

Auswertung einiger bestimmter Integrale mit Anwendung des freien Integrationsweges.

Von G. Huber in Bern.

Bekanntlich lassen sich manche zwischen reellen Grenzen genommene bestimmte Integrale, welche der direkten Berechnung unzugänglich sind, auf verhältnismäßig einfache Weise auswerten durch Transformation und passende Veränderung des Integrationsweges. Diese Veränderung des Weges stützt sich auf die Sätze über Integrale, welche sich über die Begrenzungskurven von vollständig begrenzten Flächenstücken erstrecken. Diese Methode soll zur Bestimmung des folgenden bestimmten Integrals angewendet werden:

$$(1) \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \sin \varphi}{a - b \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \cos \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

wo a und b positive reelle Zahlen bedeuten, welches Integral nicht auf direktem Wege ermittelt werden kann.

Wir substituieren $\sin^2 \varphi = u$, wo $u < 1$, $d\varphi = \frac{du}{2\sqrt{u(1-u)}}$,
 $\text{Log} \sin \varphi = \frac{1}{2} \text{Log} \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \text{Log} u$, dann geht das Integral über in

$$(2) \quad J = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\text{Log} u \cdot du}{(a - bu) \sqrt{u(1-u)}} = -\frac{1}{4b} \int_0^1 \frac{\text{Log} u \cdot du}{(u - \alpha) \sqrt{u(1-u)}},$$

wo $\alpha = \frac{a}{b}$ positiv ist. Das Integral besitzt die Unstetigkeitspole $u = 0, 1$ und α , und zwar sind 0 und 1 Verzweigungspunkte, während α ein außerwesentlicher Unstetigkeitspunkt ist. Der unendlich ferne Punkt, $u = \infty$, ist kein Unendlichkeitspunkt, denn in ihm ist $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} u}{(u - \alpha) \sqrt{u(1-u)}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} u}{u^2} = 0$.

Bei der Ausführung der Integration sind fünf Fälle zu unterscheiden: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, $\alpha = 0$, und $\alpha = \text{negativ}$, welche der Reihe nach betrachtet werden sollen.

I. $\alpha > 1$, also $a > b$.

Der Punkt α liegt auf der positiven Realitätsachse, rechts vom Punkte $+1$.

Wir betrachten nun das Integral $V = \int \frac{\text{Log } u}{(u - \alpha) \sqrt{u(u-1)}} \cdot du$ auf einem Schlingenwege, welcher vom Nullpunkt O aus den Punkt $u = 1$ rechläufig umgibt und nach O zurückkehrt. (Fig. 1.) Der



Fig. 1.

Punkt A , in welchem diese Schlinge rechts vom Punkte 1 die Realitätsachse schneidet, sei Erkennungsort, in diesem sei $\sqrt{u(u-1)}$ positiv. Die Schlinge kann unendlich nahe an die Realitätsachse gerückt werden, wobei der Punkt 1 in einem beliebig kleinen Kreise in positiver Richtung umlaufen wird. (Fig. 2.) Das Schlingen-

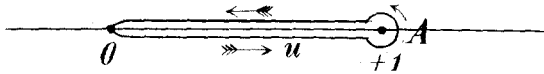


Fig. 2.

integral zerfällt nun in drei Teile: 1. geradlinig von 0 bis 1, unterhalb der Realitätsachse; 2. rechläufig auf dem kleinen Kreise um den Punkt 1; 3. geradlinig zurück von 1 bis 0 auf dem oberen Rand der Realitätsachse. Um vom Erkennungsort A auf den Hinweg $(0, 1)$ zu gelangen, muß die Variable den Pol 1 in einem Halbkreis rückläufig umgehen, $\sqrt{u(u-1)}$ erhält also den Faktor $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$ und wird auf dem Hinwege zu $-i\sqrt{u(1-u)}$; auf dem Rückwege $(1, 0)$ wird sie zu $+i\sqrt{u(1-u)}$. Die übrigen Faktoren des Integranden bleiben bei der Umkreisung des Punktes 1 un geändert. Es wird also das Schlingenintegral:

$$V = \int_0^1 \frac{\text{Log } u}{(u - \alpha) (-i \sqrt{u(1-u)})} \cdot du + \int_{(1)}^0 \frac{\text{Log } u}{(u - \alpha) i \sqrt{u(1-u)}} \cdot du.$$

Bei der Integration auf dem unendlich kleinen Kreis um den Punkt 1 kommt vom Integranden nur der Ausdruck $\frac{\text{Log } u}{\sqrt{1-u}}$ in Betracht, weil aber $\lim_{u=1} \frac{\text{Log } u}{\sqrt{1-u}} = 0$ ist, so ist der Integrand auf dem ganzen Kreiswege Null, also das Kreisintegral selbst gleich Null. Kehrt man die Grenzen des dritten Integrals um, so wird es gleich dem ersten, somit wird das Schlingenintegral:

$$(3) \quad V = 2i \int_0^1 \frac{\text{Log } u}{(u-\alpha) \sqrt{u(1-u)}} du$$

Nach Gleichung (2) ist aber das Integral $= -4bJ$, also $V = -8ibJ$, folglich

$$(4) \quad J = -\frac{1}{8ib} V = -\frac{1}{8ib} \int_{(0, \frac{1}{2})} \frac{\text{Log } u}{(u-\alpha) \sqrt{u(u-1)}} du.$$

