Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. IV.

(Zweiter Existenzbeweis der allgemeinen kanonischen uniformisierenden Variablen: Kontinuitätsmethode.)

Von

Paul Koebe in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Nachdem ich in den Abhandlungen „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I, II, III“ (Math. Ann. 67, 69, 72) mit Hilfe der Methode der Überlagerungsfläche und des iterierenden Verfahrens alle die Uniformisierung der algebraischen Kurven betreffenden, seinerzeit (1881—1883) von Poincaré und Klein aufgestellten Fundamentaltheoreme bewiesen habe, will ich in der vorliegenden Abhandlung nunmehr zeigen, wie diese Theoreme sich durchgängig mit Hilfe der *Kontinuitätsmethode* erledigen lassen.*)

Ich betrachte zu dem Ende in einem ersten Teile dieser Abhandlung zunächst nur den Fall der Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus und führe in diesem Falle die Untersuchung in ausführlicher Weise durch, um dann das Hauptkreistheorem im zweiten Teile, schließlich im dritten Teile die allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme zu erledigen, bei welchen das Wertegebiet T der uniformisierenden Variablen, allgemein zu reden, ein von unendlich vielen Kreisen begrenztes Gebiet der Ebene ist. Bei diesen Entwicklungen wird aus meinen früheren Abhandlungen lediglich der Unitätsbeweis für die betreffenden uniformisierenden Variablen vorausgesetzt, sowie aus unten näher bezeichneten Gründen (S. 118) der Existenzbeweis der Grenzkreisuniformisierung, wie ich denselben in „U. d. a. K. I.“ mittels der Methode der Überlagerungsfläche gegeben habe.

Die Grundidee der *Kontinuitätsmethode* als eines allgemeinen Beweisprinzipes ist älter als die Arbeiten Kleins und Poincarés. Wir finden diese Methode zum Beispiel im Gebiete der konformen Abbildung von Schläfli ver-

*) Vgl. die „Voranzeige“ der vorliegenden Abhandlung in den Gött. Nachr. 13. Jan. 1912: „Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung“, welche wesentlich die bezüglichen Mitteilungen des Verfassers auf der Naturforscherversammlung in Karlsruhe (September 1911, s. Jahresbericht der D. M. V. 1912, S. 161—163) wiedergibt. S. auch die Note des Verfassers „Zur Begründung der Kontinuitätsmethode“. Sitzungsberichte Ak. Leipzig 1912, S. 59ff.

sucht.*) Dies kann nicht wundernehmen. Ist doch die Kontinuitätsmethode ihrem Wesen nach zunächst nichts anderes als die heuristisch so wertvolle *Methode der Konstantenzählung zu einem Beweisprinzip erhoben*, eine Auffassung, bei welcher in dieser Allgemeinheit naturgemäß von einer allgemeinen Begründung der Kontinuitätsmethode nicht gesprochen werden kann, vielmehr lediglich von einer Begründung für jede einzelne Problemgattung. Und hier ist nun zu sagen, daß, so einfach und naheliegend der Grundgedanke der Kontinuitätsmethode als solcher ist, so schwierig eine tatsächlich exakte und umfassende Begründung derselben insbesondere in der Uniformisierungstheorie sich gestalten sollte.

Um das Wesen der Kontinuitätsmethode und gewisse Hauptunterschiede meines allgemeingültigen Beweisverfahrens insbesondere gegenüber den auf das Grenzkreistheorem beschränkten Entwicklungen von Poincaré bzw. Kleins allgemein gehaltenen Andeutungen, sowie zwischen diesen selbst nebst einigen kritischen Bemerkungen in dieser Einleitung darlegen zu können, will ich an ein Beispiel anknüpfen, an welchem auch Poincaré seine Methode gelegentlich erläutert hat.

Ich betrachte die Fläche des Einheitskreises der z-Ebene mit vier ausgezeichneten Punkten der Peripherie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Diese Fläche soll auf ein Spitzenpolygon Π innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene abgebildet werden, welches von vier Orthogonalkreisbögen des Einheitskreises begrenzt wird und auf der Peripherie vier Spitzen mit den äußersten Punkten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ hat; und zwar sollen bei der gedachten Abbildung die Punkte α bzw. in die Punkte β übergehen. Man normiere zunächst vermöge linearer Transformation die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ auf $-1, -i, +1, \alpha$, ferner $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ auf $-1, -i, +1, \beta$ und denke sich die Punkte α und β beide in der oberen Hälfte des Einheitskreises liegend. Ist β gegeben, so bestimmt man sofort die zu Π gehörende Greensche Funktion und kann damit die Abbildung auf die Fläche des Einheitskreises bewirken, wobei nun β in einen gewissen Punkt α übergehen wird: (*die Grundtatsache*). Wird β auf dem oberen Halbkreise der t-Ebene variiert, so variiert auch α auf dem oberen Halbkreise der z-Ebene. Man zeigt, daß α mit β stetig variiert (*Stetigkeitsbeweis*), ferner, daß zwei voneinander verschiedenen β stets auch zwei voneinander verschiedene α entsprechen. Oder anders gesprochen, daß zu einem α nicht mehr als ein β gehören kann, sofern überhaupt ein β dazu gehört (*Unitätsbeweis*). Hieraus

*) Schläfli, „Über die allgemeine Möglichkeit der konformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur auf eine Halbebene", Journal für Math. 78, S. 63—80 (1874). Man lese besonders S. 63 u. 68. Noch vor Schläfli sind H. A. Schwarz und Weierstraß zu nennen (H. A. Schwarz, Ges. Abh. Bd. II, S. 77 oben und die Abhandlung über Tetraederabbildung Ges. Abh. S. 84 ff.).

folgt, daß, wenn β den ganzen oberen Halbkreis durchläuft (mit Ausschluß der Grenzpunkte des Halbkreises), α ein gewisses Stück seines Halbkreises durchlaufen wird, indem bei dieser Zuordnung die vollständige (hier eindimensionale) Umgebung eines jeden Punktes β eineindeutig und stetig auf die vollständige Umgebung des entsprechenden Punktes α übertragen wird (*umgebungstreue Abbildung*).

Die alte Kardinalschwierigkeit des Kontinuitätsbeweises ist nun durch die Frage nach der vollständigen Ausfüllung des z-Halbkreises durch die Punkte α bezeichnet (*Vollständigkeitsbeweis*).

Um diesen Vollständigkeitsbeweis zu führen, erfand Poincaré eine Methode, welche wir im Anschluß an Poincaré als *Methode der Grenzpolygone* (*„polygones limites“*) bezeichnen können.*) Das Wesen dieser Methode besteht in Folgendem. Man denke sich, daß β in den Punkt $+1$ übergeht. Alsdann geht das Polygon Π in das Spitzendreieck -1, $-i$, $+1$ als Grenzpolygon über. D. h.: es entspricht dem Werte $\beta = +1$ der Wert $\alpha = +1$. Analog entspricht $\beta = -1$ der Wert $\alpha = -1$. Es kommt nun darauf an, den Nachweis zu führen, daß die Funktion $\alpha(\beta)$ auch noch in den genannten beiden Grenzpunkten stetig ist. Alsdann ist einleuchtend, daß in der Tat jeder Punkt des oberen Halbkreises der z-Ebene als Eckpunkt α auftritt, sodaß also die z-Kreisfläche in der Tat bei irgendwelcher Wahl von α auf ein Polygon Π abgebildet werden kann.

Auf einem wesentlich neuen Gedanken beruht nun die folgende von mir gefundene Methode, welche ich passend als *Methode des Verzerrungsgrundes* bezeichnen könnte. Mein *Verzerrungssatz* gestattet, auf die oben betrachteten Figuren angewendet, den Schluß: wenn α auf ein bestimmtes Intervall seines Halbkreises beschränkt wird, welches nicht bis an -1 oder $+1$ heranreicht, so entspricht dieser Annahme eine analoge Beschränkung für die entsprechenden β, gleichgültig ob solche β überhaupt existieren oder nicht. Derartige Schranken lassen sich mit Hilfe meines *Verzerrungssatzes* explizite berechnen. Es ist klar, daß hiermit gezeigt ist: wenn β seinen Halbkreis durchläuft, so durchläuft auch notwendig α seinen Halbkreis vollständig. Dabei sind die Grenzpolygone ganz außer Betracht geblieben.**)

---

*) Die Methode der „polygones limites“ findet ein Vorbild bei H. A. Schwarz. in dessen Abhandlung „Konforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel“. Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 70, 1869, S. 121 ff. Ges. Abh. Bd. II, S. 84 ff.

**) Vgl. auch meine bereits in „U. d. a. K. III.“ (Einleitung, Fußnote) aufgeführten Noten:

„Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung“, Gött. Nachr. 13. Jan. 1912, S. 879—886.

Der Unterschied zwischen der Inbetrachtnahme der Grenzpolygone einerseits und der völligen Außerachtlassung derselben andererseits ist in charakteristischer Weise bezeichnend für die Poincarésche Methode

---

„Zur Begründung der Kontinuitätsmethode". Sitzungsb. Ak. Leipzig 1912, S. 59—62.

„Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung", der D. M. V. erstattet in Karlsruhe 1911. Jahresb. der D. M. V., 1912, S. 157—163, insb. S. 162 ff.

Ich benütze diese Gelegenheit wieder zur Anführung der neu hinzugekommenen auf die Uniformisierung-Bezug habenden Literatur.

P. Koebe: I. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. III. (Erster Beweis der allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme. Das iterierende Verfahren)". Math. Ann. 72 (1912), S 437—516.

II. Diskussionsbemerkungen im Anschluß an den Vortrag von D. Hilbert: „Begründung der elementaren Strahlungstheorie", S. 1054 der Phys. Zeitschrift, Jahrgang 1912. (Betrifft die Beziehung zwischen Uniformisierung und nichteuklidischer Geometrie) Vgl. dazu die Abhandlung

III. „Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie". Lagrange-Band (Bd. 21, S. 57—64) der Annali di Matematica 1913.

IV. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. IV. (Zweiter Existenzbeweis der allgemeinen kanonischen uniformisierenden Variablen: Kontinuitätsmethode)." Math. Ann. 75 (1914), S. 42—129.

V. „Wesen und Ziele der Kontinuitätsmethode" (Vortrag, Naturforscherversammlung Wien, September 1913, erscheint im Jahresbericht der D. M. V.).

Ebenfalls sei hier von neuem hingewiesen auf den Bericht über die Karlsruher Verhandlungen, betreffend die automorphen Funktionen, im Jahresbericht der D. M. V. 21 (1912), S. 153—166, insbesondere auf

P. Koebe: „Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung". Jahresbericht der D. M. V., 21 (1912), S. 157—163.

Die Lektüre dieses Verhandlungsberichtes eignet sich sehr zur allgemeinen Orientierung über die um die Uniformisierungsprobleme sich gruppierende neueste Entwicklung in der Theorie der automorphen Funktionen.

Von anderer Seite nenne ich ferner:

L. Bieberbach: „Bemerkungen zu den Mitteilungen über automorphe Funktionen", Jahresbericht der D. M. V., 21 (1912), S. 164.

