

Sopra una classe di forme binarie.

(Nota del prof. F. BRIOSCHI, a Milano.)

1.° **L**a forma binaria del quarto ordine per la quale l'invariante quadratico è nullo, si incontra in varie quistioni d'analisi e di geometria, come, per esempio, nella trasformazione di terzo ordine delle funzioni ellittiche e nella ricerca dei punti di flesso di una cubica. Indicando con $f(x_1, x_2)$ la forma binaria, la condizione dell'annullarsi del suo invariante quadratico è la:

$$\frac{1}{2}(ff)^4 = 0$$

ed è perciò spontanea la ricerca, supponendo essere f di un ordine n qualsivoglia, di studiare le proprietà della forma f per le quali questo suo covariante d'ordine $m = 2(n - 4)$ è identicamente eguale a zero.

Questo studio era tanto più opportuno in quanto che due altre forme speciali, una del sesto, l'altra del dodicesimo ordine, aventi la proprietà indicata, eransi in seguito presentate nelle belle ricerche del prof. SCHWARZ sulla serie ipergeometrica di GAUSS (*), come ha mostrato il sig. KLEIN nel suo importante lavoro « *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* » (**).

Il problema enunciato più sopra fu considerato recentemente dal D.^r WEDEKIND nei suoi « *Studien im binären Werthgebiet* » (***); ed in essi giunge a dimostrare che le forme f di ordine n per le quali $\frac{1}{2}(ff)^4 = 0$ si distinguono in due specie, e che per una di esse deve sussistere l'equazione:

$$nk - 6n + 12 = 0$$

essendo k un numero intero. Vale a dire le forme degli ordini 4°, 6°, 12°, vanno distinte dalle altre.

(*) *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt.* Von H. A. SCHWARZ. Journal für die Mathematik, Bd. 75.

(**) Mathematische Annalen, Bd. 9.

(***) Habilitationsschrift. Carlsruhe, 1876.

2.° Sieno:

$$f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)(x_1, x_2)^n$$

$$\frac{1}{2}(ff)^4 = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)(x_1, x_2)^m$$

si hanno facilmente le:

$$\alpha_0 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad m_1 \alpha_1 = (n-4)(a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3)$$

$$m_2 \alpha_2 = \frac{(n-4)(n-5)}{2}(a_0 a_6 - 4 a_1 a_5 + 7 a_2 a_4 - 4 a_3^2) + (n-4)^2(a_1 a_5 - 4 a_2 a_4 + 3 a_3^2)$$

.....

$$\alpha_m = a_n a_{n-4} - 4 a_{n-1} a_{n-3} + 3 a_{n-2}^2, \quad m_{m-1} \alpha_{m-1} = (n-4)(a_n a_{n-5} - 3 a_{n-1} a_{n-4} + 2 a_{n-2} a_{n-3})$$

ed in generale.

$$m_r \alpha_r = \sum_0^{\frac{r}{2}} p_{r,s} P_{r,s}; \quad m_r \alpha_r = \sum_0^{\frac{r-1}{2}} p_{r,s} P_{r,s}$$

secondo che r è pari o dispari; essendo:

$$m_r = \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

$$p_{r,s} = \frac{(n-4)(n-5) \dots (n-s-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} \cdot \frac{(n-4)(n-5) \dots (n-r+s-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-s)}$$

e:

$$P_{r,s} = a_s a_{r-s+4} - 4 a_{s+1} a_{r-s+3} + 6 a_{s+2} a_{r-s+2} - 4 a_{s+3} a_{r-s+1} + a_{s+4} a_{r-s}$$

salvo il caso in cui $s = \frac{r}{2}$ nel quale la espressione $P_{r, \frac{r}{2}}$ deve dividersi pel numero 2.

Il sig. WEDEKIND nella sua Dissertazione suppone $a_0 = 0$ e ricava quindi dalle $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \dots$ i valori dei coefficienti $a_3, a_4 \dots$ in funzione di a_1, a_2 ; e giunge così a dimostrare che nei tre casi suaccennati la forma f è esprimibile come segue:

$$\left. \begin{array}{ll} n=4 & \xi_2(\xi_1^3 - \xi_2^3) \\ n=6 & \xi_1 \xi_2(\xi_1^4 - \xi_2^4) \\ n=12 & \xi_1 \xi_2(\xi_1^{10} + 11 \xi_1^5 \xi_2^5 - \xi_2^{10}) \end{array} \right\} \quad (1)$$

nelle quali le ξ_1, ξ_2 sono funzioni lineari di x_1, x_2 .

Sono queste le espressioni che eguagliate a zero danno le equazioni denominate del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro, dopo le citate ricerche del sig. SCHWARZ.

Noi intendiamo trattare qui il problema nella sua generalità, e supporremo perciò $a_0=1$, $a_1=0$, ipotesi le quali non la limitano punto. Le $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$ danno quindi:

$$a_4 = -3a_2^2, \quad a_5 = -2a_2a_3$$

e le forme del quarto e del quinto ordine, dotate della proprietà enunciata, saranno:

$$\begin{aligned} f &= x_1^4 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 - 3a_2^2x_2^4 \\ f &= x_1^5 + 10a_2x_1^3x_2^2 + 10a_3x_1^2x_2^3 - 15a_2^2x_1x_2^4 - 2a_2a_3x_2^5 \end{aligned}$$

notando che per quest'ultima sostituendo nella $\alpha_2=0$ i valori superiori di a_4 , a_5 , si ottiene:

$$a_3^2 + 4a_2^3 = \lambda = 0.$$

Le forme binarie degli ordini 4° , 6° , 12° ; si distinguono appunto da quelle di ogni altro ordine dall'essere per queste ultime $\lambda=0$ mentre non lo è per le prime. Esclusi i primi tre casi, se poniamo per gli altri:

$$a_{2i} = (-1)^{i+1}(2i-1)a_2^i; \quad a_{2i+1} = (-1)^{i+1}ia_2^{i-1}a_3 \quad (2)$$

si ottengono le:

$$\text{per } r \text{ dispari:} \quad P_{r,2i} = 0, \quad P_{r,2i+1} = 0 \text{ identicamente:}$$

$$\text{per } r \text{ pari:} \quad P_{r,2i} = (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot 2[(2i+1)r - 4i^2]a_2^{\frac{r}{2}-1}\lambda;$$

$$P_{r,2i+1} = -(-1)^{\frac{r}{2}} \cdot 2[(i+1)r - (2i+1)^2]a_2^{\frac{r}{2}-1}\lambda$$

vale a dire anche per r pari $P_{r,2i} = P_{r,2i+1} = 0$ se $\lambda=0$; cioè per questa specie di forme f i valori (2) annullano identicamente il covariante $\frac{1}{2}(ff)^4$. La relazione $\lambda=0$ dà:

$$a_3 = \pm 2a_2\sqrt{-a_2}$$

e le forme f corrispondenti si trasformano nella:

$$f = \xi_1^{n-1}\xi_2$$

essendo:

$$\xi_1 = x_1 \pm x_2\sqrt{-a_2}, \quad \xi_2 = x_1 \mp (n-1)x_2\sqrt{-a_2}.$$

Si osservi infine che indicando con S l'invariante quadratico di queste forme, si ha pei valori (2)

$$S = 0$$

e che dalla $\lambda=0$ deducesi la:

$$4h^3 + g^2 = 0$$

essendo h, θ i due covarianti degli ordini $2(n-2), 3(n-2)$ seguenti:

$$h = \frac{1}{2}(ff)^2, \quad \theta = 2(fh).$$

3.° Passiamo ora a considerare le forme f degli ordini $4^\circ, 6^\circ, 12^\circ$ per le quali $\frac{1}{2}(ff)^4 = 0$. La forma biquadratica è, come sopra, la:

$$f = x_1^4 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 - 3a_2^2x_2^4$$

e l'invariante cubico di essa essendo eguale a $-\lambda$ si avrà la nota relazione:

$$4h^3 + \theta^2 + \lambda f^3 = 0. \quad (3)$$

Sia ora:

$$F(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1^3 - \xi_2^3)$$

e posto:

$$\xi_1 = ax_1 + bx_2; \quad \xi_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad (4)$$

determiniamo le $a, b; \alpha, \beta$ per modo che risulti:

$$F(\xi_1, \xi_2) = Cf(x_1, x_2) \quad (5)$$

essendo C una costante. Dal confronto dei coefficienti delle potenze delle x_1, x_2 nei due membri di quest'ultima equazione, se si pone:

$$a = -\rho\alpha, \quad b = \omega\beta$$

si hanno dapprima le:

$$C = -\alpha^4(\rho^3 + 1); \quad \omega = \frac{\rho^3 + 4}{3\rho^2}$$

poi le due seguenti:

$$\rho^3 - 8 = -3^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} a_2 \rho^3; \quad \rho^6 + 20\rho^3 - 8 = \frac{1}{2} \cdot 3^3 \cdot \frac{\alpha^3}{\beta^3} a_3 \rho^6 \quad (6)$$

essendo la quinta relazione soddisfatta identicamente. Le due ultime danno per la determinazione di ρ la equazione:

$$\frac{\rho^3(\rho^3 - 8)^2}{(\rho^6 + 20\rho^3 - 8)^2} = -\frac{4a_2^3}{a_3^2}$$

dalla quale ponendo:

$$y = -3 \frac{\rho^2 \sqrt{-a_2}}{\sqrt{\rho(\rho^3 - 8)}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

e quindi

$$\rho^3 = \frac{8y^2}{y^2 + 9a_2}$$

si ottiene la:

$$y^4 + 6a_2y^2 + 4a_3y - 3a_2^2 = 0. \quad (7)$$

Ora per la teorica dei covarianti associati se nella:

$$F(\xi_1, \xi_2)$$

poniamo:

$$\xi_1 x_1 - \frac{1}{4} \frac{dF}{d\xi_2} x_2; \quad \xi_2 x_1 + \frac{1}{4} \frac{dF}{d\xi_1} x_2$$

e:

$$F\left(\xi_1 x_1 - \frac{1}{4} \frac{dF}{d\xi_2} x_2, \quad \xi_2 x_1 + \frac{1}{4} \frac{dF}{d\xi_1} x_2\right) = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4)(x_1, x_2)^4$$

si hanno come è noto le:

$$F_0 = F, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = FH, \quad F_3 = F\Theta$$

essendo:

$$H = \frac{1}{2}(FF)^2, \quad \Theta = 2(FH).$$

Se quindi supponiamo nelle (4) (5):

$$a = \xi_1, \quad \alpha = \xi_2; \quad b = -\frac{1}{4} \frac{dF}{d\xi_2}, \quad \beta = \frac{1}{4} \frac{dF}{d\xi_1}$$

si avranno le:

$$\rho = -\frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad C = F, \quad a_2 = H, \quad a_3 = \Theta$$

e la equazione (6) diverrà:

$$y^4 + 6Hy^2 + 4\Theta y - 3H^2 = 0 \quad (8)$$

la quale è soddisfatta ponendo:

$$y = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{3}{4} \frac{\xi_2^2}{\xi_1}.$$

Dalle relazioni (6) si hanno poi i valori di H , Θ , cioè

$$H = -\frac{1}{16} \xi_1 (\xi_1^3 + 8\xi_2^3), \quad \Theta = \frac{1}{32} (\xi_1^6 - 20\xi_1^3 \xi_2^3 - 8\xi_2^6).$$