Wir bestimmen nun den Wert des Integrals V auf einem kleinen Kreise, der den außerwesentlichen Unstetigkeitspunkt $u = \alpha$ rechtwinklig umgibt und finden nach dem Satz von Cauchy:

$$\int_{(\alpha)} \frac{\text{Log } u}{\sqrt{u(u-1)}} \cdot \frac{du}{u-\alpha} = 2i\pi \frac{\text{Log } \alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}.$$

Beiderseits mit $-8ib$ dividiert:

$$(5) \quad -\frac{\pi}{4b} \cdot \frac{\text{Log } \alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} = -\frac{1}{8ib} \int_{(\alpha)} \frac{\text{Log } u}{\sqrt{u(u-1)}} \cdot \frac{du}{u-\alpha}.$$

In Gleichung (4) addieren wir links zu J den Wert dieses Integrals, rechts das Integral selbst, und zwar können wir den Kreisweg um α mit dem Schlingenweg $(0, 1)$ durch zwei geradlinige Strecken vereinigen, die oberhalb und unterhalb der Realitätsachse und dieser unendlich benachbart verlaufen. (Fig. 3.) Weil nämlich

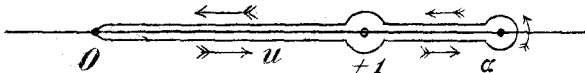


Fig. 3.

$\text{Log } u$ und $\sqrt{u(u-1)}$ bei der Umkreisung des Punktes α un geändert bleiben, so heben sich die Integrale über die geradlinigen Strecken $(1, \alpha)$ und $(\alpha, 1)$ weg. Der Integrationsweg ist nun eine

Schlinge, die vom Nullpunkt aus die Pole 1 und α rechteckig umgibt; also:

$$(6) \quad J - \frac{\pi}{4b} \frac{\text{Log } \alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} = - \frac{1}{8ib} \int_{(0,1,\alpha)} \frac{\text{Log } u}{(u-\alpha)\sqrt{u(u-1)}} \cdot du.$$

Dieser Integrationsweg ist ein vollständig geschlossener, außerhalb desselben besitzt die zu integrierende Funktion keine Unstetigkeitspunkte mehr, sie ist endlich und stetig. Man kann daher den Integrationsweg nach allen Seiten bis an den unendlich fernen Horizont erweitern, indem man mit der Variablen u vom Nullpunkt aus auf der Südseite (unterhalb) der negativen Realitätsachse bis zum unendlich fernen Westpunkt $W(-\infty)$ geht, dann im positiven Sinne den ganzen unendlich fernen Horizont, d. h. einen um den Nullpunkt mit unendlich großem Radius beschriebenen Kreis umläuft, zurück zum Westpunkt W und von diesem aus nördlich (oberhalb) der negativen Realitätsachse zum Nullpunkt zurückkehrt. (Fig. 4.) Der Weg ist ein geschlossener, das Integral auf demselben ist gleich dem Integral auf dem Schlingenweg $(0, 1, \alpha)$. Wir wollen nun den Wert des Integrals auf diesem neuen Wege bestimmen.

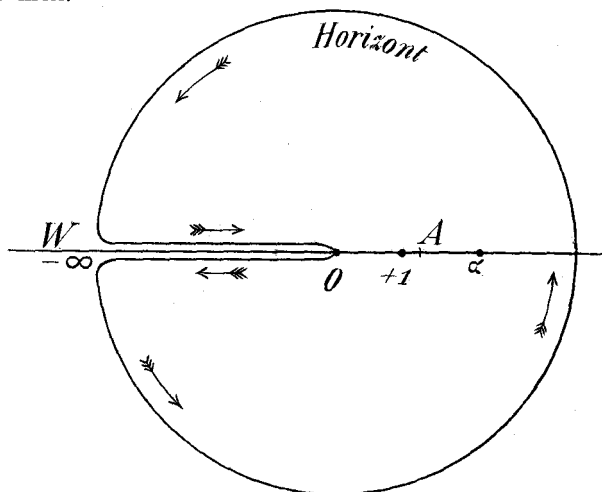


Fig. 4.

Längs des ganzen Horizonts ist u beständig unendlich groß, daher reduziert sich das Integral auf ihm auf

$$\int \frac{\text{Log } u}{u} du = \left[-\frac{\text{Log } u}{u} - \frac{1}{u} \right]_{u=\infty} = \lim_{u=\infty} \frac{\text{Log } u}{u} = 0,$$

d. h. längs des ganzen Horizonts ist das Integral Null. Es bleiben daher nur noch die beiden geradlinigen Integrale von 0 bis zum Westpunkt W und von diesem nach Null zurück übrig. Auf beiden Wegen ist u beständig reell und negativ, wir setzen daher $u = -v$, also $du = -dv$, wo v reell, positiv und von 0 bis ∞ , bezüglich von ∞ bis 0 geht. Auf dem Hinwege ist $\text{Log } u = \text{Log } (-v) = \text{Log } v - i\pi$ und auf dem Rückwege ist $\text{Log } u = \text{Log } v + i\pi$. Um vom Erkennungsort A auf den Hinweg OW zu gelangen, muß man mit $\sqrt{u(u-1)}$ die beiden Verzweigungspunkte 1 und 0 in negativen Halbkreisen umgehen; die Quadratwurzel erhält jedesmal den Faktor $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$, also im Ganzen den Faktor $(-i)^2 = -1$, somit ist die Quadratwurzel auf dem Hinwege negativ, $= -\sqrt{v(v+1)}$ und dasselbe ist der Fall auf dem Rückwege WO . Der Faktor $u - \alpha$ kommt auf dem ganzen Wege nicht in Betracht. Das Schlingenintegral wird daher auf diesem erweiterten Wege:

