

Ueber eine graphometrische Lösung der Kepler'schen Gleichung und die Construction der heliocentrischen Coordinaten eines Planeten.

Von B. Gonggrijp.

Durch gewisse, mit Cykloidalen und anderen Curven zusammenhängende graphische Betrachtungen wurde ich veranlasst, die praktische Anwendbarkeit der Cykloiden zur graphometrischen Lösung einiger wichtiger Probleme — und unter diesen der Kepler'schen Gleichung — einer eingehenden Prüfung zu unterziehen.

Bei dieser Untersuchung thaten sich unter Benutzung der auf der Hand liegenden Vereinfachungen so viele Vorzüge der genannten Curven hervor, dass ich darauf die Aufmerksamkeit der astronomischen Welt lenken möchte.

Auch nachdem ich — durch eine gefällige Bemerkung des Prof. Dr. Kreutz dazu veranlasst — meine Methode mit einigen anderen, namentlich mit denjenigen Encke's (Astr. Nachr. 30 Nr. 714), Dubois' (mittelst der Sinusoide, Astr. Nachr. 69.177) und Radau's (Bullet. Astr. I. 382 und XI. 289) eingehend verglichen hatte, traten in gewisser Hinsicht die Vortheile nicht weniger deutlich hervor, was hoffentlich aus den nachfolgenden Auseinandersetzungen erhellen wird.

Urheber des Gedankens, die verkürzte ¹⁾ Cykloide zur graphischen Lösung des berühmten Kepler'schen Problems anzuwenden, darf ich mich, wie mir klar geworden ist, nicht nennen.

Schon in J. Wallis, »De Cycloide« (1659) wird das Kepler'sche Problem mit Hülfe einer Cykloide zu lösen versucht. In dessen Opera I (Oxoniae 1695) habe ich — ebenfalls auf gefällige Anregung des Prof. Dr. Kreutz — nachträglich noch den Artikel »de problemate Kepleriano per Cycloidem solvendo« nachlesen können. Es wird hier auf sehr schwerfällige Art das Kepler'sche Problem rein graphisch ²⁾ in der vom grossen Urheber gegebenen geometrischen Urform behandelt, d. h. es wird daselbst nach der geraden Linie gesucht, welche durch einen gewissen Punkt des Diameters hindurchgehend, die Fläche eines Halbkreises in einem gegebenen Verhältniss theilt. Die Lösung, und besonders der Nachweis ihrer Richtigkeit gelingt, wie gesagt, auf sehr schwerfällige Art und ist für praktische

Rechenzwecke unbrauchbar. Von numerischen Folgerungen aus der Construction habe ich auch im genannten Folianten nichts vorgefunden.

Bei der Ausbildung der Analysis im 18. und 19. Jahrhundert wird vielleicht schon einige Male dieselbe Idee der Anwendung von Cykloiden aufgetaucht sein, allein ich glaube gewiss zu sein, dass eine Methode, wie die meinige, nie allgemein bekannt geworden und genügend ausführlich mit den Vortheilen, durch welche dieselbe sich auszeichnet, den Astronomen empfohlen ist.

Schreiten wir nach diesen nothwendigen Vorbemerkungen zur Sache.

Wenn man die beiden Glieder der Kepler'schen Gleichung:

$$M = E - e \sin E$$

mit einer beliebigen Grösse r multiplicirt, so entsteht die nachfolgende:

$$Mr = Er - er \sin E,$$

d. h. die Gleichung einer verkürzten Cycloide ³⁾, wenn r den Halbmesser des wirklich rollenden Kreises (Generatrix), er die Distanz des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt, und Mr die Abscisse bedeutet. Die excentrische Anomalie ist dann der zu $x = Mr$ gehörende Wälzungswinkel E (gewöhnlich φ genannt).

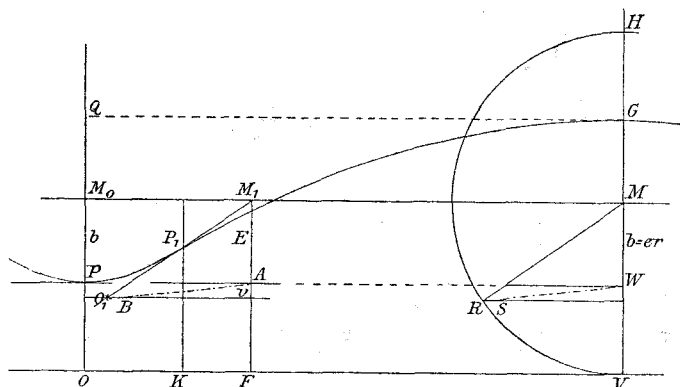
Um dem Leser die Controlle dieser Behauptung zu ersparen, wird es uns vielleicht erlaubt sein, die Gleichung der Curve kurzweg abzuleiten.