Le radici della (8) si ponno quindi esprimere nel modo seguente:

$$\sqrt{y_\infty} = \frac{1}{2} \xi_1 \sqrt{-3}, \quad \sqrt{y_0} = \frac{1}{2} (\xi_1 + 2\xi_2), \quad \sqrt{y_1} = \frac{1}{2} (\xi_1 + 2\varepsilon \xi_2), \quad \sqrt{y_2} = \frac{1}{2} (\xi_1 + 2\varepsilon^2 \xi_2)$$

indicando con ε una radice cubica immaginaria dell'unità. Ma la equazione (7) non è che la forma biquadratica f eguagliata a zero nella quale sia sostituita y in luogo del rapporto $x_1:x_2$. Dunque le radici quadrate delle radici della equazione che si ottiene eguagliando a zero una forma biquadratica nella quale l'invariante quadratico è nullo, sono esprimibili in funzione razionale intera di due quantità ξ_1, ξ_2 ; proprietà nota dalle ricerche sulla teoria delle funzioni ellittiche.

4.° Per $n=6$ la funzione f è la seguente:

$$f = x_1^6 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 - 45 a_2^2 x_1^2 x_2^4 - 12 a_2 a_3 x_1 x_2^5 + (5 a_2^3 - 8 \lambda) x_2^6.$$

Essa è, come è noto, il covariante di sesto ordine di una forma biquadratica (*); infatti se con φ si indica la forma biquadratica:

$$\varphi = x_2(x_1^3 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3)$$

si ha:

$$k = \frac{1}{2}(\varphi \varphi)^2 = \frac{1}{16}[-x_1^4 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 8 a_3 x_1 x_2^3 - 9 a_2^2 x_2^4]$$

ed:

$$f = 64(\varphi k).$$

Da questa proprietà si deduce tosto la risoluzione della $f=0$ da quella della $\varphi=0$, giacchè supponendo:

$$\varphi = x_2(x_1 - e_0 x_2)(x_1 - e_1 x_2)(x_1 - e_2 x_2)$$

si ottiene:

$$f = \Pi[(x_1 - e x_2)^2 - 3 x_2^2(e^2 + a_2)]$$

e le radici della $f=0$ sono date dalla:

$$x_1 = x_2[e \pm \sqrt{3(e^2 + a_2)}]$$

nella quale si sostituiscono le e_0, e_1, e_2 in luogo di e .

Osserviamo ora che ponendo:

$$e = -\frac{\sqrt{y^3 + 16}}{\sqrt{y^3 + 4}} \sqrt{-a_2}$$

nella equazione:

$$e^3 + 3 a_2 e + a_3 = 0$$

di cui le radici sono appunto le e_0, e_1, e_2 , si giunge alla:

$$\frac{(y^2 + 4)^3}{(y^3 + 16)(y^3 - 2)^2} = -\frac{4 a_2^3}{a_3^2}$$

dalla quale indicando con δ il rapporto $\frac{4 a_2^3}{a_3^2}$ si ottiene la:

$$\frac{y^3 + 4}{3y} = \sqrt[3]{\frac{4\delta}{1 + \delta}} = \frac{2a_2}{\sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}}$$

ossia la equazione:

$$y^3 - \frac{6 a_2}{\sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}} y + 4 = 0 \quad (9)$$

(*) CLEBSCH e GORDAN: *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie*. Annali di Matematica, t. 1, pag. 73.

di cui le radici sono:

$$\begin{aligned} y_0 &= -\sqrt[3]{2\left(1+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \sqrt[3]{2\left(1-\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} \\ y_1 &= -\varepsilon\sqrt[3]{2\left(1+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varepsilon^2\sqrt[3]{2\left(1-\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} \\ y_2 &= -\varepsilon^2\sqrt[3]{2\left(1+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varepsilon\sqrt[3]{2\left(1-\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} \end{aligned}$$

supposto ε una radice cubica immaginaria dell'unità. Sostituendo questi valori nella relazione:

$$x_1\sqrt{y^3+4} + x_2\sqrt{y^3+16} \cdot \sqrt{-a_2} = \pm 6x_2\sqrt{-a_2} \quad (10)$$

si avranno i valori del rapporto $x_1:x_2$ che annullano la forma f .

Sia ora $F(\xi_1, \xi_2)$ un'altra forma del sesto ordine per la quale $\frac{1}{2}(FF')^4 = 0$ identicamente. Ponendo in essa:

$$\xi_1 x_1 - \frac{1}{6} \frac{dF}{d\xi_2} x_2, \quad \xi_2 x_1 + \frac{1}{6} \frac{dF}{d\xi_1} x_2 \quad (11)$$

in luogo delle ξ_1, ξ_2 ; e supponendo:

$$F\left(\xi_1 x_1 - \frac{1}{6} \frac{dF}{d\xi_2} x_2, \quad \xi_2 x_1 + \frac{1}{6} \frac{dF}{d\xi_1} x_2\right) = F(\xi_1, \xi_2) f(x_1, x_2)$$

si hanno le:

$$a_2 = H, \quad a_3 = \Theta$$

e siccome indicando con A l'invariante quadratico di f risulta $A = -18\lambda$, sarà:

$$4H^3 + \Theta^3 = -\frac{1}{18} A F^4$$

la equazione (9) si trasformerà nella:

$$y^3 + 36 \frac{H}{\sqrt[3]{6AF^4}} y + 4 = 0 \quad (12)$$

e si avrà:

$$y_0 = -\sqrt[3]{2\left(1 + \frac{3\Theta}{F^2\sqrt{-\frac{1}{3}A}}\right)} - \sqrt[3]{2\left(1 - \frac{3\Theta}{F^2\sqrt{-\frac{1}{3}A}}\right)}.$$