$$\begin{aligned}
 \int_{(0, 1, \alpha)} \frac{\text{Log } u}{(u - \alpha) \sqrt{u(u-1)}} du &= \int_0^\infty \frac{(\text{Log } v - i\pi) dv}{(v + \alpha) (-\sqrt{v(v+1)})} + \int_\infty^0 \frac{(\text{Log } v + i\pi) dv}{(v + \alpha) (-\sqrt{v(v+1)})} \\
 &= 2i\pi \int_0^\infty \frac{dv}{(v + \alpha) \sqrt{v(v+1)}}, \text{ wo } \alpha \text{ positiv } > 1 \text{ ist.} \\
 &= \frac{-2i\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \left[\text{Log} \left(\frac{-\alpha + (1-2\alpha)v + 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}\sqrt{v(v+1)}}{2(v+\alpha)} \right) \right]_0^\infty \\
 &= \frac{-2i\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \left\{ \text{Log} \frac{1-2\alpha+2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}{2} - \text{Log} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\
 &= \frac{-2i\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log} (2\alpha - 1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}).
 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert des Schlingenintegrals in der Gleichung (6) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 J - \frac{\pi}{4b} \frac{\text{Log } \alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} &= \frac{\pi}{4b\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log} (2\alpha - 1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}) \\
 (7) \quad J &= \frac{\pi}{4b\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log } \alpha (2\alpha - 1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)})
 \end{aligned}$$

Weil $\alpha > 1$, so ist der Wert des Integrals reell. Setzt man wieder $\alpha = \frac{a}{b}$, so wird der Wert des gesuchten Integrals:

$$(8) \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \sin \varphi}{a - b \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \cos \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{4 \sqrt{a(a-b)}} \text{Log} \frac{a}{b^2} \left(2a - b - 2 \sqrt{a(a-b)} \right)$$

$$(9) \quad = \frac{-\pi}{4 \sqrt{a(a-b)}} \text{Log} \left(\frac{2a - b + 2 \sqrt{a(a-b)}}{a} \right),$$

wobei $a > b$ ist. Als Spezialfälle seien folgende erwähnt:

1. Für $a = 1$, $b = 0$, welcher Fall dem Wert $\alpha = \infty$ entspricht, wird das Integral:

$$(10) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \cos \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{Log} 2,$$

wie man auf anderem Wege direkt findet.

2. Für $a = 2$, $b = 1$:

$$(11) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \sin \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{-\pi}{4 \sqrt{2}} \text{Log} \left(\frac{3 + 2 \sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{2 \sqrt{2}} \text{Log} (2 - \sqrt{2}).$$

3. Für $a = 3$, $b = 2$:

$$(12) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \sin \varphi}{1 + 2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \cos \varphi}{1 + 2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4 \sqrt{3}} \text{Log} \frac{3}{2} (2 - \sqrt{3})$$

II. $\alpha = 1$, also $a = b = 1$.

Der Pol α fällt mit dem Verzweigungspunkt $u = 1$ zusammen und das Kreisintegral um den Pol $\alpha = 1$ ist, wie früher gesehen, $= 0$; in der Tat ist auch sein Wert $2i\pi \lim_{\alpha=1} \frac{\text{Log } \alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} = 0$. Die Gleichung (6) reduziert sich daher auf:

$$\begin{aligned} J &= \frac{-1}{8i} \int \frac{\text{Log } u}{(u-1)\sqrt{u(u-1)}} du = \\ &= \frac{-\pi}{4} \int_0^\infty \frac{dv}{(v+1)\sqrt{v(v+1)}} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\sqrt{v(v+1)}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)(v+1)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{-\pi}{2} \left[\sqrt{\frac{v}{v+1}} \right]_0^\infty = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

also:

$$(13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Dieser Wert folgt auch aus Formel (9) für $\lim a = b = 1$, so daß die Formeln (8) und (9) auch für $a = b$ gültig sind.

Durch direkte Integration findet man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log } \sin \varphi d \tan \varphi = \left[\tan \varphi \cdot \text{Log } \sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.$$

Nun nimmt $\tan \varphi \text{Log } \sin \varphi$ für beide Grenzen den unbestimmten Wert $0 \cdot \infty$ an, der wahre Wert des Ausdrucks ist

$\left[-\sin \varphi \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, während das letzte Integral $= -\frac{\pi}{2}$ ist; der Wert des vorgelegten Integrals ist also derselbe wie oben.

III. $0 < \alpha < 1$, also $a < b$.

Der Pol α liegt auf der Realitätsaxe zwischen den Integrationsgrenzen 0 und 1 des Integrals (2). Der Nenner $u - \alpha$ des Integranden wird in $u = \alpha$ zu Null, der Wert der zu integrierenden Funktion unendlich groß, daher das Integral unzulässig.