Derselbe: „Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenfließschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebiets", Jahresbericht der D. M. V., 22 (1913), S. 144—153.

L. E. J. Brouwer: „Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit". Gött. Nachr. 1912, S. 803—806, auf dessen die Kontinuitätsmethode betreffende schon in „U. d. a. K. III" aufgeführte Noten hier von neuem hingewiesen sei; (Gött. Nachr. 1912 und Jahresbericht der D. M. V., 21 (1912), wie auch auf die Kontinuitätsentwicklungen von Fricke in

Fricke-Klein „Vorlesungen über die Theorie der aut. Funkt.", Bd. II, S. 286—438.

S. Johansson: „Herstellung automorpher Potentiale bei beliebigen Hauptkreisgruppen". Acta Soc. Fenn. 41, No. 2 (1912). Die vom Verfasser in eigenartiger Weise behandelte Aufgabe ist implicite bereits in meiner vierten Mitteilung über die im Verhältnis zur meinigen. Man kann diesen Unterschied auch als Bezeichnungsgrund wählen und also von einer *Methode der abgeschlossenen Kontinua* einerseits und einer *Methode der offenen Kontinua* andererseits reden.

Klein hatte, wie vor ihm Schläfli (l. c.), das Bestreben, einen Kontinuitätsbeweis im letzteren Sinne zu versuchen. Das Argument jedoch, auf welches Klein sich hauptsächlich stützte, nämlich der Weierstraßsche Satz, daß eine stetige („analytische") Funktion von einem oder mehreren Argumenten in einem Bereich jeden Wert annimmt, dem sie darin beliebig nahe kommt, ist hinfällig und seine Heranziehung lediglich auf ein Mißverständnis zurückzuführen, da der Weierstraßsche Satz nur auf abgeschlossene Kontinua zur Anwendung gelangen kann, während der Bereich, auf welchen Klein ihn anwendet, notorisch nicht abgeschlossen ist. Deshalb war die Kritik, welche Poincaré S. 235—236 seiner Abhandlung in den Acta Math. 4 (1884) an den Kleinschen Skizzierungen seiner (Kleins) Kontinuitätsideen (Math. Ann. 21, S. 208—212) übte, berechtigt und hatte dann den Erfolg, daß die Idee einer mit den offenen Kontinuen operierenden Kontinuitätsmethode überhaupt, auch von Klein selbst aufgegeben wurde.*)

Unif. bel. an. K. (Gött. Nachr. 1909) gelöst, insofern als die allgemeinste Hauptkreisgruppe mit endlich oder unendlich vielen Erzeugenden unter den von mir allgemein definierten Begriff der „Riemannschen Mannigfaltigkeit" fällt.

W. F. Osgood: „Lehrbuch der Funktionentheorie" Zweite Auflage, Teubner 1912; vgl. insbesondere den Abschnitt „Das logarithmische Potential. Uniformisierung", S. 598—753. Zu einer von Herrn Osgood l. c. S. 753 unten gemachten Bemerkung vgl. man eine von mir stammende Notiz in Study: „Vorlesungen über Geometrie", Zweites Heft: „Konforme Abbildung", S. 18.

Derselbe: „On the uniformisation of algebraic fonctions". Annals of Mathematics (2) 14, Nr. 4, 1913, S. 143—162.

H. Weyl: „Die Idee der Riemannschen Fläche" Leipzig, Teubner 1913.

J. Plemelj: „Über den Verzerrungssatz von P. Koebe" (Vortrag, Naturforscherversammlung Wien 1913, erscheint im Jahresbericht der D. M. V.).

Ein von Herrn Plemelj in seiner Arbeit „Die Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde" (Monatshefte Math. Phys. Bd. 23 (1912), S. 297 ff.) auf S. 302 benützter Ansatz von Funktionen $e^{c_n - u_n - i\vartheta_n}$ findet sich auch in meiner ersten Mitteilung „über die U. bel. an. K." (Gött. Nachr. 1907, S. 206 unten und 207 oben).

Von älterer Literatur seien wegen ihrer Beziehung zur Kontinuitätsmethode genannt

E. Ritter: „Die Stetigkeit der automorphen Funktionen bei stetiger Änderung des Fundamentalbereichs". Math. Ann. 45 u. 46 (1894 u. 1895).

*) Man vgl. hierzu Kleins Autographie „Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung" (Leipzig, Teubner, 1894 (Abdruck 1906), insbesondere S. 499—513). Auf Seite 499 unten sagt Klein: „Eine allgemeine Beweismethode für diese Theoreme ist die von mir und Poincaré gleichzeitig gefundene Kontinuitätsmethode, welche ich zuerst in Math. Ann. 21 skizzierte, und welche dann Poincaré in Acta Math. 4 näher ausgeführt hat." Auf S. 512 sagt Klein: „Insbesondere Poincaré hat dieses Verhalten

Hierin wiederum liegt die gewissermaßen unberechtigte Seite der Poincaréschen Kritik, nämlich in dem dieser Kritik zugrundeliegenden Vorurteil, daß der Weg zu einem exakten Kontinuitätsbeweise notwendig über die *„polygones limites"* führen müsse. Wie schwierig eine solche Theorie übrigens ist, kann man aus den bezüglichen Untersuchungen Poincarés l. c. S. 236—240, 250—276 ersehen, Untersuchungen, welche im Poincaréschen Kontinuitätsbeweise als pièce de résistance erscheinen. Man kann daran die Eigenart der von mir gemeinten Wendung in der Auffassung des Kontinuitätsbeweises erkennen. Sind doch in der Tat diese ganzen komplizierten und tiefgehenden Überlegungen Poincarés, unbeschadet der denselben beizumessenden spezifischen Bedeutung, bei meinem Kontinuitätsbeweise entbehrlich, indem dieselben durch ein viel einfacheres, sofort alle Fälle*) umspannendes Argument ersetzt werden. Übrigens erscheint es geradezu aussichtslos, die allgemeineren Fundamentaltheoreme im Sinne Poincarés durch einen Kontinuitätsbeweis zu erledigen, eine Meinung, die auch Poincaré selbst mir gegenüber in einer gelegentlichen mündlichen Besprechung mit mir (Herbst 1910 in Berlin) vertrat, indem er sagte, daß er an einen Kontinuitätsbeweis der allgemeinen Fundamentaltheoreme nicht glaube, weil die zu betrachtenden Kontinua *„nicht geschlossen"* seien.**)

Ich habe es in der vorliegenden Abhandlung gleichwohl nicht für zweckmäßig gehalten, dem Grenzkreistheorem einen besonderen Abschnitt zu widmen, vielmehr mich auf den Standpunkt gestellt, daß das Grenzkreistheorem mittels der Methode der Überlagerungsfläche bewiesen sei („U. d. a. K. I"), um von da aus die auch für die allgemeineren Fundamentaltheoreme notwendige Einsicht in die Variationsmöglichkeit der bei der Komposition beteiligten Grenzkreispolygone zu gewinnen. Hätte ich diesen Standpunkt nicht eingenommen, so wäre ich genötigt gewesen, die geometrische Theorie der Grenzkreisgruppen bzw. Grenzkreispolygone heranzuziehen, deren ausführliche Begründung von Herrn Fricke***) gegeben

der Grenzen der beiden Mannigfaltigkeiten genauer untersucht und darauf hingewiesen, daß auch diese einander tatsächlich korrespondieren."

Übrigens beabsichtige ich (Koebe) meinerseits in späteren Aufsätzen auf die Methode der Grenzpolygone zurückzukommen.

*) Poincaré verlangt demgegenüber „une dicussion spéciale à chaque cas particulier", S. 236 l. c.

**) Ich habe über diese Unterredung mit Poincaré seinerzeit (1910) auch mit Herrn Klein in dem hier dargelegten Sinne korrespondiert. Bezüglich seines Kontinuitätsbeweises des Grenzkreistheorems erklärte Poincaré mir, daß er denselben grundsätzlich für bündig erachte, insofern als man ihn völlig streng machen könne. Die Poincarésche, durch die Heranziehung der „polygones limites" bezw. „polygones limites réduits" charakterisierte Auffassung der Kontinuitätsmethode ist nach ihm selbst von Schlesinger, Fricke und neuestens Brouwer vertreten und ausgestaltet worden.

***) Fricke-Klein: „Vorlesungen über automorphe Funktionen", Bd. 1.

worden ist. Während ich also in der Abhandlung „U. d. a. K. III" den Beweis der allgemeinen Fundamentaltheoreme durch die *Verbindung: Methode der Überlagerungsfläche und iterierendes Verfahren* gab, so ist mein Standpunkt in dieser Abhandlung durch die *Verbindung: Methode der Überlagerungsfläche und Kontinuitätsmethode* bezeichnet, wobei jene erste Methode lediglich für den Zweck eines Beweises des Grenzkreistheorems benötigt wird.

Es ist namentlich gegenüber Poincaré ein charakteristischer Zug der mehr von Riemann beeinflußten Kleinschen Betrachtungsweisen, Bereiche mit analytischer Ränderzuordnung auf gleicher Linie mit wirklichen Riemannschen Flächen zu betrachten. So hat Klein insbesondere bei seiner Skizze des Kontinuitätsbeweises, geleitet durch gewisse von C. Jordan*) ausgebildete Vorstellungen, die Einheit des Kontinuums der kanonisch aufgeschnittenen Riemannschen Flächen von bestimmter Blätterzahl und bestimmtem Geschlecht dadurch erläutert, daß er die zu einfach zusammenhängenden Bereichen kanonisch aufgeschnittenen Riemannschen Flächen auf die Fläche des Einheitskreises konform abgebildet vorstellte und sich nun auf die „anschauungsmäßige Evidenz" der Einheit (d. i. stetigen Überführbarkeit je zweier Individua ineinander) der so gefundenen Hilfsbereiche (Einheitskreis mit stückweise analytischer Ränderzuordnung) berief. Demgegenüber denke ich mir die durch p getrennte Rückkehrschnitte in einen schlichtartigen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich verwandelte Riemannsche Fläche auf einen schlichten $2p$-fach zusammenhängenden Bereich Φ mit durchweg regulärer analytischer Ränderzuordnung abgebildet und kann für solche Bereiche dann in der Tat die Einheit derselben exakt beweisen. Die allgemein mittels p Rückkehrschnittpaaren und p Einschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelte Riemannsche Fläche aber läßt sich nun sofort auf einen schlichten Bereich Φ der erwähnten Art abbilden, welcher jetzt noch in bestimmter Weise zu einem einfach zusammenhängenden Bereiche aufgeschnitten erscheint, also einem Bereiche mit p regulären analytischen Randsubstitutionen und $2p$ mit der Identität zusammenfallenden Substitutionen. Für Bereiche dieser Art ist jetzt die Einheit derselben wirklich evident. Wünscht man nur die Einheit der unaufgeschnittenen Riemannschen Flächen bestimmten Geschlechts und bestimmter Blätterzahl festzustellen, was für das Grenzkreistheorem genügt, so kann man sich mit Klein auf den Lürothschen Satz über Riemannsche Flächen berufen. Durch die von uns erwähnte Methode der Hilfsabbildung auf Bereiche Φ ist der Vorteil geboten, daß

*) C. Jordan: „Sur la déformation des surfaces" und „Des contours tracés sur les surfaces". Journal de Mathém., (2) 11 (1866).