Se la $F(\xi_1, \xi_2)$ è la forma canonica:

$$F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2 (\xi_1^4 - \xi_2^4)$$

si hanno le:

$$A = \frac{1}{6}, \quad H = -\frac{1}{36} [\xi_1^8 + 14\xi_1^4 \xi_2^4 + \xi_2^8]$$

e l'equazione (12) è soddisfatta dai valori:

$$y_0 = \frac{4 \xi_1^2 \xi_2^2}{\sqrt[3]{F^2}}, \quad y_1 = \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}{\sqrt[3]{F^2}}, \quad y_2 = -\frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}{\sqrt[3]{F^2}}.$$

La relazione (10) dà luogo in questo caso alla relazione quadratica:

$$x_1^2(y^3 + 4) + 2x_1x_2\sqrt{y^3 + 4}\sqrt{y^3 + 16}\sqrt{-H} - x_2^2(y^3 - 20)H = 0$$

la quale, sostituendo per y il valore y_0 , si trasforma nella:

$$\left(\xi_1 x_1 - \frac{1}{6} \frac{dF}{d\xi_2} x_2\right) \left(\xi_1 x_2 + \frac{1}{6} \frac{dF}{d\xi_1} x_1\right) = 0 \quad (13)$$

di cui il primo membro è il prodotto delle due espressioni (11). Analogamente se si pone:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= \eta_1 \sqrt{2}, & \xi_1 - \xi_2 &= \eta_2 \sqrt{2} \\ \xi_1 + i\xi_2 &= \mathfrak{S}_1 \sqrt{2}, & \xi_1 - i\xi_2 &= i\mathfrak{S}_2 \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

dove $i = \sqrt{-1}$, essendo:

$$F(\eta_1, \eta_2) = F(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) = F(\xi_1, \xi_2)$$

si otterranno, dalla sostituzione delle y_1, y_2 nella relazione quadratica superiore, due prodotti della forma (13). Si avrà così il teorema:

Le radici della equazione del sesto grado che si ottiene eguagliando a zero una forma f del sesto ordine per la quale il covariante $\frac{1}{2}(ff)^4$ è identicamente nullo, sono esprimibili in funzione di due quantità ξ_1, ξ_2 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{6} [\xi_1^4 - 5\xi_2^4] & \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{6} [\xi_2^4 - 5\xi_1^4] \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{6} [5\eta_2^4 - \eta_1^4] & \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{6} [5\eta_1^4 - \eta_2^4] \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{6} [5\mathfrak{S}_2^4 - \mathfrak{S}_1^4] & \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{6} [5\mathfrak{S}_1^4 - \mathfrak{S}_2^4] \end{aligned}$$

nelle quali le $\eta_1, \eta_2; \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ hanno i valori (14).

5.° La considerazione della forma generale del 12° ordine avente la proprietà indicata offre alcuni interessanti risultati per la loro connessione colla teorica delle funzioni ellittiche. Notiamo dapprima che i valori dei coefficienti della medesima, fatta astrazione dai coefficienti numerici binomiali, sono i

seguenti:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4 = -3a_2^2, \quad a_5 = -2a_2a_3, \quad a_6 = 5(a_2^3 - \frac{4}{7}\lambda) \\ a_7 &= 3a_2^2a_3, \quad a_8 = -a_2(7a_2^3 + 32\lambda), \quad a_9 = -4a_3(a_2^3 + 20\lambda), \quad a_{10} = 9a_2^2(a_2^3 + 56\lambda) \\ a_{11} &= 5a_2a_3(a_2^3 + 128\lambda), \quad a_{12} = -11a_2^6 - 11 \cdot 4^4 \cdot a_2^3\lambda + 4^4 \cdot 5^2 \cdot \lambda^2. \end{aligned}$$

Essa decomponesi in fattori del secondo grado affatto analogamente alla forma del sesto ordine; infatti indicando con $z_\infty, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$ le radici della equazione:

$$\varphi = z^6 + 15a_2z^4 + 20a_3z^3 - 45a_2^2z^2 - 12a_2a_3z - \frac{5}{4}a_3^2 \quad (15)$$

si ottiene la:

$$f = \Pi[(x_1 - zx_2)^2 - x_2^2\mu(z)]$$

ponendo per z le radici della $\varphi = 0$, ed essendo:

$$\mu(z) = \frac{5}{3} \frac{z^3 + 3a_2z + a_3}{z}$$

Ora la equazione $\varphi = 0$ è la equazione modulare corrispondente alla trasformazione del quinto ordine dell'integrale ellittico (*):

$$\frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3a_2x + a_3}}$$

quindi le radici dell'equazione $f = 0$ sono esprimibili col mezzo di funzioni ellittiche. La equazione $\varphi = 0$ si può facilmente trasformare in una di quelle che hanno lo stesso gruppo dell'equazione del moltiplicatore. Si osservi infatti che ponendo:

$$u = \frac{1}{6} \frac{d\varphi}{dz}, \quad v = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \frac{d^3\varphi}{dz^3} = z^3 + 3a_2z + a_3$$

si ha identicamente:

$$4\varphi = 9zu - 5v^2$$

quindi introducendo una nuova variabile y legata alla z dalla:

$$y = -9 \frac{a_2}{m} \frac{z}{v}$$

nella quale:

$$\frac{a_2}{m} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2\lambda}$$

(*) Vedi la mia Nota: *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. Comptes Rendus, novembre 1874.*

essendo per la $\varphi=0$:

$$9 \frac{z}{u} = 5 \frac{v}{u}$$

si avrà anche:

$$y = -5 \frac{a_2 v}{m u}.$$

Così dalla:

$$y^2 = 81 \frac{a_2^2}{m^2} \cdot \frac{z^2}{u^2}$$

si ottiene la:

$$y^2 = 5 \cdot 9 \cdot \frac{a_2^2}{m^2} \frac{z}{u}$$

dalle quali osservando essere $u = \frac{1}{6} \varphi'(z)$, si dedurranno le:

$$\Sigma y = 0 \quad \Sigma y^2 = 0$$

le sommatorie estendendosi alle radici della trasformata in y . Inoltre si otterranno facilmente le:

$$\Sigma \frac{1}{y} = \frac{12}{5} m, \quad \Sigma \frac{1}{y^2} = \frac{12^2}{5^2} \cdot m^2$$

quindi:

$$\left(\Sigma \frac{1}{y} \right)^2 = \Sigma \frac{1}{y^2}$$

cioè nullo anche il coefficiente del quinto termine. La equazione trasformata sarà così la seguente:

$$y^6 + 10y^3 - 12my + 5 = 0 \tag{16}$$

di cui le radici hanno la proprietà sopra indicata.

Osservando ora che:

$$\mu(z) = -15 \frac{a_2}{my}; \quad z = -\frac{\sqrt{-a_2}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{y^3 + my + 10}}{\sqrt{y}} \tag{17}$$

si avrà per uno dei fattori quadratici della f la espressione:

$$x_1^2 + 2\sqrt{-a_2} \cdot \frac{\sqrt{y^3 + my + 10}}{\sqrt{my}} x_1 x_2 - a_2 \frac{y^3 + my - 5}{my} x_2^2$$

nella quale y è una delle radici della equazione (16).

Se con $F(\xi_1, \xi_2)$ si indica una forma del 12° ordine per la quale $\frac{1}{2}(FF')^4 = 0$

identicamente e si pongono nella medesima in luogo di ξ_1, ξ_2 le:

$$\xi_1 x_1 - \frac{1}{12} \frac{dF}{d\xi_2} x_2; \quad \xi_2 x_1 + \frac{1}{12} \frac{dF}{d\xi_1} x_2$$

supponendo:

$$F\left(\xi_1 x_1 - \frac{1}{12} \frac{dF}{d\xi_2} x_2, \xi_2 x_1 + \frac{1}{12} \frac{dF}{d\xi_1} x_2\right) = F(\xi_1, \xi_2) f(x_1, x_2)$$

si hanno le:

$$a_2 = H \quad a_3 = \Theta$$

essendo:

$$H = \frac{1}{2} (FF')^2, \quad \Theta = 2(FH)$$

e siccome indicando con A l'invariante quadratico di f si ha:

$$A = \frac{6}{7} \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \lambda^2$$

si avrà:

$$4H^3 + \Theta^2 = \frac{1}{180} BF^5$$

posto:

$$B = \sqrt{\frac{7}{6} A}.$$

La equazione in y diverrà in questo caso la:

$$y^6 + 10y^3 - 72 \frac{H}{\sqrt[3]{\frac{3}{10} BF^5}} y + 5 = 0. \quad (18)$$

È noto che la proprietà caratteristica di quelle equazioni che hanno lo stesso gruppo della equazione del moltiplicatore si è, che le radici quadrate delle loro radici si ponno esprimere nel modo seguente:

$$\sqrt{\eta_\infty} = \alpha_0 \sqrt{5}; \quad \sqrt{\eta_r} = \alpha_0 + \varepsilon^r \alpha_1 + \varepsilon^{4r} \alpha_2$$

essendo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tre indeterminate, ed $r = 0, 1, 2, 3, 4$. La forma generale delle equazioni stesse è la:

$$(\eta - a)^6 - 4a(\eta - a)^5 + 10b(\eta - a)^3 - 4c(\eta - a) + 5b^2 - 4ac = 0$$

nella quale:

$$a = \alpha_0^2 + \alpha_1 \alpha_2; \quad b = 8\alpha_0^4 \alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^3 - \alpha_0(\alpha_1^5 + \alpha_2^5)$$

$$c = 80\alpha_0^6 \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 40\alpha_0^4 \alpha_1^3 \alpha_2^3 + 5\alpha_0^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4 + \alpha_1^5 \alpha_2^5 - \alpha_0(32\alpha_0^4 - 20\alpha_0^2 \alpha_1 \alpha_2 + 5\alpha_1^2 \alpha_2^2)(\alpha_1^5 + \alpha_2^5) + \frac{1}{4}(\alpha_1^5 + \alpha_2^5)^2.$$

Supponendo in quest'ultima:

$$a = 0, \quad \eta = y^2 \bar{b}$$

si ottiene la:

$$y^6 + 10y^3 - 4\frac{c}{\sqrt[3]{b^5}}y + 5 = 0 \quad (19)$$

che ha la stessa forma della superiore.

La $a=0$ è soddisfatta ponendo:

$$\alpha_1 = \xi_1^2, \quad \alpha_2 = -\xi_2^2 \text{ e quindi } \alpha_0 = \xi_1 \xi_2;$$

per questi valori le b , c diventano:

$$\left. \begin{aligned} b &= -\xi_1 \xi_2 (\xi_1^{10} + 11 \xi_1^5 \xi_2^5 - \xi_2^{10}) \\ c &= 124 \xi_1^{10} \xi_2^{10} - 57 \xi_1^5 \xi_2^5 (\xi_1^{10} - \xi_2^{10}) + \frac{1}{4} (\xi_1^{10} - \xi_2^{10})^2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

cioè la espressione di b è, per le ricerche dei sig.ⁱ SCHWARZ e KLEIN, la forma canonica delle forme del dodicesimo ordine aventi la proprietà indicata. Si potrà quindi porre:

$$b = -F(\xi_1, \xi_2)$$

e si dimostrerà facilmente essere:

$$c = -36H.$$

Osservando infine che per la forma canonica qui considerata è:

$$A = \frac{5^2}{3 \cdot 7 \cdot 8} \text{ sarà: } B = \frac{5}{12}$$

le equazioni (18) (19) coincideranno nella sola:

$$y^6 + 10y^3 - \frac{144H}{\sqrt[3]{F^5}}y + 5 = 0 \quad (21)$$

come fu già dimostrato dal prof. KLEIN (pag. 203 della Memoria citata).