IV. $\alpha = 0$, also auch $a = 0$.

Der Pol α liegt im Verzweigungspunkt $u = 0$. Das Kreisintegral um diesen Punkt, dessen Wert wir $= 2i\pi \frac{\text{Log } \alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}$ fanden, wird unendlich groß, also der Wert des Integrals selbst unendlich groß:

$$(14) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \sin \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \infty.$$

V. $\alpha = \text{negativ}$, also b negativ.

Der Pol α liegt auf der negativen reellen Achse. Das Integral heißt:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \sin \varphi}{a + b \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \cos \varphi}{a + b \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

wo a und b beliebige positive Zahlen bedeuten. Substituiert man wieder $u = \sin^2 \varphi$ und $\frac{a}{b} = \alpha$, so geht das Integral über in:

$$J = \frac{1}{4b} \int_0^1 \frac{\text{Log } u}{(u + \alpha) \sqrt{u(1-u)}} du.$$

Das Integral $V = \int \frac{\text{Log } u du}{(u + \alpha) \sqrt{u(u-1)}}$ auf dem früher betrachteten Schlingenweg von 0 aus um den Pol 1 hat wieder den Wert

$$V = 2i \int_0^1 \frac{\text{Log } u du}{(u + \alpha) \sqrt{u(1-u)}} = 8ibJ,$$

also

$$(15) \quad J = \frac{1}{8ib} V = \frac{1}{8ib} \int \frac{\text{Log } u du}{(u + \alpha) \sqrt{u(u-1)}}.$$

Wir bestimmen nun den Wert des Integrals V rechtläufig auf einem kleinen Kreise um den Pol $u = -\alpha$. Im Ausgangspunkt

auf der negativen reellen Achse hat $\sqrt{u(u-1)}$, wie gesehen, das negative Vorzeichen, also ist nach dem Satz von Cauchy:

$$\int_{(-\alpha)}^{\infty} \frac{\text{Log } u}{\sqrt{u(u-1)}} \cdot \frac{du}{u+\alpha} = -\frac{2i\pi \text{Log}(-\alpha)}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}}, \text{ mit } 8ib \text{ dividiert:}$$

$$\frac{-\pi \text{Log}(-\alpha)}{4b \sqrt{\alpha(\alpha+1)}} = \frac{1}{8ib} \int \frac{\text{Log } u}{\sqrt{u(u-1)}} \cdot \frac{du}{u+\alpha}.$$

In Gleichung (15) addieren wir links zu J den Wert dieses Integrals, rechts das Integral selbst, und zwar können wir den Kreisweg um $(-\alpha)$ mit dem Schlingenweg $(0, 1)$ durch zwei geradlinige Strecken vereinigen, die oberhalb und unterhalb der Realitätsachse, dieser unendlich benachbart zwischen $(-\alpha)$ und 0 verlaufen, wobei wir den Nullpunkt, als Verzweigungspunkt, oberhalb der Realitätsachse in einem unendlich kleinen Halbkreis umgehen (Fig. 5). Die beiden geradlinigen Integrale zwischen $(-\alpha)$ und 0



Fig. 5.

heben sich weg, da $\text{Log } u$ und $\sqrt{u(u-1)}$ bei der Umkreisung des Pols $(-\alpha)$ ungeändert bleiben. Bei der Integration auf dem unendlich kleinen Halbkreis um den Nullpunkt kommt von dem Integranden nur der Ausdruck $\frac{\text{Log } u}{\sqrt{u}}$ in Betracht. Setzt man $u = re^{i\varphi}$, $du = ire^{i\varphi} d\varphi$, wo r konstant ist, so wird auf diesem Halbkreis:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\text{Log } u}{\sqrt{u}} du &= ir^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi (\text{Log } r + i\varphi) e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi = ir^{\frac{1}{2}} \text{Log } r \int_0^\pi e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi - r^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi \varphi e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi \\ &= ir^{\frac{1}{2}} \text{Log } r \left[\frac{2}{i} e^{\frac{i\varphi}{2}} \right]_0^\pi + 2ir^{\frac{1}{2}} \left[\varphi e^{\frac{i\varphi}{2}} - \frac{2}{i} e^{\frac{i\varphi}{2}} \right]_0^\pi \\ &= 2(i-1)r^{\frac{1}{2}} \text{Log } r + 2ir^{\frac{1}{2}}(i\pi - 2 - 2i). \end{aligned}$$

Bei verschwindend kleinem r wird $\lim_{r=0} r^{\frac{1}{2}} \text{Log } r = 0$, also das Integral auf dem Halbkreis um 0 selber gleich Null.

Der Integrationsweg wird nun eine Schlinge, welche vom Nullpunkt aus die Punkte $+1$ und $(-\alpha)$ rechtläufig umgibt und wir erhalten:

$$J - \frac{\pi}{4b} \frac{\text{Log}(-\alpha)}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} = \frac{1}{8ib} \int_{(-\alpha, 01)} \frac{\text{Log } u \cdot du}{(u+\alpha)\sqrt{u(u-1)}} = \frac{1}{8ib} U,$$

also

$$(16) \quad J = \frac{\pi}{4b} \frac{\text{Log}(-\alpha)}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} + \frac{1}{8ib} U.$$

Es handelt sich nun um die Bestimmung des Integrals U .