überhaupt die ganzen von uns hier mittels der Kontinuitätsmethode behandelten Uniformisierungsprobleme auf gleicher Linie erscheinen mit einer allgemeinen Klasse von Abbildungsaufgaben, nämlich Abbildungsaufgaben über schlichte mehrfach zusammenhängende Bereiche, deren Ränder ganz oder stückweise durch analytische Substitutionen aufeinander bezogen sind, wobei nun die Aufgabe darin besteht, dieselben auf Bereiche mit linearer Ränderzuordnung abzubilden.

Im Anschluß an die vorstehenden Bemerkungen will ich jetzt neben den oben aufgeführten Beweispunkten als weiteren besonderen Beweispunkt noch den *Nachweis der Einheit der abzubildenden Bereiche* formulieren, ein Beweispunkt, welcher an dem obigen Beispiel noch nicht hervortreten konnte wegen der dort vorhandenen unmittelbaren Evidenz dieser Tatsache. Dasselbe gilt dort von der Einheit der Spitzenpolygone, d. i. der abgebildeten Bereiche. In dem allgemeinen Falle der Uniformisierungstheorie ist dieser letztere Punkt ebenfalls ein besonderer Beweispunkt, den wir daher auch besonders formulieren als *Beweis der Einheit der abgebildeten Bereiche (Fundamentalbereiche).* Es ist nun wesentlich, daß diese Tatsache für den Kontinuitätsbeweis nicht benötigt wird. Klein, der auch die angegebene Stellung dieser Tatsache innerhalb des Kontinuitätsbeweises oder, richtiger gesagt, außerhalb des Kontinuitätsbeweises noch nicht erkannt hatte, glaubte dieselbe als unmittelbar evident (Math. Ann. 21, S. 208) bezeichnen zu dürfen. Diese Ansicht dürfte sich allerdings schwerlich aufrecht erhalten lassen. Ich begründe die angeführte Tatsache der Einheit der abgebildeten Bereiche auf Grund des bewiesenen Fundamentaltheorems durch ein besonderes Kontinuitätsschlußverfahren an der Hand der zuvor bewiesenen Einheit der abzubildenden Bereiche Φ.*)

Noch eines anderen Umstandes, dessen Stellung im Rahmen des Kontinuitätsbeweises bei mir in neuer Beleuchtung erscheint, will ich hier gedenken. Ich meine die Frage nach der *Diskontinuität der Modulgruppe*,**) eine Frage, welche bei den Auffassungen von Poincaré und Klein sowie im Anschluß daran bei Fricke als wesentliches Glied im Kontinuitätsbeweise erscheint. Zu dieser an sich sehr wichtigen Frage nehme ich in der Weise Stellung, daß ich sie überhaupt vollständig aus dem Kontinuitätsbeweise ausscheide, indem ich zweckentsprechend die $6p-6$ Moduln verwirkliche durch Übergang auf die bekannte *Riemannsche mehrblättrige Parallelogrammfigur*, welche, bei Fixierung von p Perioden und eines ihrer $2p-2$ Windungspunkte, von $6p-6$ reellen Parametern abhängt, wobei es gleichgültig ist, ob hierbei noch die Möglichkeit der birationalen Ver-

*) Diese Auffassung habe ich bereits 1910 Klein brieflich mitgeteilt. Vgl. Fußnote **) S. 48.

**) Vgl. auch die Stellungnahme Brouwers hierzu in seinen S. 46 zitierten Noten.

wandtschaft benachbarter oder nichtbenachbarter Flächen oder auch der Transformation von Flächen in sich besteht.

Ich hatte oben an dem Beispiel auch den Nachweis der umgebungstreuen Abbildung als besonderen Beweispunkt formuliert. In der Tat wird diese Frage, auf so selbstverständliche Weise sie sich bei dem Beispiele selbst erledigt, wegen der Eindimensionalität der in Beziehung gesetzten Kontinua (Kontinuum der α und Kontinuum der β) im allgemeinen Fall ein besonderer Gegenstand der Beweisführung. Ich erledige diesen Punkt durch den Hinweis auf den neuerdings von Brouwer*) in so einfacher und leicht zugänglicher Weise allgemein bewiesenen Satz, daß das *stetige eineindeutige Abbild eines m-dimensionalen Gebiets im m-dimensionalen Raum wieder ein Gebiet* ist, ein Satz, auf dessen Wichtigkeit für die Kontinuitätsmethode bereits Fricke in seinem Vortrage auf dem Heidelberger internationalen Mathematikerkongreß (1904) nachdrücklich hingewiesen hatte. Ich zeige jedoch auf der andern Seite und leiste dadurch wiederum auch mehr, daß ein *rein analytischer Beweis*, wie ihn Poincaré und Klein angestrebt hatten, ebenfalls in allen Fällen möglich ist, d. h. ein Beweis, bei welchem die erst zu erweisende Tatsache der *analytischen* (nicht nur stetigen) Abhängigkeit der zu betrachtenden gleichdimensionalen Kontinua zugrundegelegt wird. Ich halte gleichwohl die Benützung des genannten allgemeinen Stetigkeitssatzes für natürlich und zweckmäßig. Ist doch auch die Anwendung dieses Satzes für eine Dimension in der Analysis geläufig.

Erster Teil.

Die Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus.

§ 1.

Die Einheit der schlichten Bereiche Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung.

Die Riemannsche Fläche F der algebraischen Funktion $y(x)$ vom Geschlecht $p \geqq 2$ denken wir uns durch p getrennte Rückkehrschnitte in eine $2p$-fach zusammenhängende, schlichtartige Fläche F_0 verwandelt. Die Fläche F_0 kann dann auf einen schlichten Bereich Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung abgebildet werden. Dies erreichen wir unter Be-

*) L. E. J. Brouwer: „Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets“, Math. Ann. 72, S. 55—56, und die darin benötigten Entwicklungen Brouwers in Math. Ann. 70, S. 161—165; 71, S. 97—106, 326, 598.

nützung eines von mir in einem früheren Aufsatze*) entwickelten Gedankens in folgender Weise. Wir denken uns den Bereich F_0 über jede seiner $2p$ Begrenzungslinien hinaus ein Stück fortgesetzt durch Anhängung je eines zweifach zusammenhängenden Flächenstreifens. Die so erweiterte Fläche F_0 heiße F_0'. Wir haben es nun in der Hand, die Begrenzung von F_0' aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken gebildet zu wählen. Nunmehr denken wir uns jeder Begrenzungslinie von F_0' entsprechend einen Punkt P im Raume gewählt und mit P als Spitze einen Pyramidenmantel konstruiert, welcher die erwähnte Begrenzungslinie als Grundlinie hat. Auf diese Weise wird die Fläche F_0' durch Anfügung von $2p$ Pyramidenmänteln in eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche F_0'' verwandelt, welche nach den Beweisprinzipien von Schwarz umkehrbar eindeutig konform auf die schlichte Ebene abgebildet werden kann, da dies für die Umgebung jedes einzelnen Punktes elementar möglich ist, insbesondere auch für die durch die angesetzten Pyramidenmäntel geschaffenen Eckpunkte und Kantenpunkte (Faltungspunkte, wenn die Punkte P in der Ebene der Fläche F selbst angenommen werden). Bei dieser Abbildung der Fläche F_0'' wird nun F_0' offenbar auf ein schlichtes $2p$-fach zusammenhängendes Gebiet abgebildet und F_0 geht in ein Gebiet Φ über, dessen $2p$ Begrenzungslinien in der Tat durch reguläre analytische Substitutionen aufeinander bezogen erscheinen, wenngleich diese Begrenzungslinien selbst nur aus Stücken regulärer analytischer Linien zusammengesetzt sind. In der Tat haben ja die erwähnten Substitutionen auf Grund ihrer Entstehung eine reguläre analytische Bedeutung je in einem gewissen Streifen zu beiden Seiten dieser Linie. Dieser Streifen ist das bei der Abbildung gefundene Bild desjenigen Flächenstreifens von F, den man erhält, wenn man die dem Rückkehrschnitte entsprechend gewählten beiden Zusatzflächenstreifen zu einem einzigen Streifen zusammengefügt denkt. Dieser Streifen ist auf der Fläche F_0'' doppelt vorhanden und wird bei der Abbildung zweimal dargestellt.

Es ist nun von Wichtigkeit, eine *Modifikation* der Begrenzung des gefundenen Bereichs Φ, den wir jetzt mit Φ' bezeichnen wollen, in der Art vorzunehmen, daß die $2p$ Randkurven des neuen Bereichs, Φ, *sämtlich geschlossene reguläre analytische Linien* werden. Die Begrenzungslinien von Φ sollen dabei der Bedingung genügen, durch bloße Deformation aus den entsprechenden Begrenzungslinien des Bereichs Φ hervorzugehen, wo-

*) Meraner Vortrag 1905, abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906: „Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird." Siehe insbesondere S. 150ff.; vgl. auch meine Abhandlung „U. d. a. K. II" § 13, Math. Ann. 69 (1910), S. 43.

bei während der Deformation die analytischen Randsubstitutionen bestehen bleiben. Diese Modifikation kann in folgender Weise ausgeführt werden.

Wir bemerken zunächst, daß wir, was keine Beschränkung des Grades der Allgemeinheit der Untersuchung bedeutet, den Bereich Φ' als einen den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenden Bereich vorstellen. Die Ebene des Bereichs Φ' möge als z-Ebene bezeichnet werden. Wir fassen nun ein Paar einander zugeordneter Begrenzungslinen l und l' des Bereichs Φ' ins Auge und wollen zunächst für dieses Paar eine Deformation in dem gewünschten Sinne ausführen, von welcher zugleich die anderen Paare nicht betroffen werden. Zu dem Zwecke bilden wir das ganze einfach zusammenhängende, von l umschlossene Gebiet der z-Ebene vermittelst einer Funktion $Z(z)$ auf das Innere des Einheitskreises ab. Diese Abbildung unterliegt bei Zugrundelegung der Schwarz-Neumannschen kombinatorischen Methoden keinen Schwierigkeiten, weil die Linie l ihrer Entstehung gemäß aus lauter regulären analytischen Linienstücken gebildet ist. Nunmehr denken wir uns innerhalb des Einheitskreises der Z-Ebene einen mit diesem konzentrischen Kreis K konstruiert, dessen Radius r hinreichend nahe an 1 gewählt werden möge. Der Grad der Annäherung des zu wählenden Kreises K an den Einheitskreis bestimmt sich aus der Bemerkung, daß das Bild L von K in der z-Ebene, welches jedenfalls eine geschlossene reguläre analytische Linie ist, noch in den oben betrachteten um l definierten Streifen hineinfällt, in welchem die betreffende Randsubstitution eine reguläre Bedeutung besitzt und eine schlichte und endliche, die andern $2p-1$ Begrenzungslinien von Φ' nicht störende Abbildung vermittelt, sodaß vermöge dieser Substitution die Linie L auch in eine reguläre geschlossene Linie, L', verwandelt wird. Die gefundenen Linien L und L' wählen wir jetzt an Stelle von l und l' als Begrenzungslinienpaar des zu definierenden Bereichs Φ.

