni per valori più piccoli di n.

9. Trattasi ora di nuovo di determinare la riduzione cui va soggetto la postulazione di un sistema di curve in virtù di punti multipli di questo sistema medesimo. A tale uopo procederò ancora in modo analogo al n.° 3.

Sostituisco cioè ai rami del sistema di curve che escono da un punto multiplo di una superficie F_n altrettante rette dotate delle corrispondenti moltiplicità. In questo caso la determinazione della riduzione, che è identica con quella del dato sistema di curve, conduce ad un problema piano.

L'equazione della superficie F_n sia

$$0 = F_n \equiv x_4^{n-l} f_l + x_4^{n-l-1} f_{l+1} + \cdots + f_n,$$

dove f_ρ è una funzione omogenea d'ordine ρ delle coordinate $x_1 x_2 x_3$. Se questa superficie dee possedere più rette multiple G_1, G_2,... uscenti dal punto l-plo P $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$, la medesima proprietà dee competere a tutti i coni

$$f_l = 0, \quad f_{l+1} = 0, \ldots, \quad f_n = 0,$$

vale a dire, le curve piane

$$f_l = 0, \quad f_{l+1} = 0, \ldots, \quad f_n = 0$$

debbono avere punti rispettivamente dotati delle stesse moltiplicità nelle intersezioni delle rette G_1, $G_2, \ldots$, col piano $x_4 = 0$.

Per tal modo, si ha a determinare il numero delle condizioni che sono assorbite da più punti multipli di una curva piana d'ordine ρ: numero il quale, se ρ non oltrepassa un certo limite, dipende da ρ medesimo. La somma di questi numeri, determinati per $f_l, \ldots, f_n$, più $\frac{1}{6}l(l+1)(l+2)$, è la postulazione del sistema di rette e del punto P, rispetto alla superficie F_n.

10. La postulazione

$$\frac{1}{2}\sum_\sigma i_\sigma(i_\sigma + 1)$$

di un sistema di punti i-pli, che abbiano una giacitura generale, rispetto ad una curva piana f_ϱ d'ordine ρ, patisce una riduzione tostochè f_ϱ, in virtù dei punti multipli, debba decomporsi in parti, alcune delle quali siano da contarsi più volte. A cagion della supposta generale giacitura di questi punti, f_ϱ non può che decomporsi in curve razionali. Per ogni curva razionale che entri come parte α-pla della curva f_ϱ, la riduzione della postulazione ammonta a

$$-\frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1).$$

Questo fatto si può riconoscere geometricamente. Infatti, si consideri un fascio di curve razionali; siccome i punti-base, a motivo della razionalità, non formano alcun speciale sistema di punti d'intersezione, così questi punti somministrano l'espressione generale per la postulazione rispetto ad un sistema di α curve del fascio. Se ci dev'essere inoltre un punto α-plo, cioè se le α curve del fascio debbono coincidere in una determinata, ciò richiede α condizioni soltanto, e la riduzione del numero delle condizioni ammonta a (*)

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - \alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1).$$

(*) Un'interessante conferma di questo teorema è offerta dal teorema delle trasformazioni piane del sig. CREMONA (Memorie dell'Accad. di Bologna, serie 2ª, t. 5; 1865). Le curve delle reti nei piani X, Y siano d'ordine n, le prime con α_i, le ultime con β_i punti i-pli fissi ($i = 1, 2, \ldots n-1$). Allora dalle note equazioni della trasformazione si ricava la

$$\frac{1}{2}(n^2 - 1)(n^2 + 2) = \sum_i \frac{1}{2} ni(ni + 1)\alpha_i - \sum_i \frac{1}{2} i(i-1)\beta_i.$$

Il primo membro di questa equazione è il numero delle costanti nell'equazione di una curva d'ordine $n^2 - 1$. Tale è quella che nel piano X corrisponde al sistema dei β_i punti di Y; per essa gli α punti fondamentali devono essere punti ni-pli, con che è completamente determinata. E siccome questa curva contiene come parte integrante i-pla la curva razionale corrispondente ad un punto fondamentale i-plo, così l'equazione precedente è in accordo col teorema suesposto.