Weil die zu integrierende Funktion außer 0, 1 und $-\alpha$ keine weiteren Unstetigkeitspunkte mehr besitzt, so ist der Integrationsweg in U ein vollständig geschlossener, außerhalb desselben ist die Funktion endlich und stetig. Man kann daher den Integrationsweg wieder nach allen Seiten bis an den unendlich fernen Horizont erweitern,

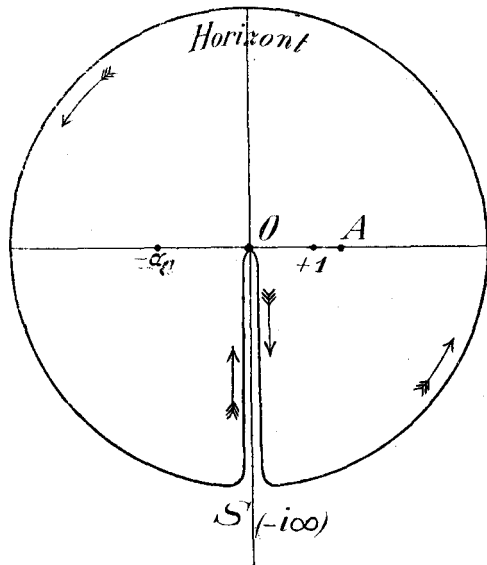


Fig. 6.

indem man mit der Variablen u vom Nullpunkt aus auf der rechten Seite der negativen imaginären Achse bis zum unendlich fernen Südpunkt $S(-i\infty)$ geht, dann rechtläufig den ganzen unendlich fernen Horizont nach S zurück umläuft und von diesem aus auf der linken Seite der negativen imaginären Achse zum Nullpunkt zurückkehrt (Fig. 6). Der Weg ist ein geschlossener und das Integral auf demselben ist gleich dem Schlingenintegral U .

Weil das Integral längs des Horizonts, wie im Falle I, gleich Null ist, so bleiben noch die beiden geradlinigen Integrale von 0 bis S und von S bis 0 übrig. Auf beiden Wegen ist u stets negativ imaginär, wir setzen daher $u = -iv$, $du = -i dv$, wo v reell und positiv und von 0 bis ∞ oder umgekehrt geht. Im Ausgangspunkt O , auf dem Hinweg OS , hat, wie früher gesehen, $\sqrt{u(u-1)}$ das negative Vorzeichen, somit ist auf dem Hinwege $\sqrt{u(u-1)} = -\sqrt{-vi(-iv-1)} = -\sqrt{vi-v^2}$. Bei der Umkreisung des Horizonts kehrt $\sqrt{u(u-1)}$ zu ihrem Ausgangswert zurück, sie hat daher auf dem Rückwege SO denselben Wert, wie auf dem Hinwege. Auf dem Hinwege OS ist $\text{Log } u = \text{Log } (-iv) = \text{Log } v - \frac{i\pi}{2}$; bei der Umkreisung des Horizonts nimmt die Phase von u um 2π zu, somit ist auf dem Rückwege $\text{Log } u = \left(\text{Log } v - \frac{i\pi}{2}\right) + 2i\pi = \text{Log } v + \frac{3i\pi}{2}$. Das Schleifenintegral U wird also:

$$\begin{aligned}
 U &= -i \int_0^{\infty} \frac{\left(\text{Log } v - \frac{i\pi}{2}\right) dv}{(-iv + \alpha)(-\sqrt{vi-v^2})} - i \int_{\infty}^0 \frac{\left(\text{Log } v + \frac{3i\pi}{2}\right) dv}{(-iv + \alpha)(-\sqrt{vi-v^2})} \\
 &= - \int_0^{\infty} \frac{\left(\text{Log } v - \frac{i\pi}{2}\right) dv}{(v + i\alpha)\sqrt{vi-v^2}} + \int_0^{\infty} \frac{\left(\text{Log } v + \frac{3i\pi}{2}\right) dv}{(v + i\alpha)\sqrt{vi-v^2}} \\
 &= 2i\pi \int_0^{\infty} \frac{dv}{(v + i\alpha)\sqrt{vi-v^2}} = \frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \left[\text{Log} \left(\frac{\alpha + i(2\alpha+1)v - 2\sqrt{\alpha(\alpha+1)}\sqrt{vi-v^2}}{2(v + i\alpha)} \right) \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \left\{ \text{Log} \frac{i}{2} (2\alpha+1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha+1)}) - \text{Log} \left(-\frac{i}{2} \right) \right\} \\
 &= \frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \text{Log} (2\sqrt{\alpha(\alpha+1)} - (2\alpha+1)).
 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert von U in der Gleichung (16) ein und vereinigt beide Logarithmen, so ergibt sich das gesuchte Integral J :

$$J = \frac{\pi}{4b\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \text{Log } \alpha (2\alpha+1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha+1)}).$$

Ersetzt man α wieder durch seinen Wert, $\alpha = \frac{a}{b}$, so ergibt sich:

$$(17) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{a + b \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{a + b \cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$(18) \quad = \frac{\pi}{4 \sqrt{a(a+b)}} \text{Log } \frac{a}{b^2} (2a + b - 2 \sqrt{a(a+b)})$$

$$= \frac{-\pi}{4 \sqrt{a(a+b)}} \text{Log } \frac{1}{a} (2a + b + 2 \sqrt{a(a+b)}).$$

Diese Integralformel gilt für jeden positiven Wert von a und b ; sie geht aus den Formeln (8) und (9) des Falles I hervor, wenn in denselben b durch $-b$ ersetzt wird, d. h. die Formeln (8) und (9) gelten nicht bloß für positive a und b , wenn $a \geq b$, sondern auch für beliebige negative Werte von b , wenn a positiv ist.