Analog verfahren wir mit den $p-1$ übrigen Begrenzungslinienpaaren und erhalten so den Bereich Φ mit p Paaren geschlossener, ganz im Endlichen verlaufender regulärer analytischer Begrenzungslinien L_1, L_1', $L_2, L_2', \cdots, L_p, L_p'$. Die Figur 1 zeigt einen derartigen Bereich schematisch im Falle $p=2$. Durch die punktierten Linien sind die Begrenzungslinien umgebende Streifen angedeutet, welche durch die Randsubstitutionen eineindeutig regulär aufeinander bezogen werden.

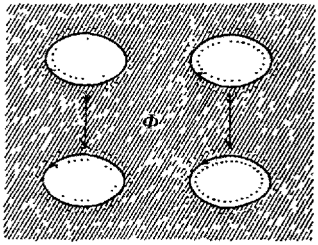


Fig. 1.

Diese Streifen mögen mit $\Lambda_1, \Lambda_1', \Lambda_2, \Lambda_2', \cdots, \Lambda_p, \Lambda_p'$ bezeichnet werden, und wir dürfen dieselben, wie in Figur 1, soweit beschränkt vorstellen, daß sie ganz im Endlichen liegen und voneinander völlig getrennt sind.

Wir fassen nunmehr die Gesamtheit aller Bereiche der Gattung Φ bei bestimmtem p ins Auge, d. i. also die Gesamtheit aller den unendlich fernen Punkt im Innern enthaltenden $2p$-fach zusammenhängenden, von $2p$ geschlossenen, paarweise regulär und eineindeutig mit entgegengesetztem Umlaufssinn aufeinander bezogenen regulären analytischen Linien begrenzten Bereiche. Wir wollen die *Einheit des Kontinuums der* Φ beweisen. D. h. für uns präziser folgendes: Wenn Φ_1 und Φ_2 irgend zwei Bereiche der Gattung Φ sind, so ist es möglich, durch stetige Veränderung der Begrenzungslinien und der Randsubstitutionen von dem Bereiche Φ_1 zu dem Bereiche Φ_2 zu gelangen, immer im Kontinuum der Φ bleibend. Es soll also, behaupten wir, in der Φ Mannigfaltigkeit zwischen Φ_1 und Φ_2 eine *Überführungslinie* Ω, wie wir uns ausdrücken wollen, existieren. Die Konstruktion dieser Linie Ω zwischen Φ_1 und Φ_2 ist die Aufgabe, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen. Bei der Lösung dieser Aufgabe haben wir mit Rücksicht auf die spätere Anwendung auch darauf zu achten, daß wir uns während der Überführung in jedem Moment ein Urteil über die Breite der um die Begrenzungslinien jeweilig existierenden $2p$ Flächenstreifen Λ bilden, daß wir insbesondere während der ganzen Überführung eine *durchgängig gültige Breite* dieser Streifen angeben können.

Das Verfahren, welches die gestellte Aufgabe löst, kann zweckmäßig als *Methode der Ringverschiebung* bezeichnet werden, weil der Hauptgedanke der Überlegung in der Heranziehung der Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche auf Kreisringflächen beruht, in welchen der Übergang von der einen zur andern Randlinie stetig mittels der konzentrischen Kreise als Zwischenglieder ausgeführt wird, wobei zugleich ein sich ähnlich mit sich selbst verändernder umgebender kreisringförmiger Flächenstreifen mitverschoben gedacht wird.

Es sei B ein von zwei geschlossenen regulären analytischen Linien begrenzter zweifach zusammenhängender schlichter Bereich der z-Ebene, in welcher wir unsere Deformation vornehmen wollen. Alsdann wird der Bereich B in folgender Weise auf einen Kreisring abgebildet. Man nehme der einfacheren Sprechweise halber, was auch im folgenden allein in Betracht kommt, an, daß der Bereich B den unendlich fernen Punkt weder im Inneren noch auf seiner Begrenzung enthält. Alsdann wird B von einer äußeren Begrenzungslinie s_2 und einer inneren Begrenzungslinie s_1 begrenzt. Man bestimme nun diejenige in B reguläre Potentialfunktion u, welche auf s_1 den Wert -1 annimmt und auf s_2 den Wert 0. Bildet man jetzt das Integral $\int\limits_{s_1} \frac{du}{dn} ds$, dn in der Richtung der inneren Normalen, d. h. der in den Bereich B hineinführenden Normalen genommen, so wird sich dafür ein positiver von 0 verschiedener Wert 2ω ergeben, welcher auf den

Wert 2π gebracht wird, indem man an Stelle der Funktion u die Funktion $\frac{u\pi}{\omega}$ betrachtet. Es sei v die zu u konjugierte Potentialfunktion. Alsdann vermittelt die Funktion $e^{\frac{\pi(u+iv)}{\omega}}$, welche in B eindeutig und von 0 und ∞ verschieden ist, eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen Kreisring, dessen äußerer der Linie s_2 entsprechender Begrenzungskreis der Einheitskreis ist, während der innere, der Linie s_1 entsprechende Begrenzungskreis mit dem Einheitskreise konzentrisch ist und den Radius $e^{-\frac{\pi}{\omega}}$ besitzt. In der Tat ergibt sich der genannte Charakter der Abbildung sofort durch Anwendung des Satzes von der Charakteristik des Randes, wenn man beachtet, daß die Begrenzungslinien s_1 und s_2 selbst in der Tat eineindeutig und mit demselben Umlaufssinn auf die erwähnten Kreislinien abgebildet werden.

Nach diesen Vorbemerkungen gehe ich nun zur Darlegung des *Ringverfahrens* selbst über. Die gestellte Aufgabe der Überführung des Bereichs Φ_1 in den Bereich Φ_2 wird in drei Schritten gelöst.

Der *erste Schritt* besteht darin, daß die Bereiche Φ_1 und Φ_2 je in einen Bereich $\overline{\Phi}_1$ und $\overline{\Phi}_2$ übergeführt werden, deren sämtliche Begrenzungslinien Vollkreise sind, wobei, allgemein zu reden, die Bezugssubstitutionen noch allgemein analytisch, noch nicht linear sein werden. Diese Überführung geschieht so.

Wir nehmen etwa die Begrenzungslinie L des Bereichs Φ_1. Diese Begrenzungslinie umschließt ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene. Innerhalb dieses Gebiets wählen wir eine beliebige, geschlossene Kreislinie K, welche mit L keinen Punkt gemeinschaftlich hat. Die Linien L und K begrenzen einen zweifach zusammenhängenden Bereich B, welchen wir den obigen Angaben gemäß auf einen Kreisring R einer Z-Ebene abbilden mit dem Einheitskreis als äußerem Begrenzungskreis. Jetzt werde in R und darüber hinaus das System der mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreise und das System der dazu orthogonalen geradlinigen Strecken der Z-Ebene konstruiert. Wir können dann in der Z-Ebene den äußeren Begrenzungskreis K_1 von R mit dem Radius 1 allmählich in den inneren Begrenzungskreis K_ϱ von R mit dem Radius ϱ übergehen lassen, indem wir ihn unter beständiger Verkleinerung eben die erwähnten konzentrischen Kreise zwischen K_1 und K_ϱ durchlaufen lassen. Damit ist ein bestimmter Überführungsprozeß bezeichnet, bei welchem auch die Bewegung jedes einzelnen Punktes völlig bestimmt ist, wenn festgesetzt wird, daß der einzelne Punkt je auf der auf den Nullpunkt gerichteten geradlinigen Strecke gleiten soll. Nunmehr beachten wir, daß der in der Z-Ebene definierte Überführungsprozeß sich vermöge der durch die Funktion $Z(z)$

definierten konformen Abbildung auf die z-Ebene überträgt und dort eine ganz bestimmte Deformation der Linie L in den Kreis K durch den Bereich B hindurch liefert, bei welcher auch die Bewegung jedes einzelnen Punktes vorgeschrieben ist.

Wir überlegen noch, ob bei der erwähnten Deformation eine gleichmäßige Streifenbreite für alle Bereiche Φ gewährleistet ist. Wir betrachten in der Z-Ebene irgend einen Kreis K_r mit dem Radius r, wobei $\varrho < r < 1$ sei. Alsdann ist K_r auf den Einheitskreis der Z-Ebene, genannt K_1, durch die Substitution $Z' = rZ$ bezogen, welche in der ganzen Z-Ebene regulär erklärt ist. Wir können nun eine positive Größe $\eta > 1$ so nahe an 1 wählen, daß die Funktion $z(Z)$ auch noch in dem durch die Ungleichheitsbedingungen $\frac{\varrho}{\eta} \leqq |Z| \leqq \eta$ definierten Ring $\overline{R}$ regulär erklärt ist und eine schlichte Abbildung vermittelt, bei welcher insbesondere den begrenzenden Kreises K_η und $K_{\frac{\varrho}{\eta}}$ des Ringes $\overline{R}$ zwei beziehungsweise L und K in der z-Ebene benachbart verlaufende Linien l und k entsprechen, welche ein zweifach zusammenhängendes, endliches, den Bereich B enthaltendes Gebiet b begrenzen, das die $2p-1$ weiteren Begrenzungslinien des Bereichs Φ ausschließt.

Wir bezeichnen mit R_r den in der Z-Ebene liegenden Kreisring, welcher durch die Ungleichheitsbedingungen $\frac{r}{\eta} \leqq |Z| \leqq r \cdot \eta$ erklärt ist, also inbezug auf die Kreislinie K_r zu sich selbst spiegelbildlich symmetrisch ist. Es ist dann R_r auf R_1 (d. i. R_r für $r = 1$), durch die Substitution $Z' = rZ$ bezogen, eine Beziehung, welche sich auf die z-Ebene überträgt, wobei der Linie K_r und dem Gebiete R_r die Linie k_r und das Gebiet b_r, beide in b enthalten, entsprechen.

Die Linie k_r ist auf L, welche Linie wir auch mit k_1 (d. i. k_r für $r = 1$) bezeichnen können, vermittelst einer im Gebiete b_r sicher regulären und dieses Gebiet schlicht auf b_1 abbildenden, analytischen Funktion bezogen. In völlig übersehbarer Weise verschiebt sich nun b_r stetig, wenn r die Werte von 1 bis ϱ durchläuft.

Wie wir soeben mit Linie L verfahren haben, können wir nacheinander auch mit den übrigen $2p-1$ Begrenzungslinien des Bereichs Φ_1, danach auch mit den Begrenzungslinien des Bereichs Φ_2 verfahren. Das Ergebnis ist, daß wir die Bereiche Φ_1 und Φ_2 in Bereiche $\overline{\Phi}_1$ und $\overline{\Phi}_2$ deformiert haben, deren Besonderheit darin besteht, daß die *Begrenzungslinien lauter Vollkreise* geworden sind.