I fattori quadratici della forma f si ponno quindi esprimere nel modo seguente:

$$x_1^2 + \frac{\sqrt{10F^2 - 12H\eta - F\eta^3}}{\sqrt{3\eta}} x_1 x_2 - \frac{5F^2 + 12H\eta + F\eta^3}{12\eta} x_2^2$$

nei quali pongansi per η i valori dedotti dalle:

$$\sqrt{\eta_\infty} = \xi_1 \xi_2 \sqrt{5}, \quad \sqrt{\eta_r} = \xi_1 \xi_2 + \epsilon^r \xi_1^2 - \epsilon^{4r} \xi_2^2.$$

Sostituendo η_∞ in luogo di η trovasi facilmente che quella espressione quadratica equivale alla:

$$\frac{1}{\xi_1 \xi_2} \left[\xi_1 x_1 - \frac{1}{12} \frac{dF}{d\xi_2} x_2 \right] \left[\xi_2 x_1 + \frac{1}{12} \frac{dF}{d\xi_1} x_2 \right]$$

e siccome ponendo:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{t}{\rho} [\rho \xi_2 - \varepsilon^r \xi_1]; \quad \mathfrak{S}_2 = -\frac{1}{t\sqrt{5}} [\rho \xi_1 + \varepsilon^{4r} \xi_2]$$

nella quale $\rho = \varepsilon + \varepsilon^4$, si ha:

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \sqrt{5} = \xi_1 \xi_2 + \varepsilon^r \xi_1^2 - \varepsilon^{4r} \xi_2^2 = \sqrt{\eta_r}$$

determinando t per modo che risulti:

$$F(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) = F(\xi_1, \xi_2)$$

cioè:

$$t^2 = -\frac{\rho}{\sqrt{5}}$$

si avrà per gli altri fattori quadratici la espressione:

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2} \left[\mathfrak{S}_1 x_1 - \frac{1}{i2} \frac{dF}{d\mathfrak{S}_2} x_2 \right] \left[\mathfrak{S}_2 x_1 + \frac{1}{i2} \frac{dF}{d\mathfrak{S}_1} x_2 \right].$$

Così se nella:

$$z = -\sqrt{-a_2} \frac{\sqrt{y^3 + my + 10}}{\sqrt{my}}$$

si pone y_∞ in luogo di y , si ottiene la:

$$z_\infty = -\frac{5}{i2} (\xi_1^{10} + \xi_2^{10})$$

ed analogamente per un'altra radice qualsivoglia z_r si avrà:

$$z_r = -\frac{5}{i2} (\mathfrak{S}_1^{10} + \mathfrak{S}_2^{10}).$$

Le radici dell'equazione modulare (15) per la trasformazione del quinto ordine dell'integrale ellittico sono quindi esprimibili in funzione di due indeterminate ξ_1, ξ_2 nel modo seguente:

$$z_\infty = -5\alpha, \quad z_r = \alpha + \varepsilon^r \beta + \varepsilon^{4r} \gamma + \varepsilon^{3r} \delta + \varepsilon^{2r} \varphi$$

essendo:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{i2} (\xi_1^{10} + \xi_2^{10}) & \beta &= \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2^4 (7 \xi_1^5 + \xi_2^5) & \delta &= \frac{1}{2} \xi_1^3 \xi_2^2 (3 \xi_1^5 + 4 \xi_2^5) \\ \gamma &= \frac{1}{2} \xi_1^4 \xi_2 (7 \xi_2^5 - \xi_1^5) & \varphi &= \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_2^3 (3 \xi_2^5 - 4 \xi_1^5). \end{aligned}$$

Da questi valori deducesi facilmente la:

$$(z_\infty - z_0)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = \frac{\sqrt{5}}{8} F^2 \cdot \psi$$

nella quale:

$$\psi = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1^4 + 2\xi_1^3 \xi_2 - 6\xi_1^2 \xi_2^2 - 2\xi_1 \xi_2^3 + \xi_2^4).$$

Ora essendo identicamente, siccome ha dimostrato il sig. KLEIN:

$$4 \cdot 6^3 \cdot \Theta = \psi^5 - 10 \psi^3 F + 45 \psi F^2$$

ponendo $\psi = u\sqrt{F}$, si otterrà che la equazione del quinto grado:

$$u^5 - 10u^3 + 45u - 24 \frac{a_3}{\sqrt[3]{\lambda}} = 0$$

di cui le radici sono le:

$$u = \frac{2}{9\sqrt[3]{\lambda}} (z_\infty - z_0)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)$$

ha per risolvente la equazione modulare (15) considerata superiormente.