Von den Spezialfällen des obigen Integrals wollen wir folgende erwähnen:

1. Für $a = 1$ wird:

$$(19) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi \cdot d\varphi}{1 + b \sin^2 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi \cdot d\varphi}{1 + b \cos^2 \varphi} =$$

$$= \frac{-\pi}{4 \sqrt{b+1}} \text{Log } (2 + b + 2 \sqrt{b+1}).$$

2. Für $b = 1$ und $b = 2$ folgen aus diesem:

$$(20) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{-\pi}{2 \sqrt{2}} \text{Log } (1 + \sqrt{2})$$

$$(21) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{1 + 2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{1 + 2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{-\pi}{4 \sqrt{3}} \text{Log } (4 + 2 \sqrt{3}).$$

Subtrahiert man das Integral (20) von (11) und (21) von (12), so findet man:

$$(22) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log tang } \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cotang } \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \text{Log } 2$$

$$(23) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log tang } \varphi}{1 + 2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cotang } \varphi}{1 + 2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \text{Log } 3.$$

Die folgenden Integrale lassen sich sofort auf eines der behandelten Integrale zurückführen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{a + b \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{(a+b) - b \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Weil für positives a und b stets $(a+b) > b$ ist, so gelten die Formeln (8) und (9) des Falles I, wenn in denselben a durch $a+b$ ersetzt wird, also:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{a + b \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{a + b \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ (24) \quad & = \frac{\pi}{4\sqrt{a(a+b)}} \text{Log} \frac{(a+b)}{b^2} (2a+b - 2\sqrt{a(a+b)}) \\ & = \frac{-\pi}{4\sqrt{a(a+b)}} \text{Log} \frac{2a+b + 2\sqrt{a(a+b)}}{a+b}. \end{aligned}$$

Die Formel gilt auch für ein negatives b , so lange $a > b$, wobei die Gleichung (18) des Falles V zur Anwendung kommt, nämlich:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{a - b \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{(a-b) + b \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ (25) \quad & = \frac{-\pi}{4\sqrt{a(a-b)}} \text{Log} \left(\frac{2a-b + 2\sqrt{a(a-b)}}{a-b} \right) \end{aligned}$$

Setzt man in Gleichung (24) $a = 1$, so wird sie:

$$(26) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \sin \varphi}{1+b \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \cos \varphi}{1+b \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{-\pi}{4\sqrt{b+1}} \text{Log} \left(\frac{2+b+2\sqrt{b+1}}{b+1} \right).$$

Subtrahiert man hievon das Integral (19), so ergibt sich:

$$(27) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \tan \varphi}{1+b \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log} \cotg \varphi}{1+b \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{b+1}} \text{Log} (b+1).$$

Für $b = 0$ folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \tan \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \cotg \varphi d\varphi = 0.$$

Durch Differentiation obiger Gleichung nach dem Parameter b folgt:

$$(28) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \text{Log} \tan \varphi}{(1+b \cos^2 \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \text{Log} \cotg \varphi}{(1+b \sin^2 \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8(b+1)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \text{Log} (b+1) - 2 \right\}.$$

Für $b = 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \text{Log} \tan \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Für $b = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \text{Log} \tan \varphi}{(1+\cos^2 \varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi}{16\sqrt{2}} (\text{Log} 2 - 2).$$

Differenziert man Gleichung (28) nochmals nach b , so ergibt sich:

$$(29) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi \text{Log} \tan \varphi}{(1+b \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi \text{Log} \cotg \varphi}{(1+b \sin^2 \varphi)^3} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{16(b+1)^{\frac{5}{2}}} \left\{ 3 \text{Log} (b+1) - 8 \right\}$$

Für $b = 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \operatorname{Log} \tan \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \operatorname{Log} \cotg \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Für $b = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi \operatorname{Log} \tan \varphi \, d\varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^3} = \frac{-\pi}{64\sqrt{2}} (8 - 3 \operatorname{Log} 2).$$

Differentiation unter dem Integralzeichen.

Aus dem Hauptintegral (9) lassen sich beliebig viele neue Integrale ableiten durch Differentiation unter dem Integralzeichen nach den Parametern a und b . Differenziert man Gleichung (9) beiderseits nach a und vereinfacht, so ergibt sich:

$$(30) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \sin \varphi}{(a - b \sin^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \frac{\pi}{8(a^2 - ab)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 2\sqrt{a(a-b)} - 2(a-b) - (2a-b) \operatorname{Log} \frac{2a-b+2\sqrt{a(a-b)}}{a} \right\}$$

gültig, wenn a und b positiv und $a \geq b$ ist und für jedes a , wenn b negativ ist.

Für $a = 1$, $b = 1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \cos \varphi}{\sin^4 \varphi} \, d\varphi = \infty.$$

Für $a = 2$, $b = 1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \sin \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \cos \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2} - 1 + 3 \operatorname{Log} (2 - \sqrt{2}) \right\}.$$

Für $a = 1$, $b = -1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \sin \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \cos \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2} - 2 - 3 \operatorname{Log} (1 + \sqrt{2}) \right\}.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Integrale ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log tang } \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log } \cotg \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{16\sqrt{2}} (2 + 3 \text{Log } 2).$$

Differenziert man die Gleichung (30) nochmals nach dem Parameter a , so findet man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{(a - b \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{32 (a^2 - ab)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left\{ 6(2a-b)\sqrt{a(a-b)} - 4(3a-2b)(a-b) - (2(2a-b)^2 + b^2) \text{Log} \cdot \frac{2a-b+2\sqrt{a(a-b)}}{a} \right\}$$

gültig für $a \geq b$ und für jedes positive a , wenn b negativ ist.