Nunmehr vollführen wir den *zweiten Schritt*, welcher darin besteht, daß die Bereiche $\overline{\Phi}_1$ und $\overline{\Phi}_2$ in Bereiche mit *übereinstimmenden Begrenzungskreisen*, jedoch, allgemein zu reden, noch verschiedenen analytischen Bezugssubstitutionen übergeführt werden. Diese Überführung ist besonders einfach. Wir können nämlich zunächst eine Deformation vornehmen, bei welcher die $2p$ Begrenzungskreise des einen Bereichs den entsprechenden Begrenzungskreisen des zweiten Bereichs gleich groß werden. Wir brauchen dazu nur mit jedem der $4p$ Kreise eine geeignete ähnliche stetige Verkleinerung vorzunehmen mit dem Kreismittelpunkte als Ähnlichkeitszentrum. Hierbei ist unmittelbar auch die damit verbundene stetige Änderung der analytischen Bezugssubstitutionen gegeben. Sind $\overline{\Phi}_1'$ und $\overline{\Phi}_2'$ die nunmehr gefundenen Bereiche mit entsprechend gleich großen Begrenzungskreisen, so kann man durch Verschiebung der Kreise, wobei man sich die Randsubstitutionen auf den Kreisen markiert denken möge, den Bereich $\overline{\Phi}_1'$ in den Bereich $\overline{\Phi}_2'$ als solchen überführen. Nach der Überführung koinzidieren natürlich im allgemeinen nur die Begrenzungskreise als solche, nicht auch die auf ihnen erklärten analytischen Bezugssubstitutionen. Wir können auch so sagen: die beiden Bereiche $\overline{\Phi}_1$ und $\overline{\Phi}_2$ sind in einen und denselben von $2p$ Kreisen begrenzten Bereich $\overline{\overline{\Phi}}$ übergeführt, abgesehen von den Randsubstitutionen. Für den Bereich $\overline{\overline{\Phi}}$ sind die $2p$ Begrenzungskreise in bestimmter Weise gepaart und für jedes Paar auf zwei Weisen die analytischen Bezugssubstitutionen erklärt, sodaß wir, wenn $\overline{\overline{L}}_1, \overline{\overline{L}}_1', \overline{\overline{L}}_2, \overline{\overline{L}}_2', \cdots, \overline{\overline{L}}_p, \overline{\overline{L}}_p'$ die p Paare begrenzender Kreise sind, $2p$ Substitutionen haben $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \cdots, \varphi_p, \psi_p$, von welchen die beiden Substitutionen des α^{ten} Paares die Linie $\overline{\overline{L}}_\alpha$ in die Linie $\overline{\overline{L}}_\alpha'$ überführen.

Wir haben nun den *dritten Schritt* auszuführen. Dieser dritte Schritt besteht in der Ausführung einer Deformation der erwähnten analytischen Substitutionen in der Weise, daß schließlich φ_α in ψ_α übergeführt erscheint, wobei während der Überführung die jeweilige Substitution χ_α eine eineindeutige regulär analytische Abbildung des Kreises $\overline{L}_\alpha$ auf den Kreis $\overline{\overline{L}}_\alpha'$ liefern muß, welche beiden Kreise als fest zu denken sind.

Um diese Überführung vorzunehmen, bemerken wir, daß für das Linienpaar $\overline{\overline{L}}_\alpha, \overline{\overline{L}}_\alpha'$ sich die Aufgabe so fassen läßt: es soll die auf der Linie $\overline{\overline{L}}_\alpha'$ vermöge der beiden Beziehungen dieser Linie auf die Linie $\overline{\overline{L}}_\alpha$ erklärte Substitution dieser Linie $\overline{L}_\alpha'$ in sich in die identische Substitution übergeführt werden. Entsprechend ist die Aufgabe für die übrigen $p-1$ Kreispaare zu formulieren. Damit sind wir auf eine *Fragestellung* gekommen, welche wir nun für sich herausstellen, nämlich die folgende: Auf einem Kreise, den wir als Einheitskreis wählen können, ist eine eineindeutige reguläre analytische Verschiebung dieser Linie in sich erklärt. Man soll eine einparametrige stetige Veränderung dieser Substitution, wobei dieselbe während der Änderung in jedem Augenblick wieder eine eineindeutige reguläre Verschiebung des Einheitskreises in sich repräsentieren soll, so vornehmen, daß schließlich die identische Substitution gewonnen wird. Die einzelne analytische Verschiebung des Einheitskreises in sich von der betrachteten Art wird natürlich nicht nur auf der Peripherie des Einheitskreises als solcher existieren, sondern sie wird stets in einem gewissen, den Einheitskreis selbst enthaltenden Ringgebiete regulär erklärt sein, sodaß sie eine durchaus schlichte und endliche Abbildung dieses Rings liefert. Für die Behandlung der Frage kann man übrigens die Beschränkung auf Substitutionen, die den Einheitspunkt fest lassen, ohne weiteres einführen.

Wir bezeichnen den Einheitskreis der z-Ebene mit K_1 und einen mit ihm konzentrischen Kreis vom Radius r allgemein mit K_r. Ferner möge die als gegeben vorausgesetzte analytische Substitution auf dem Einheitskreise mit $\zeta = S(z)$ bezeichnet werden. Wir wählen eine Größe $\eta > 1$ so nahe an 1, daß auch noch in dem von K_η und $K_{\frac{1}{\eta}}$ begrenzten Kreisringe R_η die Funktion $S(z)$ regulär erklärt ist und eine schlichte und endliche Abbildung dieses Kreisrings auf einen endlichen Ring r_η (allgemein zu reden nicht Kreisring) vermittelt, dessen beide Begrenzungslinien mit k_η und $k_{\frac{1}{\eta}}$ bezeichnet werden mögen. Wir denken uns diesen Ring noch in einer besonderen ζ-Ebene gezeichnet. Die Substitution $\zeta = S(z)$ kann nun geradezu erklärt werden durch die Linie k_η in folgender Weise: Die Linie k_η begrenzt mit dem Einheitskreise der ζ-Ebene einen Ring. Dieser Ring kann nur auf eine Weise dergestalt auf einen den Einheitskreis der z-Ebene als inneren Begrenzungskreis enthaltenden Kreisring abgebildet werden, daß dabei der Einheitspunkt selbst wieder in den Einheitspunkt übergeht. Insofern kann also die Linie k_η zur Definition der Substitution $\zeta = S(z)$ dienen. Wir konstruieren nun in der ζ-Ebene einen Kreis k_ϑ mit dem Radius ϑ und wählen ϑ so groß, daß k_ϑ die Linie k_η vollständig umschließt. Den zweifach zusammenhängenden, von k_η und k_ϑ begrenzten Bereich der ζ-Ebene denken wir uns auf einen Kreisring abgebildet und vermöge dieser Abbildung gemäß unserem *Prinzip* der *Ringverschiebung* eine stetige Überführung der Linie k_η in den Kreis k_ϑ vorgenommen. Ist k_λ $(\eta < \lambda < \vartheta)$ eine während der Überführung auftretende Linie, so gehört zu k_λ eine bestimmte Substitution $S_\lambda(z)$, durch welche der vom Einheitskreise der z-Ebene und von K_λ ($\equiv$ Kreis mit dem Radius λ) begrenzte Ring der z-Ebene auf den ζ-Ring zwischen k_1 und k_λ unter Festhaltung des Einheitspunktes abgebildet wird. Es ist klar, daß, wenn k_λ in den Kreis k_ϑ übergegangen ist, die Substitution s_λ die identische Substitution geworden ist.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Substitution $S_\lambda(z)$ sich stetig mit k_λ ändert und auch die Breite des um den Einheitskreis herum bestehenden jeweiligen Abbildungsstreifens zu beurteilen. Beide Fragen erledigen sich aus der Konstruktion der Bezugssubstitutionen $S_\lambda(z)$. Bezeichnen wir zu dem Zwecke mit u_λ diejenige in der ζ-Ebene erklärte Potentialfunktion, welche auf dem Einheitskreise k_1 den Wert 0, auf der Linie k_λ den Wert 1 hat und in dem Ring zwischen k_1 und k_λ regulär und eindeutig ist, so wird die Größe λ des Radius, welchen bei der mit $S_\lambda(z)$ bezeichneten konformen Abbildung der k_λ in der z-Ebene entsprechende Kreis K_λ besitzt, durch das Integral $2\omega = \int\limits_{k_1} \frac{d u_\lambda}{dn} ds$ in der Gestalt $\lambda = e^{\frac{\pi}{\omega}}$ ausgedrückt. Da nun $u_\eta < u_\lambda < u_\vartheta$, weil k_λ zwischen k_η und k_ϑ liegt, so ergibt sich $\eta < \lambda < \vartheta$. D. h.: Die Substitutionen $S_\lambda(z)$, die sich bei der Deformation ergeben, sind alle in dem Kreisring R_η der z-Ebene regulär erklärt, welcher durch die Ungleichheitsbedingungen $\frac{1}{\eta} \leqq |z| \leqq \eta$ definiert ist. Hiermit ist zunächst ein Urteil über die Streifenbreite der analytischen Substitutionen $S_\lambda(z)$ gewonnen. Es handelt sich jetzt noch um den Nachweis der stetigen Änderung der Substitution $S_\lambda(z)$ während der Überführung. Für diesen Nachweis genügt es, die stetige Änderung des Potentials u_λ zu beweisen, wenn k_λ die vorgeschriebene stetige Variation ausführt. Es seien zu dem Zwecke k_λ und $k_{\lambda'}$ zwei benachbarte Kurven, die bei der Überführung vorkommen, und zwar möge $k_{\lambda'}$ die Kurve k_λ umschließen. Zur Beurteilung der Größe der Differenz $u_{\lambda'} - u_\lambda$ ist nur erforderlich die Abschätzung dieser Differenz auf der Linie k_λ. Auf k_λ hat u_λ den Wert 1, $u_{\lambda'}$ jedoch hat auf k_λ Werte, die sich von dem auf $k_{\lambda'}$ angenommenen Werte 1 um einen beliebig klein werdenden Betrag unterscheiden, wenn $k_{\lambda'}$ und k_λ hinreichend nahe aneinander liegen, weil alle Funktionen u_λ eine angebbar endliche Steilheit des Abfalls besitzen. Das ergibt sich sofort, wenn wir die Funktionen*) u_λ auf die Z-Ebene überpflanzt denken, auf welche der Ring zwischen k_η und k_ϑ als Kreisring abgebildet worden ist, um von da aus zur Definition der Linien k_λ zu gelangen. Man beachte einerseits die vorstehenden Entwicklungen, andererseits den Satz, daß für eine Potentialfunktion, welche in einem Kreise dem absoluten Betrage ihrer Werte nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleibt, vermöge des Poissonschen Integrales auch Schranken für den absoluten Betrag der Ableitungen hergeleitet werden können in einem zu dem ersteren konzentrischen Kreise, Schranken, welche nur durch die Radien der genannten beiden Kreise und durch die angenommene Schranke M bestimmt werden. Auf Grund dieses Satzes ge-

*) Der Ausdruck „Funktionen u_λ“ statt „Funktion u_λ“ soll bedeuten, daß wir u in seiner Abhängigkeit von dem Parameter λ betrachten, also eine Funktionenschar.

langen wir sofort zum Ziele, wenn wir, wie gesagt, die Betrachtung in die Z-Ebene verlegen und dort das überpflanzte Potential u_λ über den der Linie k_λ entsprechenden Kreis $\varkappa_\lambda$ der Z-Ebene analytisch fortsetzen, wobei dann u_λ in einem bestimmten Bezirke unterhalb 2 bleibt, welcher Bezirk als ein $\varkappa_\lambda$ einbettender konzentrischer Kreisring gewählt werden kann, der in bezug auf $\varkappa_\lambda$ zu sich selbst spiegelbildlich symmetrisch ist und dessen Radienverhältnis für alle k_λ fest gewählt werden kann.