Come applicazione, darò la postulazione P di tre punti multipli secondo i_1, i_2, i_3, rispetto ad una curva f_ϱ, che possa contenere come parte integrante una retta multipla. Sia $i_1 \geqq i_2 \geqq i_3$. Secondo la grandezza di ρ, sono a distinguersi cinque casi:

α) se $\rho \geqq i_1 + i_2 + 1$, si ha ($\sigma = 1, 2, 3$)

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1);$$

β) se $i_1 + i_2 - 1 > \rho \geq i_1 + i_3 - 1$, si ha

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 - \rho)(i_1 + i_2 - \rho - 1);$$

γ) se $i_1 + i_3 - 1 > \rho \geqq i_2 + i_3 - 1$, si ha

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 - \rho)(i_1 + i_2 - \rho - 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_3 - \rho)(i_1 + i_3 - \rho - 1),$$

δ) se $i_2 + i_3 - 1 > \rho \geqq \frac{1}{2}(i_2 + i_2 + i_3)$, si ha

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 - \rho)(i_1 + i_2 - \rho - 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_3 - \rho)(i_1 + i_3 - \rho - 1) -$$
$$- \tfrac{1}{2}(i_2 + i_3 - \rho)(i_2 + i_3 - \rho - 1),$$

e rimangono in questo caso, ancora

$$\tfrac{1}{2}(2\rho - i_1 - i_2 - i_3 + 1)(2\rho - i_1 - i_2 - i_3 + 2)$$

costanti nell'equazione omogenea della curva;

ε) se $\rho < \frac{1}{2}(i_1 + i_2 + i_3)$, si ha $P = \frac{1}{2}(\rho + 1)(\rho + 2)$,

perchè in questo caso non è più possibile alcuna curva f_ϱ.

11. Ora si dedurrà dai n.[i] 9 e 10 la riduzione della postulazione di un sistema di curve, rispetto ad una superficie F_n, per i casi ordinari. Dapprima F_n possegga una curva i_1-pla, ed un'altra i_2-pla ($i_1 \geqq i_2$), che si incontrino in un punto P; allora P è un punto i_1-plo della superficie. Sostituendo ai due rami delle curve in P due rette, la postulazione del nuovo sistema sarà

$$\tfrac{1}{6} i_1 (i_1 + 1)(i_1 + 2) + (n - i_1 + 1)\{\tfrac{1}{2} i_1 (i_1 + 1) + \tfrac{1}{2} i_2 (i_2 + 1)\} -$$
$$- \{\tfrac{1}{2} i_2 (i_2 - 1) + \tfrac{1}{2}(i_2 - 1)(i_2 - 2) + \cdots + 3 + 1\}$$
$$= \tfrac{1}{6} i_1 (i_1 + 1)(3n - 2i_1 + 5) + \tfrac{1}{6} i_2 (i_2 + 1)(3n - 2i_2 + 5) - \tfrac{1}{6} i_2 (i_2 + 1)(3i_1 - i_2 + 1),$$

supposto $n \geqq i_1 + i_2 - 2$; donde segue che il termine di riduzione della postulazione di due curve multiple secondo i_1, i_2 ($i_1 \geqq i_2$), per ciascun punto d'intersezione delle medesime (ed anche, se $i_1 = i_2$, per un punto d'incrociamento di due rami d'una medesima curva, poichè il termine proveniente da un effettivo punto doppio può considerarsi come termine di riduzione dovuta ad esso punto) sarà

$$-\tfrac{1}{6}i_2(i_2+1)(3i_1-i_2+1).$$

Invece, se $n<i_1+i_2-2$, la postulazione deve ancora essere diminuita di

$$\tfrac{1}{6}(i_1+i_2-n)(i_1+i_2-n-1)(i_1+i_2-n-2),$$

perchè gli i_1+i_2-n-2 ultimi termini della prima formola del presente n.° in tal caso scompajono.