Für $a=2$, $b=1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{64\sqrt{2}} \{ 9\sqrt{2} - 8 + 19 \text{Log}(2 - \sqrt{2}) \}.$$

Für $a=1$, $b=-1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log sin } \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cos } \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{64\sqrt{2}} \{ 9\sqrt{2} - 20 - 19 \text{Log}(1 + \sqrt{2}) \}.$$

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log tang } \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log cotg } \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{128\sqrt{2}} (24 + 19 \text{Log } 2).$$

Durch Differentiation der Gleichung (9) nach dem Parameter b erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \text{Log sin } \varphi}{(a - b \sin^2 \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \text{Log cos } \varphi}{(a - b \cos^2 \varphi)^2} d\varphi = \frac{-\pi a}{8b (a^2 - ab)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left\{ 2(a-b) - 2\sqrt{a(a-b)} + b \text{Log} \frac{2a-b+2\sqrt{a(a-b)}}{a} \right\}$$

gültig für $a \geq b$ und für jedes positive a , wenn b negativ ist.

Für $b = 0$ und $a = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi \, d\varphi &= -\frac{\pi}{8} \left\{ 2 \lim_{b=0} \left[\frac{1-b-\sqrt{1-b}}{b} \right] + \operatorname{Log} 4 \right\} \\ &= -\frac{\pi}{8} \left\{ 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \operatorname{Log} 2 \right\} \end{aligned}$$

also:

$$(33) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \operatorname{Log} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{8} (1 - 2 \operatorname{Log} 2)$$

Für $a = 1$, $b = 1$ ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \, d\varphi = \infty.$$

Für $a = 2$, $b = 1$ ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \{ \sqrt{2} - 1 + \operatorname{Log} (2 - \sqrt{2}) \}$$

Für $a = 1$, $b = -1$ ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} \, d\varphi = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \{ 2 - \sqrt{2} - \operatorname{Log} (1 + \sqrt{2}) \}.$$

Für $a = 1$, $b = -2$ ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{\cos^2 2\varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{24\sqrt{3}} \{ 3 - \sqrt{3} - \operatorname{Log} (4 + 2\sqrt{3}) \}.$$

Durch nochmalige Differentiation der Gleichung (32) nach b erhält man das neue Integral:

$$(34) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{(a - b \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi \operatorname{Log} \cos \varphi}{(a - b \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi a^2}{32 b^3 (a^2 - ab)^{\frac{5}{2}}} \\ \left\{ 4(a-2b)(a-b) + 2(5b-2a)\sqrt{a(a-b)} + 3b^2 \operatorname{Log} \frac{2a-b+2\sqrt{a(a-b)}}{a} \right\}.$$

Die Gleichung gilt für $a \geq b$ und für jedes positive a , wenn b negativ ist.

Für $a = 1$ und $b = 0$ ergibt sich, weil

$$\lim_{b=0} \left[\frac{4(a-2b)(a-b) + 2(5b-2a)\sqrt{a(a-b)}}{b^2} \right] = \frac{7}{2} \text{ ist,}$$

$$(35) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \operatorname{Log} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{64} \{7 + 12 \operatorname{Log} 2\}.$$

Subtrahiert man dieses Integral vom Integral (33), so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \operatorname{Log} \cos \varphi d\varphi = \\ = \frac{\pi}{64} (1 - 28 \operatorname{Log} 2).$$

Für $a = 2$ und $b = 1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{16\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 3 \operatorname{Log} (2 - \sqrt{2})).$$

Für $a = 1$ und $b = -1$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{\pi}{64\sqrt{2}} \{12 - 7\sqrt{2} + 3 \operatorname{Log} (1 + \sqrt{2})\}.$$

Für $a = 1$ und $b = -2$ wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi \operatorname{Log} \sin \varphi}{\cos^3 2\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{96\sqrt{3}} \{5 - 2\sqrt{3} + \operatorname{Log} (4 + 2\sqrt{3})\}.$$

Durch weitere Spezialisierung und Differentiation lassen sich noch beliebig viele andere Integrale ableiten.

Das in Gleichung (2) auftretende Integral:

$$S = \int_0^1 \frac{\text{Log } u \cdot du}{(u - \alpha) \sqrt{u(1-u)}},$$

welches aus dem ursprünglichen Integral durch die Substitution $\sin^2 \varphi = u$ entstanden ist, und welches nach (2) und (7) den Wert $-\frac{\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log } \alpha (2\alpha-1-2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log } \frac{1}{\alpha} (2\alpha-1+2\sqrt{\alpha(\alpha-1)})$ hat, läßt sich geometrisch deuten. Dasselbe läßt sich folgenderweise als Doppelintegral schreiben, wobei u durch x ersetzt ist:

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{(x-\alpha) \sqrt{x(1-x)}} \cdot \int_1^x \frac{dy}{y} = \int_0^1 dx \int_1^x \frac{dy}{y(x-\alpha) \sqrt{x(1-x)}}.$$