Wenn ein Kreis mit Halbmesser $M_0 O$ über die Grundlinie OV hinwegrollt, wird der Punkt O eine reine Cykloide beschreiben, und ein vom Mittelpunkt um eine Distanz $M_0 P$ entfernter Punkt eine sogenannte verkürzte Cykloide, welche durch $PP_1 G$ dargestellt wird. Es sei nun O_1 ein beliebiger Punkt der reinen Cykloide, M_1 der dazu stimmende Ort des Mittelpunktes, und E der zu O_1 gehörige Wälzungswinkel, so ist bekanntlich die Abscisse OF gleich rE , wenn r

¹⁾ Die Bezeichnungen »verkürzte« und »verlängerte« Cykloide haben im Laufe der Zeit gewechselt; Wallis nennt gerade die verkürzte Cykloide »protracta«. Die heutigen Bezeichnungen finde ich angemessener. »Verlängert« dürfte unsere Curve nur genannt werden, wenn man nicht den wirklich rollenden Kreis, sondern den zum beschreibenden Punkt gehörigen als »Generatrix« bezeichnen würde.

²⁾ Rein graphisch nenne ich ein Verfahren, wobei keine numerischen Ergebnisse eingetragen, oder Resultate ausgemessen und numerisch verwendet werden. Bei einer »graphischen Darstellung« numerischer Ergebnisse verfährt man metrographisch; bei numerischer Verwendung graphischer Resultate graphometrisch oder grammometrisch.

³⁾ Die gewöhnliche Orthogonalgleichung der verkürzten Cykloide besteht zwischen M und $\frac{p}{a}$ und geht leicht hervor, wenn E zwischen $M = E - e \sin E$ und $\frac{p}{a} = 1 - e \cos E$ eliminirt wird. Man könnte daher auch gleich p aus M herleiten, ohne E zu berücksichtigen.



die Länge des Halbmessers bedeutet. Der zum selbigen Wälzungswinkel gehörige Punkt P_1 der verkürzten Cykloide muss sich auf $M_1 O_1$ befinden in einer Distanz von M_1 $= M_0 P = b$. Nennen wir nun x die Abscisse von P_1 , so ist leicht einzusehen, dass:

$$x = rE - b \sin E.$$

Vergleichen wir hiermit:

$$Mr = rE - er \sin E.$$

so stellt sich eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen diesen beiden Gleichungen dar, wenn $b = er$ und $x = Mr$ genommen wird.

Aus dieser Bemerkung geht sogleich hervor

I. Die Lösung der Kepler'schen Gleichung:

Man beschreibt eine zum beliebigen Generatrixhalb-
messer r und zur Centraldistanz er des beschreibenden Punktes
stimmende verkürzte Cykloide; trägt auf die Abscisse die
Länge Mr auf, bestimmt den Durchschnittspunkt P_1 der
Ordinate mit der Curve, und beschreibt um P_1 mit er als
Halbmesser einen Kreis, aus dessen Durchschnittspunkt M_1
mit der Centrollinie nur noch eine Ordinate M_1F herab-
zulassen ist, um in P_1M_1F den gewünschten Winkel con-
struirt zu haben.

Bemerkung. Wenn M_0M mit einer Eintheilung (z. B. nach Graden, oder nach absolutem Maassstabe, oder nach diesen beiden zu gleicher Zeit) versehen ist, kann man E gleich in M_1 ablesen, und braucht alsdann keine Senkrechte M_1F auf OV zu fällen.

II. Das Verhältniss des zu M gehörigen Radiusvectors zur halben grossen Axe einer Planetenbahn wird einfach durch dasjenige der Ordinate P_1K zum Halbmesser r angegeben. Denn aus der Figur ist ersichtlich, dass:

$$y = KP_1 = r - re \cos E = r(1 - e \cos E), \quad (1)$$

und bekanntlich ist $\rho = a(1 - e \cos E)$.

Deshalb finden wir sogleich:

$$\frac{Q}{a} = \frac{y}{r}.$$

III. Auch die wahre Anomalie ist nicht schwierig zu construiren. In der Figur ist $M_1 O_1 = r$, $O_1 B$ senkrecht auf $M_1 F$; wenn nun um A , den Durchschnittspunkt von PW^1 mit $M_1 F$, ein Kreis mit dem Halbmesser $AB = P_1 K$ gezogen wird, welcher die Horizontallinie $O_1 BRS$ in B durchschneidet, so ist BAF die wahre Anomalie φ .