Hiermit ist vollständig der Weg gezeichnet, um den Bereich Φ_1 in den Bereich Φ_2 innerhalb des Φ-Kontinuums überzuführen, da beide Bereiche in einen und denselben Φ-Bereich übergeführt worden sind. Wir bezeichnen die gefundene Überführungslinie von Φ_1 nach Φ_2 hin als die *Überführungslinie* Ω im Kontinuum der Φ.

Wir hatten bereits oben bemerkt, daß es von Wichtigkeit sei zu konstatieren, daß wir auf Grund des Überführungsmodus imstande sind, längs der ganzen Überführungslinie Ω mittels bestimmter Abschätzungsformeln die Größe und Gestaltsverhältnisse aller der Überführungslinie angehörenden Bereiche Φ zu beschreiben. In der Tat sehen wir ohne weiteres, daß längs der ganzen Linie Ω die Begrenzungslinien sämtlicher Bereiche Φ in einem endlichen, direkt bestimmbaren Bezirke bleiben. Wir bemerken ferner sofort die Möglichkeit der unmittelbaren Angabe einer oberen und unteren Schranke für die Distanzen der $2p$ Begrenzungslinien untereinander, sowie für ihre größten Durchmesser (Spannweiten). Schließlich bemerken wir noch folgendes: Wir können jede der Linien $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \cdots, L_p^{(1)}$, das sind die p ersten Begrenzungslinien des Bereichs Φ_1, je in ein ringartiges Gebiet (*Grundring*) so einbetten, daß nicht nur die Linien $L_1^{(1)'}, L_2^{(1)'}, \cdots, L_p^{(1)'}$ und damit die analytischen Bezugssubstitutionen des Bereichs Φ_1, sondern auch alle $2p$ Begrenzungslinien jedes Bereichs Φ der Überführungslinie Ω nebst den Bezugssubstitutionen aus jenen p *Grundringen* dadurch entstehen, daß dieselben in ihrer Vollständigkeit gewissen schlichten regulären Abbildungen unterworfen werden, woraus unmittelbar die gewünschten generellen Schranken mittels des Verzerrungssatzes hergeleitet werden können, so namentlich eine allgemein gültige Streifenbreite für die Bezugssubstitutionen (welche übrigens auch direkt durch das Prinzip der Ringverschiebung, wie wir dasselbe zur Anwendung gebracht haben, gewährleistet wird). Wir wollen in dieser Beziehung folgende Folgerung aus dem Verzerrungssatze nennen.

Satz (Folgerung aus dem Verzerrungssatze): Es sei B ein schlichter endlicher zweifach zusammenhängender Bereich, innerhalb dessen eine ihn in zwei zweifach zusammenhängende Bereiche β_1 und β_2 zerlegende geschlossene Linie L verläuft. Der Bereich B werde irgend einer schlichten eineindeutigen endlichen konformen Abbildung unterworfen, bei welcher B, L, β_1, β_2 in B', L', β_1', β_2' übergeht. Es sei d' der kürzeste Abstand der Linie L' von der Begrenzung des Bereichs B', ferner s' der Umfang oder auch die Spannweite der Linie L'. Alsdann bleibt das Verhältnis $\frac{d'}{s'}$ zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken

$$q < \frac{d'}{s'} < Q,$$

welche von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängig sind.

Der Beweis ergibt sich mit wenigen Strichen aus dem Verzerrungssatze. Denkt man sich die Linie L in einen zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen β eingebettet, dessen beide Begrenzungslinien mit der Begrenzung von B keinen Punkt gemeinschaftlich haben, so besagt der Verzerrungssatz, daß der Quotient $|f'(z')| : |f'(z'')|$, unter f' die Ableitung der Abbildungsfunktion, unter z' und z'' irgend zwei Punkte des Bereichs β verstanden, zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken bleibt, die von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängig sind:

$$\bar{q} < \frac{|f'(z')|}{|f'(z'')|} < \bar{Q}.$$

Hieraus ist der obige Satz zu entnehmen.

§ 2.

Die stetige Änderung der zu Φ gehörenden Abelschen Integrale erster Art in Abhängigkeit von Φ.

Wir haben in § 1 nur die Bereiche Φ selbst untersucht. Nunmehr wollen wir unsere Aufmerksamkeit den zu Φ gehörenden Funktionen zuwenden, insbesondere den Abelschen Integralen erster Art. Für diese Integrale wollen wir die Stetigkeit ihrer Änderung beweisen, wenn Φ stetig abgeändert wird, also z. B. wenn Φ die Überführungslinie Ω von dem Bereiche Φ_1 zu dem Bereiche Φ_2 durchläuft, oder wenn Φ unter der Voraussetzung speziell linearer Ränderzuordnung dadurch modifiziert wird, daß man die p linearen Substitutionen von einem Ausgangssystem aus frei variiert. Wir werden unten die stetige Änderung der Abelschen Integrale gerade mit Bezug auf die genannten beiden Variationsmöglichkeiten benützen.

Wir erinnern zunächst an die Bezeichnungen. Die $2p$ paarweise einander zugeordneten Begrenzungslinien des Bereichs Φ bezeichnen wir mit $L_1, L_1', L_2, L_2', \cdots, L_p, L_p'$. Der unendlich ferne Punkt ist innerer Punkt des Bereichs Φ. Die erwähnten Linien sind lauter geschlossene reguläre analytische Linien. Die p analytischen Bezugssubstitutionen mögen mit $S_1(z), S_2(z), \cdots, S_p(z)$ bezeichnet werden.

Nach den Schwarz-Neumannschen kombinatorischen Methoden läßt sich entsprechend dem α^{ten} Begrenzungslinienpaare eine in Φ reguläre und eindeutige Potentialfunktion u_α finden, welche gegenüber den Substitutionen $S_1, S_2, \cdots, S_{\alpha-1}, S_{\alpha+1}, \cdots, S_p$ ungeändert bleibt, gegenüber der Substitution S_α hingegen eine Vermehrung um den konstanten Wert 1 erfährt. Das erwähnte Verhalten gegenüber den Bezugssubstitutionen wird dabei so verstanden, daß dasselbe nicht nur längs der Begrenzungslinien selbst statt hat, sondern darüber hinaus in gewissen Streifen Λ (vgl. S. 53), in welchen die Substitutionen erklärt sind. Die Funktion u_α ist demnach gemäß diesen Substitutionen ein Stück über die $2p$ Begrenzungslinien hinaus analytisch fortsetzbar. Wird für u_α noch die Bedingung gestellt, daß der Wert dieses Potentials im unendlich fernen Punkt null sein soll so ist u_α durch seine angegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt, weil die Annahme zweier derartiger Funktionen eine Differenzfunktion w liefern würde, welche gegenüber allen p Substitutionen ungeändert bleibt, dazu in Φ eindeutig ist und im Unendlichen verschwindet. Für diese Funktion w ergibt sich aber, wenn jetzt und im folgenden allgemein mit $\underset{A}{D}(f)$ das über einen Bereich A erstreckte Dirichletsche Integral

$$\underset{A}{D}(f) = \iint\limits_A \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) dx\, dy$$

bezeichnet wird, daß

$$\underset{A}{D}(w) = \sum_{\nu=1}^{p} \int\limits_{L_\nu} w \frac{dw}{dn} ds - \sum_{\nu=1}^{p} \int\limits_{L'_\nu} w \frac{dw}{dn} ds = 0$$

ist, weil $w \frac{dw}{dn} ds$ für zugeordnete Randelemente denselben Wert ergibt. Damit ist gezeigt, daß w konstant, also $= 0$ ist, weil dieser konstante Wert im Unendlichen 0 ist.

Zu u_α gehört ein konjugiertes Potential v_α. Um die p konjugierten Potentiale v_α zu normieren, denken wir uns, wie in Figur 2 angedeutet, p Querschnitte $Q_1, \cdots, Q_p$ konstruiert, deren α^{ter} eine Verbindung zwischen zwei zugeordneten Punkten des α^{ten} Randkurvenpaares herstellt. Die auf diese Weise in eine p-fach zusammenhängende Fläche verwandelte Fläche Φ möge mit φ bezeichnet werden. Die Funktion v_α ist nun in φ dadurch eindeutig normiert, daß man festsetzt, es soll v_α im unendlich fernen Punkte verschwinden. Die Funktion v_α ist in Φ sicher nicht eindeutig, vielmehr besitzt sie mindestens längs eines der p Querschnitte einen von 0 verschiedenen Periodizitäts-

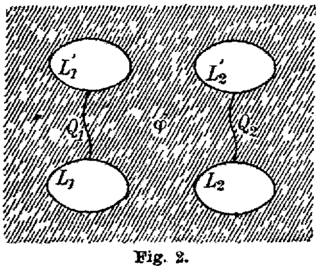


Fig. 2.

modul. In der Tat würde andernfalls $u_\alpha + iv_\alpha$ eine in Φ eindeutige Funktion W sein, welche sich gegenüber den Substitutionen nur um gewisse additive Konstanten ändert. Man hätte nun

$$\underset{\Phi}{D}(u_\alpha) = \sum \int_{L_\nu} u_\alpha \, dv_\alpha - \sum \int_{L'_\nu} u'_\alpha \, dv_\alpha$$

oder, wie sich bei Vergleichung zugeordneter Randelemente ergibt,

$$\underset{\Phi}{D}(u_\alpha) = \int_{L_\alpha} 1 \, dv_\alpha = 0.$$

Wir bemerken jetzt weiter, daß auch keine lineare homogene Kombination der v_α, etwa $\sum c_\nu v_\nu$, eine in Φ eindeutige Funktion liefern kann, da alsdann die Funktion $\sum (c_\nu u_\nu + i c_\nu v_\nu)$ eine in Φ eindeutige analytische Funktion W wäre, welche sich nur gegenüber den Randsubstitutionen und zwar um additive Konstanten ändert. Es ergibt sich hieraus, daß die Determinante Δ der p Systeme von je p Periodizitätsmoduln, welche den p Funktionen v_α mit Bezug auf die p Querschnitte Q zukommt, von 0 verschieden ist. Wir bemerken nun weiter, daß die $2p$ Funktionen $u_1, \cdots, u_p$, $v_1, \cdots, v_p$, welche in φ jedenfalls sämtlich eindeutig sind, in *reellem Sinne* genommen, linear unabhängig sind. In der Tat würde das Bestehen einer linearen Gleichung bedeuten, daß für die betreffende lineare Verbindung sowohl die Periodizitätsmoduln an den Q als auch die den Bezugssubstitutionen entsprechenden Periodizitätsmoduln verschwinden. Hieraus aber folgt bei Betrachtung der Q, daß die eingehende Kombination der v für sich verschwinden muß, also die Koeffizienten derselben alle 0 sein müssen. Darnach ist dann auch klar, daß die Koeffizienten der u sämtlich verschwinden müssen.