Setzt man $\frac{1}{y(x-\alpha) \sqrt{x(1-x)}} = z$, also $z^2 y^2 x(x-\alpha)^2 (1-x) = 1$, so stellt diese Gleichung eine Fläche 8. Ordnung dar und das obige Integral:

$$S = \int_0^1 dx \int_1^x z dy = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log } \frac{1}{\alpha} (2\alpha-1+2\sqrt{\alpha(\alpha-1)})$$

stellt das Volumen eines prismatischen Körpers dar, der folgenderweise begrenzt ist: In der (xy) -Ebene zieht man durch O die Achsenwinkelhalbierende

$y=x$, trägt auf der positiven y -Achse $OA=1$ ab, zieht durch A eine Parallele zur x -Achse bis zum Schnitt B mit der

Winkelhalbierenden $y=x$, so entsteht in der xy -Ebene ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck OAB von den Katheten 1. Über diesem Dreieck als

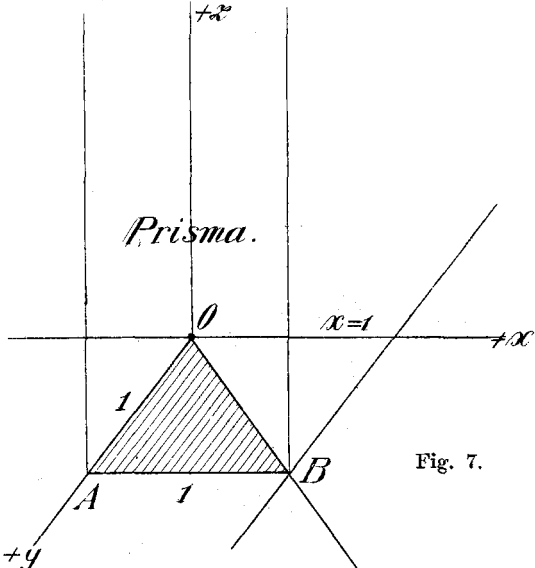


Fig. 7.

Grundfläche errichtet man ein gerades Prisma, dessen eine Kante die z -Achse ist und begrenzt dasselbe oben durch jene Fläche 8. Grades. Der Inhalt dieses so begrenzten Prismas wird durch das Doppelintegral dargestellt und ist $S = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \text{Log } \frac{1}{\alpha} (2\alpha-1+2\sqrt{\alpha(\alpha-1)})$

Die oben eingeführte Fläche 8. Ordnung liegt symmetrisch zur (xy) und (xz) -Ebene und enthält die unendlich ferne Gerade der yz -Ebene als vierfache Gerade. Die Schnittlinie mit einer zur yz -Ebene parallelen Ebene $x=p$ hat die Gleichung:

$$yz = \frac{\pm 1}{(p-\alpha)\sqrt{p(1-p)}}.$$

Die Schnittkurve besteht somit aus zwei konjugiert gleichseitigen Hyperbeln, deren Mittelpunkt auf der x -Achse liegt und deren gemeinschaftlichen Asymptoten die y - und z -Achse der Schnittebene sind. Diese Hyperbeln sind nur reell, wenn p positiv und zwischen 0 und 1 liegt.

Für $p=0$ und $p=1$ fallen die Schnitthyperbeln ganz ins Unendliche, so daß die beiden Ebenen $x=0$ und $x=1$ im Unendlichen mit der Fläche acht Gerade gemein haben, beide sind Asymptotenebenen der Fläche, welche die Fläche längs ihrer vierfachen unendlich fernen Geraden berühren.

Die Ebene $x=\alpha$, wo α positiv >1 oder negativ beliebig groß ist, ist eine isolierte Doppeltangentialebene, welche die Fläche ebenfalls längs der vierfachen unendlich fernen Geraden der yz -Ebene berührt.

Die Fläche liegt ihrer ganzen Ausdehnung nach zwischen den beiden parallelen Asymptotenebenen $x=0$ und $x=1$ und nähert sich denselben nach allen Seiten asymptotisch. Sie besteht aus vier kongruenten, gleichseitig-hyperbolischen Lamellen oder Quadranten.

Die unendlich fernen Geraden der (xy) - und (xz) -Ebene sind isolierte Doppelgeraden und die unendlich fernen Punkte der y - und z -Achse sind sechsfache Punkte der Fläche.

Jeder Schnitt der Fläche mit einer zur (xy) oder (xz) -Ebene parallelen Ebene besteht aus einer Kurve 6. Ordnung zwischen zwei parallelen Inflexionsasymptoten im Abstand 1 von einander und aus der unendlich fernen Geraden der Schnittebene.

Das oben erwähnte, oben durch diese Fläche 8. Ordnung begrenzte, dreiseitige gerade Prisma, welches zur Basis das in der (xy) -Ebene liegende gleichschenklige rechtwinklige Dreieck OAB hat, von welchem zwei Kanten in der Asymptotenebene $x=0$ liegen, nämlich die z -Achse und die Gerade $y=1$ und dessen dritte Kante in der Asymptotenebene $x=1$ liegt, erstreckt sich zu beiden Seiten der im ersten Oktanten liegenden hyperbolischen Flächenlamelle ins Unendliche. Das Volumen dieses Prismas ist endlich:

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \operatorname{Log} \frac{1}{\alpha} (2\alpha - 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}).$$

Für $\alpha=1$ wird das Volumen dieses Prismas $S=2\pi$ und für $\alpha=-1$ wird dasselbe $S = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} (3 - 2\sqrt{2})$.