6.° È noto che indicando con $\sqrt{y'}$, $\sqrt{y''}$ le espressioni (*):

$$\sqrt{y'} = (y^5 + 11y^2 - 12m)\sqrt{y}, \quad \sqrt{y''} = (y^4 + 9y)\sqrt{y}$$

si ha per una qualsivoglia delle radici della equazione (16), la relazione:

$$20(m^3 - 1) \frac{d\sqrt{y}}{dm} = 2m^2\sqrt{y} + m\sqrt{y'} + \sqrt{y''}$$

dalla quale e dalla (16) si ottengono le:

$$20(m^3 - 1) \frac{d\sqrt{y'}}{dm} = 10[2\sqrt{y} + m^2\sqrt{y'} + m\sqrt{y''}]$$

$$20(m^3 - 1) \frac{d\sqrt{y''}}{dm} = 18[2m\sqrt{y} + \sqrt{y'} + m^2\sqrt{y''}].$$

Posto quindi:

$$20(m^3 - 1) \frac{d\sqrt{y}}{dm} = a_1\sqrt{y} + b_1\sqrt{y'} + c_1\sqrt{y''}$$

si deducono le:

$$\left. \begin{aligned} 20^2(m^3 - 1)^2 \frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} &= a_2\sqrt{y} + b_2\sqrt{y'} + c_2\sqrt{y''} \\ 20^3(m^3 - 1)^3 \frac{d^3\sqrt{y}}{dm^3} &= a_3\sqrt{y} + b_3\sqrt{y'} + c_3\sqrt{y''} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

dove:

$$a_1 = 2m^2, \quad b_1 = m, \quad c_1 = 1$$

(*) Le formole generali pel caso in cui a non $= 0$ sono date in una mia Nota pubblicata in questi Annali, t. 1, pag. 222.

come sopra, ed:

$$\begin{aligned} a_2 &= -30m^2 a_1 + 24m(m^3 - 1) & a_3 &= -4 \cdot 289m(m^3 - 1)a_1 - 90m^2 a_2 + 440(m^3 - 1)^2 \\ b_2 &= -30m^2 b_1 + 2(m^3 - 1) & b_3 &= -4 \cdot 289m(m^3 - 1)b_1 - 90m^2 b_2 \\ c_2 &= -30m^2 c_1 & c_3 &= -4 \cdot 289m(m^3 - 1)c_1 - 90m^2 c_2. \end{aligned}$$

Le relazioni (22) conducono evidentemente alla equazione differenziale lineare del terzo ordine seguente:

$$200(m^3 - 1) \frac{d^3 \sqrt{y}}{dm^3} + 900m^2 \frac{d^2 \sqrt{y}}{dm^2} + 578m \frac{d\sqrt{y}}{dm} - 11\sqrt{y} = 0 \quad (23)$$

mentre formando il quadrato della prima di esse, tenendo presente la equazione (16), si ha:

$$10^2 (m^3 - 1) \left(\frac{d\sqrt{y}}{dm} \right)^2 = y^3 + my + 10$$

per la quale dalla (17) deducesi la:

$$10\sqrt{m^3 - 1} \cdot \frac{d\sqrt{y}}{dm} = - \frac{3z\sqrt{z}}{\sqrt{z^3 + 3a_2 z + a_3}}.$$

Confrontando ora le equazioni (16) (21) si ha:

$$m = \frac{12H}{\sqrt[3]{F^5}} \quad (24)$$

da cui:

$$m^3 - 1 = -3 \cdot 12^2 \cdot \frac{\Theta^2}{F^5}. \quad (25)$$

Supponiamo nell'una e nell'altra di queste equazioni:

$$\xi_1 = \xi \xi_2$$

e derivando la prima logicamente rispetto ad m si avrà:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{3FH} (3FH' - 5HF') \frac{d\xi}{dm}$$

posto $F' = \frac{dF}{d\xi}$, $H' = \frac{dH}{d\xi}$. Ma essendo:

$$\Theta = 2(FH) = \frac{1}{30}(5HF' - 3FH')$$

sarà anche:

$$\frac{1}{m} = -10 \frac{\Theta}{FH} \frac{d\xi}{dm}. \quad (26)$$

Le equazioni (24) (25) (26), rammentando essere $b = -F(\xi)\xi_2^{12}$ conducono facilmente alla:

$$\frac{10}{\sqrt{3}}\sqrt{m^3-1} \cdot \frac{d\xi}{dm} = \frac{\sqrt[6]{b}}{\xi_2^2}$$

ma:

$$\sqrt{y_\infty} = \frac{\alpha_0 \sqrt{5}}{\sqrt[6]{b}} = \frac{\xi \xi_2^2 \sqrt{5}}{\sqrt[6]{b}}$$

si avrà quindi la interessante relazione:

$$2\sqrt{\frac{5}{3}(m^3-1)} \cdot \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dm} = \frac{1}{\sqrt{y_\infty}}. \quad (27)$$

Formando il differenziale secondo del logaritmo di ciascuno dei membri di questa equazione, si giunge dopo una facile calcolazione alla:

$$[\xi]_m = \frac{1}{y} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\sqrt{y}}{dm} \right)^2 - \sqrt{y} \frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} - \frac{3m^2}{2(m^3-1)} \sqrt{y} \frac{d\sqrt{y}}{dm} - \frac{3}{40(m^3-1)} \right] + \frac{27m^4}{8(m^3-1)^2} - \frac{3m}{m^3-1}$$

posto:

$$[\xi]_m = \frac{\frac{d\xi}{dm} \frac{d^3\xi}{dm^3} - 3 \left(\frac{d^2\xi}{dm^2} \right)^2}{2 \left(\frac{d\xi}{dm} \right)^2}$$

ed y in luogo di y_∞ .

Ora dalle (22) si ha che, indicando con P la espressione moltiplicata per $\frac{1}{y}$ nella equazione differenziale superiore, si ottiene:

$$P = -\frac{11my}{200(m^3-1)}$$

quindi sarà:

$$[\xi]_m = \frac{27m^4}{8(m^3-1)^2} - \frac{611m}{200(m^3-1)}. \quad (28)$$

La espressione P conduce tosto alla:

$$\frac{dP}{dm} + \frac{3m^2}{m^3-1} P = -\sqrt{y} \left[\frac{d^3\sqrt{y}}{dm^3} + \frac{9m^2}{2(m^3-1)} \frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} + \frac{3m}{m^3-1} \frac{d\sqrt{y}}{dm} \right]$$

mentre pel valore superiore di P si ha:

$$\frac{dP}{dm} + \frac{3m^2}{m^3-1} P = -\frac{11\sqrt{y}}{200(m^3-1)} \left[2m \frac{d\sqrt{y}}{dm} + \sqrt{y} \right]$$

e quindi eguagliando i secondi membri si giungerà nuovamente alla equazione (23).

