

SUR LA NATURE ANALYTIQUE D'UNE FONCTION CONSIDÉRÉE
PAR P. DU BOIS-REYMOND

PAR

M. LERCH

à FRIBOURG (SUISSE).

[Extrait des »Monatshefte für Mathematik und Physik» 8^{ème} année.]

Traduit par L. Laugel.

Dans le tome 21 des *Mathematische Annalen* PAUL DU BOIS-REYMOND parle de séries infinies de la forme

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \sin px$$

dont les coefficients remplissent des conditions infinitaires déterminées, et il cite notamment le cas $\mu_p = e^{-\sqrt{p}}$. Cette série possède des dérivées de tous les ordres et d'après DU BOIS-REYMOND elle ne peut être prolongée dans le domaine de l'imaginaire.

Il en résulterait que la série infinie de puissances

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sqrt{m}} u^m$$

aurait sa région de convergence — le cercle de rayon unité décrit autour de l'origine comme centre — aussi pour région d'existence. Cela est en tout cas bizarre et a été contesté par M. PRINGSHEIM (*Math. Annalen*, t. 44); ce géomètre s'est contenté de présenter quelques observations à ce sujet, sans résoudre la question même, bien qu'il soit possible de le faire d'une manière excessivement simple, comme nous voulons ici le faire voir.

Soit d'abord u une variable complexe dont la valeur absolue est plus petite que 1, et soit a une grandeur réelle positive; alors la série infinie

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^m$$

est absolument convergente. Pour voir comment elle se comporte sur le contour du cercle de convergence $|u|=1$, et, d'une manière générale, pour reconnaître la nature analytique de cette transcendante, nous emploierons la formule intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-mx - \frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{am}};$$

nous ne nous attarderons pas ici à la vérification de l'équation

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^m \int_0^{\infty} e^{-mx - \frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u^m e^{-mx - \frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

mais nous passerons à la considération du résultat

$$(1) \quad \sqrt{a} \sum_{m=1}^{\infty} u^{m-1} e^{-2\sqrt{am}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Nous obtenons ainsi pour la fonction analytique

$$(2) \quad \Phi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^{m-1}, \quad (|u| < 1),$$

une représentation intégrale

$$(3) \quad \Phi(u) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

dont le prolongement nous est fourni directement.

En effet cette intégrale existe pour toutes les valeurs u , qui, sur le plan de la variable complexe, sont représentées par des points en dehors

de la coupure $(1 \dots \infty)$ pratiquée le long de l'axe des grandeurs réelles, et dans cette région l'intégrale a évidemment le caractère d'une fonction entière.

Il s'ensuit que notre fonction (2) peut être prolongée dans tout le plan des u , à l'exception, faite provisoirement, de la coupure $(1 \dots \infty)$.

Son développement en série de puissances dans le domaine du point $u = i$ s'obtient au moyen de la formule (3), et l'on a

$$\Phi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} (u - i)^{\nu}$$

où

$$A_{\nu} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{(e^x - i)^{\nu+1}} \frac{dx}{x \sqrt{x}}.$$

On a évidemment

$$|A_{\nu}| < \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{x} - (\nu+1)x} \frac{dx}{x \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{a(\nu+1)}},$$

et la série converge pour $|u - i| < 1$, comme c'était clair de prime abord.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que la fonction $\Phi(u)$ se comporte aussi d'une manière régulière le long de la coupure $(1 \dots \infty)$, exception faite du seul point $u = 1$.

En effet soit L une ligne issue de l'origine et s'étendant dans le voisinage de l'axe des grandeurs réelles sur le plan de la variable complexe x , jusqu'à l'infini. Alors la fonction

$$\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x \sqrt{x}}$$

se comporte régulièrement dans la région qui a pour contour la courbe L et l'axe des grandeurs réelles, et l'intégrale

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x \sqrt{x}}$$

qui correspond au chemin d'intégration L est égale à l'intégrale $\Phi(u)$. Mais celle-ci exige pour la fixation précise de sa région de convergence une coupure (définie par les points $u = e^x$) tout à fait différente de la précédente et elle se comporte régulièrement en tous les points de la ligne $(1 \dots \infty)$, à l'exception seule de $u = 1$.

Il n'est pas difficile de reconnaître le mode de discontinuité de $\Phi(u)$ au point $u = 1$. Soit de nouveau $\Phi(u)$ l'intégrale (3) et soit $v > 1$ une grandeur réelle et $\varepsilon', \varepsilon''$ deux petites grandeurs positives; si l'on pose

$$u' = v + \varepsilon' i, \quad u'' = v - \varepsilon'' i$$

il est facile de démontrer à l'aide d'une méthode de raisonnement inventée par M. HERMITE et simplifiée par M. GOURSAT¹ que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0, \varepsilon'' \rightarrow 0} [\Phi(u') - \Phi(u'')] = 2\pi i \frac{e^{-\frac{a}{\log u}}}{u (\log u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il résulte de là comme conséquence que la fonction

$$(4) \quad \Phi(u) + e^{-\frac{a}{\log u}} \frac{\log(u-1)}{u (\log u)^{\frac{3}{2}}} = \Psi(u)$$

reste uniforme dans le domaine du point $u = 1$, et ainsi est développable suivant les puissances positives et négatives de $(u-1)$.