Dieser Satz bedarf keines Beweises; die Fig. $M_1 O_1 BA$ spricht für sich selbst. ²⁾

Schwerlich wird eine der bis jetzt bekannten Methoden mit derselben Leichtigkeit und Präcision die drei Grössen E , ρ und v liefern können.³⁾

Auch habe ich über eine Construction der zweiten Grösse nichts finden können; für v giebt im Bulletin Astr. XI. 289 sqq. Radau ein graphisches Verfahren an.

Zwei augenscheinlich sehr wichtigen Einwendungen, welche unserer Methode in den Weg geworfen werden könnten, wollen wir hier gleich unter die Augen treten. Es wurde nämlich ein Kreis und eine für jedes ϵ sich anders gestaltende Cykloide verwendet. Scheinbar ist die Methode mittelst einer einzigen Sinusoide und einer veränderlichen Geraden der unsrigen gegenüber sehr im Vortheil. Man könnte auch noch darauf hindeuten, dass für Punkte in der Nähe von G der Durchschnittspunkt des Kreises mit M_0M nur mit beträchtlichem Fehler zu bestimmen wäre.

Hierzu bemerken wir erstens, dass man es in seiner Gewalt hat, den Kreis wegfallen zu lassen.

Man könnte sich begnügen, die Ordinate zu messen und zur Berechnung von E die Formel (1) zu benutzen.

Um $\frac{y}{r}$ mit einem Blick aus der Figur herauslesen zu können,

sollte VH oder OQ mit einer Eintheilung mit r als Einheit versehen werden. Auch könnte man die Beziehung $KF = er \sin E$ zur Berechnung von E verwenden.

Bemerkung. Der Ausdruck $1 - e \cos E = \frac{y}{r}$ ist gerade der Nenner der bekannten Differentialnährungsformel:

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}.$$

Für eine nachherige Annäherungsrechnung ist der Umstand, dass ein sehr angenäherter Werth dieses Nenners gleich bekannt ist, ein wichtiger Vortheil.

Mechanische Darstellung der Cykloiden.

Hinsichtlich der Cykloiden wollen wir zweitens hervorheben, dass dieselben zu den mechanisch sehr leicht und sehr genau darzustellenden Curven gehören. Die Technik unserer Zeit liefert uns leicht einen so zu sagen tadellosen Cylinder von bedeutendem Halbmesser mit einer graden Rinne versehen, in welcher an beliebiger Stelle ein feiner Stift, mit einem Metallkörperchen verbunden, eingeklemmt werden kann. Am Rande der Rinne denken wir eine genügend feine Eintheilung des Halbmessers eingeschnitten;

¹⁾ Diese Gerade könnte man die »excentrische Linie« nennen.

²⁾ Die Construction könnte auch irgendwo anders, z. B. in der Figur $MRSW$ vorgenommen werden.

^{a)} Auch aus der Formel $\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{b}{a-e} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$ würde eine Construction für v hergeleitet werden können; wir werden darauf nicht weiter eingehen. Die Construction von v hat wenig praktischen Nutzen.

wenn dann am dazu gehörigen Rande des Metallkörperchens (unter welchem sich der Stift mit der Zeichenfläche in Berührung befindet) ein Nonius angebracht ist, wird man im Stande sein, den Stift mit grosser Präcision auf ein bestimmtes e zu fixiren. Ist dies einmal geschehen, so soll der Cylinder, ohne zu gleiten, über ein festes Lineal L_1 hinwegrollen. Diese Bewegung bringt man am besten zu Stande, wenn man ein zweites Lineal L_2 unter einem gewissen Drucke an den Cylinder anstempft und zu gleicher Zeit in mit L_1 paralleler Richtung fortbewegt.

Bemerkung. Der Stift muss selbstverständlich immer um eine kleine Strecke aus der Unterfläche des Cylinders hinausragen; um der dadurch bedingten Fehlerhaftigkeit der Curve (welche besonders an den Endpunkten hervortreten würde) vorzubeugen, soll man an der Unterfläche zwei nicht zugespitzte Unterstützungspunkte anbringen, mit welchen die scharfe Spitze des Stifts eine zur Grundfläche des Cylinders parallele Ebene bilden soll. Natürlich werden solche Fürsorgen nur dann erforderlich sein, wenn man sich ein für alle Mal für ein bestimmtes Object in den Besitz einer sehr angenäherten graphischen Tafel stellen will. Für gewöhnliche Fälle, z. B. für Zeichnungen mit Bleistift auf Millimeterpapier dürfte man schon etwas roher verfahren.

Hat man einmal auf Millimeterpapier die Curve gezeichnet, so ist man, ohne weiter eine einzige Linie zu ziehen, nicht nur im Besitze von E und φ , sondern auch im Stande sich den Luxus zu erlauben, allerhand andere, für nachherige Rechnung nützliche Grössen, $e \cos E$, $1 - e \cos E$, $e \sin E$ u. s. w. zu messen. (Bei der Sinusoide hätte man für jedes M noch wieder eine Gerade mit gegebenem Neigungswinkel zu ziehen).