12. Se inoltre la superficie F_n contiene un punto l-plo P, e delle curve i-ple C (ordine m, rango r), che passino con j_i rami per P, supposto che l sia di tal grandezza che il cono osculatore in P ad F_n non abbia parti integranti ripetute più volte, la postulazione del sistema PC sarà pel n.° 9

$$\tfrac{1}{6}l(l+1)(l+2)+\sum_i\tfrac{1}{6}i(i+1)\{(3n-2i+5)m_i-\tfrac{1}{2}(2i+1)r_i\}-$$
$$-\sum_i\tfrac{1}{6}i(i+1)(3r-2i+2)j_i.$$

13. Per trattare ancora un esempio distinto di un caso nel quale il cono osculatore in P contenga parti coincidenti, suppongo che la superficie F_n possegga tre rette concorrenti in P, che siano rispettivamente multiple secondo i_1, i_2, i_3; e l'ordine della moltiplicità del punto P sia quello che è determinato mediante queste tre linee multiple. Allora sono da distinguersi due casi:

α) $i_1\geqq i_2+i_3$. Il punto P è i_1-plo per F_n, ed il numero delle condizioni per questa superficie sarà:

$$\tfrac{1}{6}i_1(i_1+1)(i_1+2)+(n-i_1+1)\sum_\sigma\tfrac{1}{2}i_\sigma(i_\sigma+1)-$$
$$-\{\tfrac{1}{2}i_2(i_2-1)+\tfrac{1}{2}(i_2-1)(i_2-2)+\cdots+1\}-\{\tfrac{1}{2}i_3(i_3-1)+\tfrac{1}{2}(i_3-1)(i_3-2)+\cdots+1\}=$$
$$(*)=[i_1-1]+(n-i_1+1)\sum_\sigma\tfrac{1}{2}i_\sigma(i_\sigma+1)-[i_2-2]-[i_3-2]=$$
$$=\sum_\sigma\tfrac{1}{6}i_\sigma(i_\sigma+1)(3n-2i_\sigma+5)-\tfrac{1}{6}i_2(i_2+1)(3i_1-i_2+1)-$$
$$-\tfrac{1}{6}i_3(i_3+1)(3i_1-i_3+1),$$

precisamente come dal n.° 11.

β) $i_1<i_2+i_3$. Qui P dev'essere un punto l-plo, dove

$$l=\tfrac{1}{2}(i_1+i_2+i_3),\text{ ovvero }=\tfrac{1}{2}(i_1+i_2+i_3+1),$$

(*) Qui si fa uso della notazione del n.° 7, cioè $[s]=\frac{1}{6}(s+1)(s+2)(s+3)$.

secondo che $i_1+i_2+i_3$ è pari o dispari. Siccome ora $i_2+i_3 \geqq l > i_1$, così, giovandoci dell'esempio dato nel n.° 10, avremo pel numero delle condizioni

$$\tfrac{1}{6}l(l+1)(l+2)+(n-l+1)\sum_\sigma \tfrac{1}{2}i_\sigma(i_\sigma+1)-$$

$$-[i_2+i_3-l-2]-[i_3+i_1-l-2]-[i_1+i_2-l-2]=$$

$$=\sum_\sigma \tfrac{1}{6}i_\sigma(i_\sigma+1)(3n-2i_\sigma+5)-\sum_\sigma \tfrac{1}{6}i_\sigma(i_\sigma+1)(3l-2i_\sigma+2)+[l-1]-$$

$$-[i_2+i_3-l-2]-[i_3+i_1-l-2]-[i_1+i_2-l-2].$$

Se fosse $n<i_1+i_2-2$, queste formole per la postulazione subirebbero ancora una correzione positiva, che si può calcolare facilmente, in modo analogo alla chiusa del n.° 11.

Finalmente osservo ancora che il caso in cui la superficie F_n si decomponesse in più parti coincidenti dà luogo a nuove modificazioni nel valore della postulazione, le quali richiederebbero una speciale investigazione.

