

um $(2d - l)t$, wenn d die tägliche Aenderung der Entfernung zwischen Sonne und Mond und l die tägliche Bewegung in Länge ist*), noch die Zählung der Anomalien im Epicykel von einem Punkte L eingeführt, dessen Lage durch die Verbindungslinie des Epicykelmittelpunktes C mit einem Punkt N gegeben ist, der in der Apsidenlinie des Deferenten ebensoweit vom Erdorte E entfernt ist, als auf der entgegengesetzten Seite der Deferentenmittelpunkt O . Ist r der Epicykelhalbmesser, $\rho = OE$, $\rho' = EN$, P der Ort des Mondes im Epicykel, D die Elongation Sonne — Mond, A die Anomalie des Mondes, so berechnet

$$\frac{1}{EC} = 1 - \rho \cos 2D$$

$$x = \rho' \sin 2D (1 - \rho \cos 2D) + \frac{1}{2} \rho'^2 \sin 4D = \rho' \sin 2D + \frac{1}{2} \rho' (\rho' - \rho) \sin 4D$$

$$LCP = A + \rho' \sin 2D$$

$$CEP = r (1 - \rho \cos 2D) \sin (A + \rho' \sin 2D) + \frac{1}{2} r^2 \sin 2A = r \sin A + \frac{1}{2} r^2 \sin 2A + I + II$$

$$I = -r\rho \sin A \cos 2D; \quad II = +r\rho' \cos A \sin 2D$$

und wenn $\rho = \rho'$ gesetzt wird, $I + II = +r\rho \sin (2D - A)$.

Die vollständige Evection geht also erst aus der Summe $I + II$ hervor, II ist die »muḥazât« genannte Ungleichheit, welche nur ausserhalb der Quadraturen bemerkbar wird. Da nach Ptolemäus $r = 0.1054$, $\rho = \rho' = 0.2084$ ist, so wird $r\rho = 1^\circ 15' 5''$; nimmt man aber $D = 60^\circ$ oder 120° , wie dies Abul-Wefâ thut, so wird für $A = 0^\circ$ oder 180° (Maximalwerth der Ungleichheit im Gedritt- oder Sextilschein) $II = 38'$, also nahe übereinstimmend mit Abul-Wefâ; der Maximalwerth $1^\circ 15'$ tritt in den Octanten auf. Es scheint

*) Siderisch; bei Ptolemäus ist die Bewegung $2d - b$ gegen den Knoten; und die retrograde Bewegung des Knotens $b - l$.

Wien 1892 März 18.

sich die Reduction vom mittleren auf den wahren Mondort nach den Formeln*)

$$EC = \rho \cos 2D + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 2D}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\rho' \sin 2D}{EC + \rho' \cos 2D}$$

$$LCP = A + x$$

$$\operatorname{tg} CEP = \frac{r \sin LCP}{CE + r \cos LCP}$$

Entwickelt man hier, und behält in den Schlussresultaten Grössen der zweiten Ordnung von ρ , ρ' , r bei, so erhält man

hiernach zum mindesten fraglich, ob Abul-Wefâ mehr von der Mondtheorie kannte als Ptolemäus. Thatsächlich lässt sich ja die Variation durch die in dem arabischen Manuscripte gegebene Einführung eines Punktes, gegen welchen der »Durchmesser des Epicykels« gerichtet ist, nicht erklären, da zu dem Factor $\sin 2D$ der Variation stets der Factor $\cos A$ hinzutritt, oder aber, wenn der Punkt N fest angenommen würde, der zweite Theil der Variation fehlt.

*) S. meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Cometen, I. Theil, pag. 100.

N. Herz.

Zur Auflösung der Normalgleichungen.

Von Dr. N. Herz.

Obzwar die Auflösung der Normalgleichungen nach der Gauss'schen Methode an Einfachheit wohl nichts zu wünschen übrig lässt, so kann man doch, wenn es sich auch um die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten handelt, einen Weg einschlagen, der in der Theorie*) schon lange bekannt, in der Praxis jedoch noch keinen Eingang gefunden zu haben scheint, da eine Abkürzung des üblichen Verfahrens durch dasselbe nicht zu gewärtigen schien. Bei der Auflösung der Normalgleichungen für den Cometen von 1811 schien mir eine unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen aus dem Grunde wünschenswerth, weil sich die Nothwendigkeit herausstellte, einer späteren Ausgleichung vorzuarbeiten, bei welcher sämtliche Normalörter beibehalten werden und nur die absoluten Glieder gewissen Aenderungen unterliegen sollten. Da sich jedoch zeigte, dass bei passender Anwendung des Gauss'schen Algorithmus die Arbeit der Auflösung der Gleichungen selbst nicht

wesentlich grösser, hingegen bei Mitbestimmung der Gewichte vielleicht etwas geringer ist, allerdings wenn die Zahl der Unbekannten nicht grösser als 8 ist, so dürfte sich der Vorgang im Allgemeinen empfehlen.