Nunmehr ergibt sich, daß die p Integralfunktionen

$$J_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha, \qquad [\alpha = 1, 2, \cdots, p],$$

die im unendlich fernen Punkte sämtlich verschwinden und in φ eindeutig sind, im *komplexen Sinne* linear unabhängig sind. Denn die Annahme einer Relation der Form $\sum (c_\alpha + ic'_\alpha) J_\alpha = 0$ würde bei Trennung des Reellen und Imaginären das Verschwinden aller Größen c und c' zur Folge haben. Jeder Funktion J_α entspricht ein System von p Periodizitätsmoduln, die den Querschnitten Q zugeordnet sind. Die Determinante Δ' dieser p Systeme von Größen ist von 0 verschieden, da sonst eine nicht verschwindende lineare Verbindung der J existieren würde, die in Φ eindeutig ist.

Ist jetzt J irgend ein zu Φ gehörendes Integral erster Art, das im Unendlichen verschwindet und in φ selbstverständlich eindeutig ist, so läßt sich dasselbe als lineare homogene Verbindung der J_α darstellen, wobei die Koeffizienten aus der Vergleichung der Perioden von J an den Querschnitten Q mit denen der J_α durch lineare Gleichungen mit der nicht verschwindenden Determinante Δ' ermittelt werden. Wir bemerken auch auf Grund derselben Überlegungen, daß nach Vorgabe eines Systems von p komplexen endlichen Größen, die nicht alle 0 sind, ein und nur ein im betrachteten Sinne zugehörendes Integral J vorhanden ist, welches nämlich längs den p Querschnitten Q die genannten p Größen als Periodizitätsmoduln besitzt. Indem wir ein solches Integral durch die genannten p festgewählten Größen normiert denken, können wir J als eine Funktion von Φ betrachten und demgemäß mit $J(\Phi)$ bezeichnen. Eine derartige Fixierung hätte zweckentsprechend auch dadurch stattfinden können, daß die $2p$ reellen Periodizitätsmoduln des reellen Teiles von J am Rande von φ festgehalten werden. Wir wollen jedoch die vorher genannte Fixierung für die Folge zugrunde legen. Alsdann gehen wir jetzt dazu über nachzuweisen, daß $J(\Phi)$ *sich mit* Φ *stetig ändert.*

Auf Grund der vorhergehenden Bemerkungen, die wir, obwohl dieselben nichts grundsätzlich Neues enthalten, hier im Zusammenhange zweckmäßig vorzubringen glaubten, schließen wir, daß der erwähnte, von uns jetzt zu führende Nachweis der Stetigkeit von $J(\Phi)$ als erbracht gelten kann, wenn es gelungen ist, die stetige Änderung der p Potentiale u_α nachzuweisen, da ihre stetige Änderung die stetige Änderung der v_α und damit auch die stetige Änderung aller Perioden sowie der Determinanten Δ und Δ' bedingt. Es genügt dazu wiederum die Beschränkung auf eine der Funktionen u_α, da der Nachweis für die anderen in gleicher Weise möglich sein wird. Wir wählen u_1 und bezeichnen es für diese Untersuchung einfach mit u oder $u(\Phi)$.

Wir machen zunächst eine Abschätzung der Größe $\underset{\Phi}{D}(u)$; und zwar ist das Wesentliche, eine Schranke zu ermitteln, welche bei gewissen nicht zu großen Veränderungen des Bereichs Φ bestehen bleibt, d. h. eine gleichmäßige Abschätzung der Größe $\underset{\Phi}{D}(u)$ für veränderlich vorgestelltes Φ. Diese Schranke ergibt sich mittels der Minimaleigenschaft der Funktion u in folgender Weise. Es werde um L_1' ein Ring R konstruiert, begrenzt von den beiden Linien λ und λ'. Die Fläche dieses Rings soll, wie in der schematischen Figur 3 angedeutet ist, keine der Begrenzungslinien L treffen und alle Begrenzungslinien außer L_1' ausschließen. Wir bezeichnen nun mit $h = u + w$ diejenige in Φ eindeutige, stückweise potentialartige Funktion, welche erstens in dem Gebiete R'' zwischen λ' und L_1' den konstanten Wert 1 hat, zweitens in

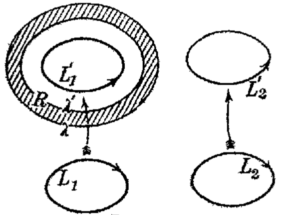


Fig. 3.

dem Ring R zwischen λ' und λ mit derjenigen Potentialfunktion identisch ist, welche in R eindeutig und regulär ist, auf λ den Wert 0 und auf λ' den Wert 1 hat, drittens in dem Restgebiete $R' = \Phi - (R + R')$ identisch gleich 0 ist. Man hat nun

$$\underset{\Phi}{D}(u+w) = \underset{\Phi}{D}(u) + \underset{\Phi}{D}(w) + 2\iint_{\Phi}(u_x w_x + u_y w_y)\,dx\,dy.$$

Das letzte Integral gibt, durch partielle Integration umgeformt, den Wert $\sum \int w \frac{du}{dn} ds$, die Summe erstreckt über sämtliche $2p$ Begrenzungslinien von Φ. Dieser Wert ist also 0, weil entsprechende Integralelemente sich fortheben. Demnach ist

$$\underset{\Phi}{D}(u+w) = \underset{\Phi}{D}(u) + \underset{\Phi}{D}(w),$$

also

$$\underset{\Phi}{D}(u) < \underset{\Phi}{D}(h).$$

Der Wert der Größe $\underset{\Phi}{D}(h)$ ist aber gleich $\underset{R}{D}(h)$, also vermöge partieller Integration gleich $\int\limits_{\lambda} \frac{dh}{dn} ds = M$. Hiermit ist für $\underset{\Phi}{D}(u)$ eine obere Schranke M gefunden, welche bei nicht zu starker Änderung des Bereichs Φ gültig bleibt.

Aus der Abschätzung des Integrals $\underset{\Phi}{D}(u)$ wollen wir nun eine Abschätzung des Maximalwertes des absoluten Betrages der Funktion u selbst im Gebiete Φ herleiten. Zu dem Zwecke denken wir uns jeder der $2p$ Begrenzungslinien benachbart innerhalb Φ eine entlang der betreffenden Linie laufende zweite Linie gezogen. Diese Linien bezeichnen wir mit $l_1, l_1', \cdots, l_p, l_p'$. Wir gewinnen so $2p$ zweifach zusammenhängende Flächenstreifen $f_1, f_1', \cdots, f_p, f_p'$. Die Größen dieser $2p$ Flächenstreifen wollen wir so weit einschränken, daß auf f_α die Substitution S_α und auf f_α' die inverse S_α^{-1} angewandt werden kann und zu einer schlichten Nebenlagerung des Bildes neben den Bereich Φ führt. Wir erhalten dadurch $2p$ Bildstreifen außerhalb Φ, jedoch jeder an eine Begrenzungslinie von Φ anschließend. Diese Bildstreifen mögen mit $g_1, g_1', \cdots, g_p, g_p'$ bezeichnet werden, und zwar sollen allgemein f_α und g_α', sowie f_α' und g_α Bilder voneinander sein. Es wird dann g_α nach außen von der Linie L_α und g_α' nach außen von der Linie L_α' begrenzt.

Die Funktion u kann auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung auch in den genannten $2p$ Flächenstreifen erklärt werden. Wir bemerken, daß $\underset{g_\alpha}{D}(u) = \underset{f_\alpha'}{D}(u)$ und $\underset{g_\alpha'}{D}(u) = \underset{f_\alpha}{D}(u)$ ist. Diese Werte sind demnach zusammen kleiner als der Wert $\underset{\Phi}{D}(u)$, welcher seinerseits kleiner als M abgeschätzt wurde. Bezeichnen wir nun mit Φ_+ den Bereich Φ, vergrößert um die $2p$ Flächenstücke g_α und g_α', so hat man

$$\underset{\Phi_+}{D}(u) < 2M.$$

Jetzt möge mit B ein $2p$-fach zusammenhängendes Teilgebiet von Φ_+ bezeichnet werden, welches den Bereich Φ vollständig enthält und dessen Begrenzungslinien je in einem der $2p$ Zusatzstreifen verlaufen, ohne jedoch die Begrenzung dieser Zusatzstreifen zu treffen. Für diesen Bereich B können wir eine obere Schranke der Funktion $u(\Phi)$ herleiten, welche, wie wir sofort bemerken, beim Übergange von Φ zu einem hinreichend benachbarten Bereiche Φ' erhalten bleibt, wobei B nicht mit verändert werden soll. Um diese Abschätzung zu gewinnen, dient uns folgender, auch von Herrn Courant (Diss. Gött. 1910)*) gefundener Hilfssatz, welchen ich in derselben Weise in meiner „4. Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“ (Göttinger Nachrichten 1909) und in der Abhandlung „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, I. Teil“ (Journal für Mathematik 138, S. 222) entwickelt habe und welcher wegen seiner Einfachheit und Wichtigkeit auch hier entwickelt werden möge.

Hilfssatz: Es sei $\varphi(x, y)$ irgend eine innerhalb eines Kreises K vom Radius R regulär und eindeutig erklärte Potentialfunktion, für welche der Wert $\underset{K}{D}(\varphi)$ des Dirichletschen Integrals kleiner als G ist. Alsdann bleibt, wenn k ein mit K konzentrischer Kreis mit dem Radius r ist, die Wertschwankung der Funktion φ in k unterhalb einer nur von r, R und G abhängenden Schranke g. Als Wertschwankung einer Funktion in diesem Bereiche bezeichnen wir dabei den Unterschied zwischen dem algebraisch größten und kleinsten Werte, welchen die Funktion in dem Bereiche annimmt.