Le nombre des puissances négatives qui se présentent dans ce développement est nécessairement infiniment grand. En effet si ε désigne une grandeur positive infiniment petite, évidemment $\Psi(1-\varepsilon)$ est alors infiniment grand, puisque $\Phi(1-\varepsilon)$ reste fini et que le second terme dans (4) au premier membre devient infiniment grand, et d'autre part $\Psi(1+\varepsilon)$ reste finie pour ε infiniment petit. Pour démontrer ce dernier point il suffit de faire voir que l'intégrale

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u x \sqrt{x}} dx$$

¹ Voir *Acta mathematica*, tome I, p. 189—192: *Lettre de M. Hermite* et *Acta mathematica*, tome IO, Table: GOURSAT, où se trouve la liste des travaux de M. HERMITE sur les sujets de la Lettre de M. GOURSAT.

reste finie pour $u = 1 + \varepsilon$; c'est ce que l'on voit clairement en la ramenant à la forme

$$\Phi(u) = -\frac{1}{u} \int_L \log(1 - e^{-x}u) d\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x\sqrt{x}}.$$

Maintenant, comme les expressions $\Psi(u \pm \varepsilon)$ ne sont ni toutes les deux finies, ni toutes les deux infiniment grandes, alors $u = 1$ est un point singulier essentiel de la fonction $\Psi(u)$ et dans le développement en série de puissances

$$\Psi(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}(u-1)^{\nu}$$

le nombre des puissances négatives qui se présentent effectivement est nécessairement infiniment grand, ainsi qu'il a été affirmé.

»La fonction $\Phi(u)$ définie par la série (2) se comporte régulièrement en tous les points de la circonférence du cercle $|u| = 1$, à l'exception du point $u = 1$. Ce dernier point est un point singulier et la manière dont la fonction se comporte dans le domaine du point $u = 1$ peut se définir par la formule suivante

$$\Phi(u) = -e^{-\frac{a}{\log u}} \frac{\log(u-1)}{u(\log u)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}(u-1)^{\nu}.$$

La construction d'exemples de fonctions à lignes singulières ne peut avoir après les travaux de WEIERSTRASS qu'un but pédagogique. A ce point de vue, il y a dix ans, j'ai étudié un grand nombre d'expressions; mais par suite du nombre restreint de lecteurs des publications de la Société royale des Sciences de Prague mes recherches sont restées très peu connues, et même mon mémoire sur l'impossibilité de différentier certaines fonctions, qui a été publié dans le Journal de Crelle, tome 103, n'a pas attiré l'attention de M. MITTAG-LEFFLER.¹

¹ Sur une transcendante remarquable trouvée par M. FREDHOLM, *Acta mathematica*, t. 15. La série traitée à la fin de mon mémoire fournit évidemment une fonction de la même propriété que la série de M. FREDHOLM.

Notamment dans mon mémoire *Sur les fonctions à région d'existence bornée*¹ sont indiquées de nombreuses expressions de cette catégorie, ainsi que de nouvelles méthodes de démonstration et de nouvelles généralisations. Par exemple, il y est démontré que la série à double entrée

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\nu} a^{\mu\nu} u^{\mu} x^{\nu}$$

ne peut être prolongée au delà de sa région de convergence $|u| < 1$, $|x| < 1$, lorsque les constantes m, n ne sont pas des nombres entiers positifs, et lorsque la constante a a pour valeur absolue l'unité mais n'est pas une racine de l'unité.

De ce qui se trouve dans ce mémoire beaucoup a été nouvellement publié par M. PRINGSHEIM dans les *Math. Annalen*, tomes 42 et 44, par exemple la généralisation qu'il cite en note au bas de la page 166 du tome 42, et encore le principe de démonstration qu'il emploie p. 50 et p. 51 du tome 44. C'est aussi à moi que remonte cette remarque que l'on peut construire des expressions de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{x - a_{\nu}}$$

qui, en valeur absolue, restent inférieures à une constante, lorsque x est limité à une région à l'intérieur de laquelle ne sont pas situés des points a_{ν} , et il en est de même aussi pour le contour de la région quand tous les points de ce contour sont des points limites [*Häufungsstellen* d'après la terminologie de M. G. CANTOR] de l'ensemble (a_{ν}) . C'est ce que j'ai éclairci p. 7 de mon mémoire au moyen de l'exemple

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu} \left(e^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right)}{x - e^{\frac{1}{\nu} + 2\nu\alpha\pi i}}, \quad (|x| \leq 1),$$

où α désigne une grandeur réelle irrationnelle. M. PRINGSHEIM au tome 42 des *Math. Annalen* cite beaucoup d'expressions de ce type.

¹ Mémoires de l'Acad. royale des Sc. de Bohême, VII. Suite. Tome II, 1888.

M. PRINGSHEIM voulait pousser la question plus loin, et il affirme que l'expression

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{x - a_{\nu}}, \quad (\sum |c_{\nu}| \text{ est convergente})$$

ne peut être prolongée au delà du domaine C lorsque tous les points a_{ν} sont situés en dehors de C , mais cela de telle sorte cependant que leurs points limites forment le contour de C , sous la supposition que les a_{ν} ne recouvrent aucune portion de surface d'une manière partout dense.

En 1887, je n'ai pas voulu aller aussi loin que M. PRINGSHEIM et je n'ai pas tenté de résoudre la question, car la démonstration me sembla alors et me semble encore aujourd'hui difficile, de sorte que je ne puis ici rien fournir en réponse à la question. Lorsque M. PRINGSHEIM croit en avoir trouvé la solution au moyen de son théorème (p. 168 du t. 42 des *Math. Annalen*) il se trompe, car la démonstration de ce théorème est fausse et l'exactitude de ce théorème reste donc indécise.