III. Il genere di una superficie.

14. Gli sviluppi del capitolo II ammettono una diretta applicazione alla ricerca del genere p di una superficie F_n: numero che rimane invariabile nelle trasformazioni univoche (*eindeutige Transformationen*). Infatti, il genere p di una superficie F_n d'ordine n, secondo una definizione data da me nei Mathematische Annalen (t. 2, p. 315), è uguale al numero delle superficie F_{n-4} d'ordine $n-4$, linearmente fra loro indipendenti che si possono far passare $i-1$ volte per ciascuna curva i-pla C_i di F_n, ed $l-2$ volte per ogni punto l-plo P_l della stessa F_n; ossia

$$p=\tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)-R,$$

dove R è la postulazione del sistema composto delle curve $(i-1)$ple C_i e dei punti $(l-2)$pli P_l, rispetto ad una superficie F_{n-4}. Qui il valore R è da prendersi nello stesso senso come nel cap. II, cioè con riguardo alle modificazioni ch'esso subisce nel caso in cui $n-4$ non supera un certo limite.

15. È importante che la formola data superiormente per p può già servire come definizione del genere, cioè di un numero caratteristico, che debba mantenersi invariato nelle trasformazioni univoche, se si calcola la postulazione R senza riguardo alla grandezza di $n-4$, cioè, se per R si adoperano assolutamente le formole generali, che, secondo il cap. II, valgono

per n abbastanza grande. Quest'osservazione è stata fatta dal sig. CAYLEY (*); e il sig. ZEUTHEN, in un bel lavoro sulla trasformazione delle superficie (**) ha, sotto ipotesi assai generali e per via puramente geometrica, dimostrata l'invariabilità, nelle trasformazioni univoche, del numero così definito. Per $p > 0$ le due definizioni conducono allo stesso numero; ma, mentre verbigrazia pei coni la definizione del n.° 14 dà sempre $p = 0$, invece la seconda definizione somministra un numero che è uguale al genere, preso negativamente, di una sezione piana del cono. In seguito io mi servirò dell'ultima definizione, che è più espressiva.

IV. Applicazione alle trasformazioni univoche (birazionali) nello spazio.

16. Come complemento alle ricerche recentemente fatte dai sig.ⁱ CAYLEY e CREMONA e da me sulle trasformazioni birazionali nello spazio (***) esporrò qui un sistema di formole, alle quali devono soddisfare i numeri relativi alle superficie trasformanti, e le quali si deducono dalle considerazioni svolte nei capitoli I, II, III.

Affinchè un sistema di superficie ϕ d'ordine n, le quali debbano corrispondere univocamente (*eindeutig*) ai piani dello spazio X, possano formare un sistema trasformante nello spazio Y (un sistema omaloidico, secondo l'espressione del sig. CREMONA), debbono esse ϕ soddisfare a più condizioni:

a) le ϕ devono possedere tanti elementi comuni (curve e punti fondamentali) quanti occorrono perchè esse formino una serie triplamente infinita;

b) tre superficie qualsivogliano della serie devono in generale segarsi in un solo punto variabile;

c) le ϕ sono di genere $p = 0$, conformemente alla definizione del n.° 15.

Le formole per le prime due condizioni sono già state date (l. c.) dal sig. CAYLEY, sebbene in una forma un po' meno generale di quella che qui si verrà proponendo. Le formole risultanti dalle tre condizioni costituiscono un sistema chiuso, che è l'analogo di quello che il sig. CREMONA ha stabilito per le trasformazioni piane.

(*) Math. Annalen, t. 3, pag. 526.

(**) Math. Annalen, t. 4, pag. 42 [III].

(***) Veggasi la già citata Memoria di CAYLEY, e inoltre i lavori pubblicati contemporaneamente da CREMONA e da me, il primo nelle Götting. Nachrichten 1871, n.° 5, il mio nei Math. Annalen t. 3; come pure le ricerche ancor più generali di CREMONA nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 4 maggio e 1 giugno 1871, e nel presente fascicolo degli Annali di Matematica.

In ciò che segue, io non tratterò che un caso generale. Le modificazioni delle formole nei casi speciali si dovranno dedurre per la via indicata superiormente.