Präcisionsgrad. Die Zeichnung soll selbstverständlich einerseits in nicht zu kleinem, aber andererseits in nicht zu unbequemem Maassstabe angefertigt werden. Hierzu bemerken wir, dass man, weil Anomalien über 180° ausgeschlossen werden können, nur die zwei ersten Quadranten der Curve zu verwenden hat und auch diese wieder einzeln darstellen

Utrecht, 1901 April.

Zur Bearbeitung der photometrischen Beobachtungen des Planeten Eros.

Die zahlreichen photometrischen Beobachtungsergebnisse der vergangenen Erosopposition erfordern, wenn eine aussichtsreiche Discussion der Resultate, ferner ein planmässiges Vorgehen bei der nächsten Opposition ermöglicht werden soll, eine einheitliche Bearbeitung, die nicht nur die Zeit der Maxima und Minima, sondern auch die Form der Lichtcurve feststellen soll. Hierzu ist es unerlässlich, dass die zahlreichen benutzten Vergleichsterne auf ein vollständig homogenes System gebracht werden. Zu diesem Zwecke beabsichtige ich die Grössen derselben an einem optisch genügend starken Instrument durchzubestimmen und richte daher an die Beobachter die Bitte, mir das direct erhaltene Material vollständig freundlichst zur Verfügung stellen

kann. Wenn jedem Quadranten die Breite eines Bogens Millimeterpapiers gestattet wird, glauben wir eine Präcision von wenigstens $3'$ versprechen zu dürfen.

Synoptische Tafel für das ganze Planetensystem.

Wegen der leichten Darstellbarkeit der Cykloiden wird sofort jedem die Möglichkeit einleuchten, ein ganzes System solcher Curven auf einem Blatte zu construiren; dieselben sollten nach den e und zwar mit einer Differenz von 0.01 oder 0.02 (das letzte ist sehr leicht zu verwirklichen) angeordnet werden. Die stetige Durchschneidung der Curven und den dadurch bedingten verwirrenden Anblick einer einhüllenden Curve vermeidet man leicht durch parallele Verschiebung der Grundlinie. Wenn man bei einer gewissen Zunahme der e die Grundlinie um denselben Betrag nach unten versetzte, würden alle Curven sich im Scheitel der reinen Cykloide durchschneiden; bei einer doppelt so grossen Herabsetzung der Grundlinie würden die Scheitel sich gerade mit einer Niveaudifferenz $= e$ anordnen u. s. w.

Wie man es bei solcher Verschiebung der Grundlinie doch noch bei einer einzigen verticalen Eintheilung bewenden lassen kann, und wie man für ein gewisses δe zwischen zwei Stufen der Scale eine Correction zu y oder E bestimmt, wird der Leser sich leicht denken können; nur glauben wir wieder betonen zu müssen, dass in der sehr leicht herzuleitenden Correction für E :

$$\Delta E = \frac{\sin E_1}{1 - e \cos E_1} \delta e,$$

Zähler und Nenner des Bruches wieder leicht aus der Tafel zu entnehmen sind.

Wir schliessen mit der Bemerkung, dass eine synoptische Tafel mit der Sinusoide praktisch unmöglich einzurichten wäre, und eine Tafel nach Radau (Bull. Astr. I. 382) wohl nicht leicht eine eben so grosse Präcision und eine eben so leichte Interpolation gewähren würde.

B. Gonggrijp.

zu wollen, womöglich unter Beigabe einer Skizze der betreffenden Sterngegend, um jede Verwechslung auszuschliessen.

Die Reihe der Bonner ¹⁾ und vor allen der Lyoner Sternwarte, welche letztere Herrn Luizet in Stand setzte, das wichtige Resultat einer Doppelserie der Maxima und Minima abzuleiten, ²⁾ lassen eine aussichtsreiche Discussion erhoffen, wenn gleich solche Resultate, wie sie Herr Ristenpart ³⁾ erhofft, nie zu erzielen sind. Auch möchte ich betonen, dass die Lichtcurven nicht durch Albedounterschiede (eine »Landkarte«), sondern durch die Veränderlichkeit der Ausdehnung der sich darbietenden beleuchteten Fläche hervorgerufen werden. Die Grösse der Amplitude, die eine Helligkeitsschwankung von nahe einer Grössenklasse $=$ etwa 150%

¹⁾ Deichmüller, Astr. Nachr. Bd. 154, S. 313, 391; 1901.

²⁾ Luizet, C. R. Tome CXXXII pag. 531; 1901.

³⁾ Ristenpart, Astr. Nachr. Bd. 155, S. 129; 1901.