Trasformiamo ora la equazione (28) ponendo:

$$m^3 = x;$$

faremo uso perciò della relazione generale facilmente dimostrabile:

$$[\xi]_x = [m]_x + [\xi]_m \left(\frac{dm}{dx} \right)^2$$

per la quale essendo:

$$[m]_x = \frac{4}{9x^2}, \quad [\xi]_m \left(\frac{dm}{dx} \right)^2 = \frac{3}{8(1-x)^2} + \frac{611}{1800x(1-x)}$$

si otterrà:

$$[\xi]_x = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(1-x)} \quad (29)$$

essendo:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{5}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Questo risultato, al quale può giungersi anche direttamente per mezzo della teorica delle forme binarie, ha qui una singolare importanza giacchè dimostra che la risoluzione della equazione (16) può ottenersi mediante le serie ipergeometriche di GAUSS.

Il prof. KUMMER ha dimostrato già da lungo tempo (*) come si possa esprimere mediante quelle serie l'integrale della equazione differenziale del terzo ordine:

$$[\xi]_x = \frac{A'\xi^2 + B'\xi + C'}{2\xi^2(1-\xi)^2} - \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2}.$$

Ora nel caso qui considerato si hanno le:

$$\begin{aligned} A' &= 0, & B' &= 0, & C' &= 0 \\ A &= \mu^2 - 1, & B &= 1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2, & C &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

perciò ponendo:

$$\begin{aligned} A &= (\alpha - \beta)^2 - 1 & A' &= (\alpha' - \beta')^2 - 1 \\ B &= 4\alpha\beta - 2\gamma(\alpha + \beta - 1) & B' &= 4\alpha'\beta' - 2\gamma'(\alpha' + \beta' - 1) \\ C &= \gamma(\gamma - 2) & C' &= \gamma'(\gamma' - 2) \end{aligned}$$

si otterranno per le α, β, \dots i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{41}{60}, & \beta &= \frac{29}{60}, & \gamma &= \frac{2}{3} \\ \alpha' &= 2, & \beta' &= 1, & \gamma' &= 2. \end{aligned}$$

(*) *De generali quandam aequatione differentiali tertii ordinis*, pag. 6.

Indicando con F' una funzione ipergeometrica, l'integrale della equazione (29), rammentando essere:

$$F(2, 1, 2, \xi) = \frac{1}{1-\xi}$$

sarà quindi:

$$\xi = \frac{av_1 + bv_2}{cv_1 + dv_2} \quad (30)$$

nella quale espressione a, b, c, d sono costanti a determinarsi, e le v_1, v_2 sono come è noto, due serie ipergeometriche integrali particolari dell'equazione differenziale del secondo ordine (*):

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} \frac{dv}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} v = 0. \quad (31)$$

Dal valore superiore di ξ si deduce tosto:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{(ad - bc) \left(v_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{dv_2}{dx} \right)}{(av_1 + bv_2)(cv_1 + dv_2)}$$

ed essendo per un noto teorema di ABEL:

$$v_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{dv_2}{dx} = Cx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} = Cx^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}$$

dove C è una costante, si otterrà dalla equazione (27):

$$\sqrt{y} = D(1-x)(av_1 + bv_2)(cv_1 + dv_2)$$

indicando D una costante.

Le radici di una equazione del sesto grado (16) avente lo stesso gruppo di quello del moltiplicatore nella trasformazione del quinto ordine delle funzioni ellittiche e per la quale $\alpha=0$, si possono quindi esprimere per mezzo di due integrali particolari dell'equazione (31), ossia per mezzo di serie ipergeometriche di GAUSS.

A questo risultato si giunge anche direttamente partendo dalla equazione differenziale lineare del terzo ordine stabilita più sopra, ossia dalla:

$$5400x^2(1-x)\frac{d^3\sqrt{y}}{dx^3} + 2700x(4-7x)\frac{d^2\sqrt{y}}{dx^2} + 6(200-1389x)\frac{d\sqrt{y}}{dx} + 11\sqrt{y} = 0.$$

(*) KUMMER: Ueber die hypergeometrische Reihe. CRELLE, Band. 15, pag. 52.

Annali di Matematica, tomo VIII.

Infatti ponendo dapprima:

$$\sqrt{y} = (1-x)Y$$

si ottiene la:

$$\frac{d^3 Y}{dx^3} + 3p \frac{d^2 Y}{dx^2} + \left(\frac{dp}{dx} + p^2 + 4q \right) \frac{dY}{dx} + 2 \left(2pq + \frac{dq}{dx} \right) Y = 0$$

nella quale sono:

$$p = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}, \quad q = -\frac{\alpha\beta}{x(1-x)};$$

in secondo luogo sostituendo ad Y il prodotto UV si giunge alla equazione:

$$U[Q' + 2pQ] + V[P' + 2pP] + 3[PV' + QU'] = 0$$

posto:

$$P = \frac{d^2 U}{dx^2} + p \frac{dU}{dx} + qU, \quad Q = \frac{d^2 V}{dx^2} + p \frac{dV}{dx} + qV$$

la quale è appunto soddisfatta dalle $P=0$, $Q=0$.

Notiamo infine come la proprietà indicata dalla equazione (30) pel rapporto $\frac{x_1}{x_2}$ della forma canonica di SCHWARZ del dodicesimo ordine sussiste anche pel rapporto $\frac{x_1}{x_2}$ di qualunque forma binaria $f(x_1, x_2)$ del dodicesimo ordine per la quale il covariante $(ff)^4$ sia identicamente nullo.

Ottobre 1876.