Sei allgemein ein System von Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \dots &= m_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + \dots &= m_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + \dots &= m_3 \end{aligned} \quad (1)$$

wobei die Bedingung $a_{ik} = a_{ki}$ nicht erfüllt zu sein braucht, und setzt man die Determinante der Coefficienten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \end{vmatrix} = D \quad (2)$$

und das System der Unterdeterminanten D_{ik} und der durch die Determinante D dividirten Unterdeterminanten $D_{ik} : D = A_{ik}$, so bestehen bekanntlich die Beziehungen:

*) S. z. B. die kurzen theoretischen Andeutungen hierüber in »Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler«, pag. 321.

$$\begin{aligned} a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3} + \dots &= 1 \\ a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + a_{i3} A_{k3} + \dots &= 0 \\ a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + a_{3i} A_{3i} + \dots &= 1 \\ a_{1i} A_{1k} + a_{2i} A_{2k} + a_{3i} A_{3k} + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

In Folge dieser Beziehungen wird dann:

$$\begin{aligned} x &= A_{11} m_1 + A_{21} m_2 + A_{31} m_3 + \dots \\ y &= A_{12} m_1 + A_{22} m_2 + A_{32} m_3 + \dots \\ z &= A_{13} m_1 + A_{23} m_2 + A_{33} m_3 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Für den Fall, dass man es mit Normalgleichungen zu thun hat, tritt eine Vereinfachung nur in der Berechnung der theilweise identischen Unterdeterminanten ($A_{ik} = A_{ki}$) ein, nicht aber in der Form der Auflösung. Hingegen haben die Coefficienten der Diagonalreihe eine sehr einfache Bedeutung. Es sind nämlich $A_{11} A_{22} A_{33} \dots$ die reciproken Werthe der Gewichte der $x, y, z \dots$. In der That sind die Gleichungen (3), die hier als Controlgleichungen auftreten, nichts anderes, als die für die Bestimmung der Gauss'schen Q dienenden Gleichungen (Oppolzer, Bahnbestimmungen II, pag. 354; Herr, Astronomie pag. 53). Für die Gewichte $P_x, P_y, P_z \dots$ und die mittleren Fehler $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \dots$ hat man also:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & \dots \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}' & a_{23}' & \dots \\ a_{32}' & a_{33}' & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Bei 8 Unbekannten erhält man daher durch viermalige Anwendung des Gauss'schen Verfahrens die 16 Unterdeterminanten der rechten unteren Ecke; und durch entsprechende Vertauschung von Zeilen und Columnen die 16 Unterdeterminanten der linken oberen und endlich die 16 übrigen Unterdeterminanten. Bei 7 Unbekannten erhält man die A_{ik} der dritten Zeile und Columnne doppelt; bei 6 Unbekannten werden die A_{ik} der dritten und vierten Zeile und Columnne doppelt erhalten, und können einzelne zur

Wien 1892 März 1.

$$P_x = \frac{1}{A_{11}}; P_y = \frac{1}{A_{22}}; P_z = \frac{1}{A_{33}} \dots \quad (5)$$

wobei sich ε aus der Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler ergibt:

$$[p v v] = [n n] - m_1 x - m_2 y - m_3 z - \dots \quad (6)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[p v v]}{r - s}}$$

wenn $[n n]$ die Summe der Fehlerquadrate der Bedingungengleichungen, r die Zahl der letzteren und s die Zahl der Unbekannten ist.

Die Determinanten A_{ik} können nun leicht durch $r - 4$ malige Anwendung des Gauss'schen Algorithmus*) auf die Determinante D und schliessliche Weglassung von passenden Zeilen und Columnen in der übrigbleibenden Determinante vierter Ordnung, auf leicht zu berechnende Determinanten dritter Ordnung gebracht werden. Da nämlich eine Determinante ungeändert bleibt, wenn man eine beliebige Zeile (oder Columnne) mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, und zu einer anderen Zeile (oder Columnne) addirt, so wird die erste Zeile mit $\frac{a_{r1}}{a_{11}}$ multiplicirt, und zur r -ten Zeile (Element für Element) addirt. Dann wird

$$\begin{aligned} \text{wobei } a_{22}' &= a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}; a_{32}' = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12}; \dots \\ a_{23}' &= a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}; a_{33}' = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13}; \dots \\ a_{24}' &= a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{14}; a_{34}' = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14}; \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Probe auch thatsächlich auf zwei Wegen gerechnet werden. Eine durchgreifende Probe geben dann die Gleichungen (3), von denen die r Gleichungen der ersten Zeile (bei den Normalgleichungen sind die erste und dritte, sowie die zweite und vierte Zeile identisch) und einzelne der zweiten gerechnet werden.

*) Näheres hierüber wird man in dem demnächst erscheinenden zweiten Bande der von mir gegründeten v. Küffner'schen Sternwarte finden.

N. Herz.

Beobachtungen von Cometen am grossen Refractor der Wiener Sternwarte.

Datum	M. Z. Wien	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Vgl.	α app.	$\log p.A$	δ app.	$\log p.A$	Red. ad l. app.	*
Comet 1890 II. (Forts. zu A. N. 3044).										
1891										
März 6	12 ^h 9 ^m 7 ^s	-0 ^m 55.69	+4' 51.8	5	10 ^h 38 ^m 59.32	8.765	+36° 20' 48.6	0.259	+1.30 -1.8	1
Mai 1	10 16 22	-0 34.82	-7 27.2	5	9 25 29.52	9.555	+29 56 40.3	0.590	+0.31 +6.8	2
26	10 16 9	-0 53.99	-3 22.5	6	9 21 41.75	9.634	+26 37 57.4	0.725	-0.08 +6.7	3
29	10 1 17	-0 5.83	+0 12.0	8	9 21 55	9.631	+26 14	0.725	-0.12 +6.7	4
Comet 1890 VII (Spitaler). (Forts. zu A. N. 3044).										
1891										
Jan. 1	6 54 17	-1 2.87	+5 14.5	5	4 53 42.26	9.589 _n	+40 16 9.4	0.496	+0.25 +5.1	5
6	6 54 47	-1 38.37	+0 14.2	5	4 52 12.01	9.549 _n	+40 22 47.4	0.345	+0.25 +5.7	6
27	6 42 1	-1 46.98	-1 52.1	5	4 57 46.68	9.372 _n	+40 10 33.8	0.211	+0.13 +7.6	7
Febr. 4	7 37 39	+0 16.20	+7 7.2	8	5 4 36.89	8.798	+39 55 48.6	0.107	+0.05 +8.1	8