17. Le superficie φ d'ordine n abbiano in comune le curve fondamentali i-ple C_i d'ordine m_i e di rango r_i; una curva C_i abbia k_{ii} punti doppi effettivi, e incontri in altri k_{ij} punti una curva C_j $(i \gtreqless j)$. Oltracciò, le φ abbiano ancora i punti fondamentali l-pli P_l, pei quali una curva C_i passi con j_{il} rami. Qui però io suppongo che il cono osculatore in un così fatto punto P_l non sia fisso, nè tutto nè in parte, per tutte le φ. Da ultimo le φ abbiano ancora dei punti di contatto dell'ordine $\sigma - 1$.

La condizione b) nel n.° 16 dà, giusta il cap. I, la seguente equazione d'equivalenza:

$$(1)\left\{\begin{aligned} n^3 - 1 = &\sum_i i^2 \{(3n-2i)m_i - i r_i\} - \sum_{ij} i^2 (3j - i) k_{ij} + \\ &+ \sum_l l^3 - \sum_{il} i^2 (3l - 2i) j_{il} + \sum_\sigma \sigma^2. \end{aligned}\right. \qquad \text{per} \left\{\begin{aligned} &i \gtreqless j \\ &i \gtreqless l. \end{aligned}\right.$$

La prima somma doppia $\sum_{ij}$ dev'essere estesa a tutt'i punti d'intersezione delle curve fondamentali prese a due a due, eccettuati quelli che cadono nei P_l, e a tutt'i punti doppi effettivi di ciascuna curva C_i. La seconda somma doppia $\sum_{il}$ dev'essere estesa dapprima a tutt'i rami delle curve C_i passanti per un punto P_l, indi a tutt'i diversi punti P_l.

In grazie del cap. II, la condizione a) dà la seguente equazione di postulazione:

$$(2)\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4 = &\sum_i \tfrac{1}{6} i(i+1)\{(3n-2i+5)m_i - \tfrac{1}{2}(2i+1)r_i\} - \\ &- \sum_{ij} \tfrac{1}{6} i(i+1)(3j-i+1)k_{ij} + \sum_l \tfrac{1}{6} l(l+1)(l+2) - \\ &- \sum_{il} \tfrac{1}{6} i(i+1)(3l-2i+2)j_{il} + \sum_\sigma \tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+1); \end{aligned}\right.$$

e finalmente, pel cap. III, n.° 15, la condizione c) dà l'equazione del genere:

$$(3)\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = &\sum_i \tfrac{1}{6} i(i-1)\{(3n-2i-5)m_i - \tfrac{1}{2}(2i-1)r_i\} - \\ &- \sum_{ij} \tfrac{1}{6} i(i-1)(3j-i-1)k_{ij} + \sum_l \tfrac{1}{6} l(l-1)(l-2) - \\ &- \sum_{il} \tfrac{1}{6} i(i-1)(3l-2i-2)j_{il}. \end{aligned}\right.$$

Da queste tre equazioni, con facile combinazione, si ricavano le seguenti:

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{6}(4n-3)(4n-2)(4n-1)-1=\sum_i\tfrac{1}{6}4i(4i-1)\{(12n-8i-5)m_i-\tfrac{1}{2}(8i-1)r_i\}-\\&\qquad-\sum_{ij}\tfrac{1}{6}4i(4i-1)(12j-4i-1)k_{ij}+\sum_l\tfrac{1}{6}(4l-2)(4l-1)4l-\\&\qquad-\sum_{il}4i(4i-1)(12l-8i-2)j_{il}+\sum_\sigma\sigma(7\sigma-3),\end{aligned}\right.$$

$$(5)\left\{\begin{aligned}&2(n^2-1)=\sum_i i\{(n+i)m_i-\tfrac{1}{2}ir_i\}-\sum_{ij}ijk_{ij}+\\&\qquad+\sum_l l^2-\sum_{il}ilj_{il}+\sum_\sigma\tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+1),\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad 11(n-1)=\sum_i i(5m_i-\tfrac{1}{2}r_i)-\sum_{ij}ik_{ij}+\sum_l 2l-\sum_{il}2ij_{il}+\sum_\sigma\tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+3).$$

Affine di completare questo sistema di formole per le trasformazioni razionali nello spazio, si designino le analoghe quantità relative allo spazio X, colle stesse notazioni, come per lo spazio Y, ma coll'aggiunta di un accento. Allora per gli ordini n, n' delle superficie trasformanti φ, ψ degli spazi Y, X risp., si ha:

$$n'=n^2-\sum_i i^2m_i,\quad n=n'^2-\sum_i i^2m'_i,$$

e a cagione dell'uguaglianza del genere delle sezioni piane delle superficie trasformanti nei due spazi,

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\sum_i\tfrac{1}{2}i(i-1)m_i=\tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2)-\sum_i\tfrac{1}{2}i(i-1)m'_i,$$

donde

$$4(n'-n)=\sum_i im'_i-\sum_i im_i.$$

18. Le due equazioni (4) e (5) si possono interpretare geometricamente. La (4) dice che la Jacobiana delle φ, superficie d'ordine $4n-4$, dotata di un punto $(4l-2)$plo P_l e di una curva $(4i-1)$pla C_i, è completamente determinata da queste condizioni; essa (4) è adunque l'equazione di postulazione per la Jacobiana delle φ. E merita d'essere notato che, in questo caso, le espressioni date nel cap. II pel postulante possono essere adoperate senza modificazioni, sebbene la Jacobiana in generale contenga delle parti multiple (coincidenti), quali sono le superficie che corrispondono ai punti fondamentali di X.

Invece della (5), considero l'equazione che col mezzo della

$$n'=n^2-\sum i^2m,$$

se ne ricava, cioè

$$(5)' \left\{ \begin{aligned} 4n' - 4 = \sum_i 2i\{(n-i)m_i - \tfrac{1}{2} i r_i\} - \sum_{ij} 2ij k_{ij} + \\ + \sum_l 2l^2 - \sum_{il} 2il j_{il} + \sum_\sigma \sigma(\sigma+1). \end{aligned} \right.$$

Le curve razionali S, intersezioni variabili delle superficie ϕ prese a due a due, sono d'ordine n'. Il secondo membro della (5)' esprime il numero $4n'-4$ delle condizioni alle quali debbono soggiacere queste curve S, mentre esse hanno in comune colla C_i il numero di punti dato nei n.[i] 4 e 5, e passano per P_l col numero di rami ivi del pari assegnato. Infatti, una curva S incontra una curva C_i in

$$Q_i = 2i\{(n-i)m_i - \tfrac{1}{2} i r_i\} - \sum_h h^2 k_{hi} - \sum_j (2ij - i^2) k_{ij} - \sum_l (2il - 2i^2) j_{il}$$
$$(h < i, \quad j \geqq i)$$

punti (dove, per un punto doppio effettivo di C_i la somma $\sum_j$ deve estendersi ad entrambi i rami del nodo); passa inoltre con

$$R_l = l^2 - \sum_i i^2 j_{il}$$

rami per P_l, ed ha in un punto di contatto d'ordine $\sigma - 1$, delle ϕ, un punto σ-plo assorbente $\sigma(\sigma+1)$ condizioni.

Inoltre $4n' - 4$ è anche l'ordine della Jacobiana delle superficie trasformanti ψ dello spazio X; la formola (5)' dà dunque l'ordine Q_i della superficie che in X corrisponde ad una curva C_i, e l'ordine R_l della superficie corrispondente ad un punto P_l: la quale ultima è contenuta due volte nella Jacobiana delle ψ. Dall'ultimo termine della formola (5)' si conclude ancora che la superficie d'ordine σ corrispondente ad un punto di contatto, d'ordine $\sigma - 1$, delle ϕ è contenuta $\sigma + 1$ volte nella Jacobiana anzidetta (*).

Heidelberg, settembre 1871.

(*) Questa conclusione in modo analogo è già stata ottenuta dal sig. Cremona nella 2ª delle già citate Note dei Rend. Ist. Lomb.