Beweis: Zum Beweise ist erforderlich zu zeigen, daß in k die in irgend einer Richtung genommene Ableitung $\frac{d\varphi}{dv}$ der Funktion φ unterhalb einer Schranke γ bleibt, welche nur von r, R, G abhängt. Man hat für irgend eine Stelle (x, y) in K den Satz, daß der Wert $\varphi(x, y)$ das arithmetische Mittel der von der Funktion φ auf jedem Kreise mit dem Punkte (x, y) als Mittelpunkt angenommenen Werte ist, also auch das flächenhaft erstreckte arithmetische Mittel der von der Funktion im Innern jedes derartigen Kreises angenommenen Werte. Wählen wir für jeden Punkt (x, y)

*) Mit geringen Veränderungen, u. a. auch an der hier in Betracht kommenden Stelle, abgedruckt in Math. Ann. 71 (1911).

in k den zugehörenden Kreis als einen Kreis vom Radius $\frac{R-r}{2}$, so liegt dieser Kreis für alle Punkte von k innerhalb des Kreises K. Die Größe $\frac{d\varphi}{d\nu}$ ist bei festgehaltener Differentiationsrichtung auch eine Potentialfunktion. Indem wir auf dieselbe den letzterwähnten Mittelwertsatz anwenden in Erstreckung über den gewählten Kreis und bemerken, daß die unter dem Integralzeichen stehende Größe

$$\frac{d\varphi}{d\nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(x,\nu)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(y,\nu)$$

dem absoluten Betrage nach abschätzungsweise kleiner gesetzt werden kann als $|\varphi_x|^2+1+|\varphi_y|^2+1$, da der absolute Betrag der Kosinusse kleiner als 1 ist und außerdem stets $|a|<a^2+1$ ist, ergibt sich sofort die gewünschte Schranke γ und damit g.*)

Der soeben bewiesene Hilfssatz liefert jetzt eine obere Schranke für den absoluten Betrag der Funktion u im ganzen Bereiche B. Um diese Schranke zu gewinnen, haben wir nur nötig, den Bereich B durch endlich viele Kreisflächenstücke vollständig soweit zu überdecken, daß jedenfalls alle Punkte des Bereichs B als innere Punkte solcher Kreisflächen erscheinen. Wir brauchen dann nur unsern Hilfssatz kettenförmig zur Anwendung zu bringen, um, ausgehend von dem unendlich fernen Punkte, in welchem die Funktion u den Wert 0 hat, die gewünschte im ganzen Bereiche B gültige Schranke zu erhalten, unter Bezugnahme auf die vorher bewiesene Tatsache, daß innerhalb aller dieser Kreisflächen, die ja nur Teile des Bereichs Φ_+ sind, der Wert des Dirichletschen Integrals unterhalb der oben gefundenen Größe $2M$ bleibt. Die für $|u(\Phi)|$ innerhalb B gefundene Schranke möge mit N bezeichnet werden. Wir bemerken nochmals, daß diese Schranke bei hinreichend kleiner Veränderung des Bereichs Φ in Kraft bleibt.

Sei nun Φ' ein Nachbarbereich des Bereichs Φ, u' die an Stelle von u tretende Potentialfunktion. Dann wollen wir jetzt schließlich zeigen, daß die Differenz $u'-u$ im Bereiche B eine gleichmäßig unendlich klein werdende Größe wird, wenn Φ' sich dem Bereiche Φ unbegrenzt nähert.

Es ist auf Grund unserer Begriffsbestimmung ganz klar, was wir unter unbegrenzter Annäherung des Bereiches Φ' an Φ zu verstehen haben. Wir werden diesen Begriff unten nur in den oben S. 61 hervorgehobenen zwei Fällen gebrauchen, in welchem er quantitativ genau präzisiert ist.

*) Selbstverständlich kann übrigens g als eine nur von G und $\frac{r}{R}$ abhängende Größe bestimmt werden, weil eine Potentialfunktion ihre Eigenschaft als solche bei Ähnlichkeitstransformation der (x, y) Ebene wie bei jeder konformen Transformation behält und auch der Wert des Dirichletschen Integrals dabei ungeändert bleibt.

Um zu einer Abschätzung der Größe $u' - u$ zu gelangen, bemerken wir, daß auf Grund unseres Hilfssatzes S. 66 die Möglichkeit besteht, eine solche Abschätzung dann auszuführen, wenn eine Abschätzung für den Wert des Dirichletschen Integrals der Funktion $u' - u$ gefunden ist. Schreiten wir daher zunächst zu einer solchen Abschätzung. Es ist

$$\underset{\Phi}{D}(u' - u) = \sum \int (u' - u) \frac{d(u' - u)}{d\nu} d\sigma,$$

wobei die Summe Σ eine Summe von $2p$ Randintegralen bedeutet, die über die $2p$ Begrenzungslinien des Bereichs Φ erstreckt sind. Für uns kommt es darauf an, zu zeigen, daß $\underset{\Phi}{D}(u' - u)$ eine Größe ist, welche unendlich klein wird, wenn Φ' sich unbegrenzt Φ nähert. Dies wiederum ist auf Grund der Darstellung durch die Summe Σ dann erwiesen, wenn gezeigt ist, daß die Größe $(u' - u)\frac{d(u' - u)}{d\nu} d\sigma$ eine für alle Randlinienelemente im Verhältnis zur Größe $d\sigma$ gleichmäßig unendlich klein werdende Größe ist, sofern man immer je zwei vermöge der Randsubstitutionen einander entsprechende Integralelemente der erwähnten Form vereinigt. Bezeichnen wir zu dem Zwecke mit P einen Randpunkt von Φ, mit P' den Bildrandpunkt auf der zugeordneten Begrenzungslinie von Φ, so hat man

$$u(P') = u(P) + 1 \quad \text{oder} \quad u(P') = u(P),$$

je nachdem P auf dem ersten oder einem der weiteren $p - 1$ Randlinienpaare angenommen ist. Ferner hat man entsprechend

$$u'(P') = u'(P) + 1 + \varepsilon \quad \text{oder} \quad u'(P') = u'(P) + \varepsilon,$$

wobei mit ε eine Größe bezeichnet ist, welche gleichmäßig für alle P unendlich klein wird, wenn Φ' sich Φ unbegrenzt nähert. In der Tat bestehen für u' ja dieselben Relationen wie für u, sofern man unter P' denjenigen Bildpunkt versteht, welcher dem Punkte P vermöge der betreffenden Randsubstitutionen des Bereichs Φ' entspricht. Dieser neue Punkt P', den wir für den Augenblick etwa mit P'' bezeichnen wollen, liegt nun dem erstgenannten Punkte P' gleichmäßig infinitesimal benachbart, wie unmittelbar aus unserem Begriff der infinitesimalen Annäherung des Bereichs Φ' an den Bereich Φ folgt. Der Wertunterschied zwischen $u'(P'')$ und $u'(P')$ ist aber eine gleichmäßig infinitesimale Größe für die betrachtete Annäherung, weil die Funktion u' in dem ganzen Bezirke B unterhalb der oben gefundenen festen Schranke N bleibt, sodaß, wie aus dem Poissonschen Integral geschlossen werden kann, die Ableitungen der Funktion u' in B, insbesondere in der Umgebung der $2p$ Begrenzungslinien des Bereichs Φ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer für alle Nachbarbereiche gleichmäßig bestimmbaren festen Schranke bleiben.

Aus den oben aufgestellten Gleichungen folgt nun durch Subtraktion

$$(*)\qquad (u' - u)_{P'} - (u' - u)_P = \varepsilon,$$

gültig längs allen p Randlinienpaaren des Bereichs Φ.

Wir bemerken weiter, daß die soeben mit Bezug auf P als Randpunkt gemachten Bemerkungen ohne weiteres in Kraft bleiben, wenn wir P und entsprechend P' in der Nachbarschaft der Randlinien des Bereichs Φ variabel denken. Die Größe ε bekommt dann eine noch weitere Bedeutung, insofern sie nun eine für die erwähnte Nachbarschaft der Begrenzungslinien des Bereichs Φ gleichmäßig unendlich klein werdende Größe ist. Wir haben dann wieder die Relationen $(*)$, wobei ε als eine Potentialfunktion des Punktes P aufgefaßt werden kann, welche eben gleichmäßig unendlich klein wird in der genannten Nachbarschaft der Begrenzungslinie. Hieraus folgt nun aber sofort die Gleichung

$$(**)\qquad \frac{d(u' - u)}{d\nu'}\, d\sigma' - \frac{d(u' - u)}{d\nu}\, d\sigma = \frac{d\varepsilon}{d\nu}\, d\sigma,$$

wenn mit $d\nu'$ und $d\sigma'$ die vermöge der Randsubstitutionen den Elementen $d\nu$ und $d\sigma$ entsprechenden Elemente bezeichnet werden. Die Größe $\frac{d\varepsilon}{d\nu}\, d\sigma$ kann aber jetzt gesetzt werden

$$(**)\qquad \frac{d\varepsilon}{d\nu}\, d\sigma = \eta\, d\sigma,$$

wobei mit η eine für alle $2p$ Begrenzungslinien gleichmäßig unendlich klein werdende Größe bezeichnet ist. Auf Grund der gefundenen Formeln $(*)$ und $(**)$ finden wir unter Benutzung der früher aufgestellten Abschätzung $|u' - u| < N$, daß in der Tat

$$\underset{\Phi}{D}(u' - u) = \vartheta$$

gesetzt werden kann, unter ϑ eine bei infinitesimaler Annäherung des Bereichs Φ' an Φ unendlich klein werdende Größe verstanden.

Jetzt ergibt sich wieder durch kettenförmige Anwendung des Hilfssatzes S. 66, daß $|u' - u|$ zunächst im Gebiete Φ_- eine gleichmäßig infinitesimale Größe ist, wenn mit Φ_- ein nicht bis an die Begrenzung von Φ sich erstreckendes Teilgebiet von Φ bezeichnet wird. Um für das ganze Gebiet Φ und darüber hinaus den Schluß zu machen, bemerken wir, daß die Funktion $u' - u$ in den Bereichen $g_1, g_1', g_2, g_2', \cdots, g_p, g_p'$ dieselben Werte annimmt wie in den Bereichen $f_1, f_1', \cdots, f_p, f_p'$, abgesehen von einer gleichmäßig bestimmbaren infinitesimalen Größe. Daraus ergibt sich, daß die Werte $\underset{g}{D}(u' - u)$, (die Integrale erstreckt über die Flächen g_α, g_α'), jedesmal einen Wert liefern, welcher sich von dem entsprechenden Werte des Integrales erstreckt über f_α' und f_α um eine infinitesimale Größe unterscheidet. Diese letzteren Integralwerte sind aber jeder kleiner als $\underset{\Phi}{D}(u'-u)$, welcher Wert ja bewiesenermaßen eine infinitesimale Größe ist. Daraus folgt, daß

$$\underset{B}{D}(u'-u) = \vartheta'$$

gesetzt werden kann, unter ϑ' eine infinitesimale Größe verstanden. Aus dieser Gleichung nun wiederum folgt, daß

$$\underset{B}{\mathrm{Max}}\,|u'-u| = \vartheta''$$

gesetzt werden kann, unter ϑ'' eine infinitesimale Größe verstanden. D. h. also: Der Unterschied $|u'-u|$ wird im ganzen Gebiete B gleichmäßig unendlich klein, wenn Φ' sich unbegrenzt Φ nähert.

Stetigkeitsbeweis mittels des allgemeinen Konvergenzprinzips. Es ist instruktiv zu sehen, wie der im vorhergehenden mit Hilfe der Minimaleigenschaft geführte Stetigkeitsbeweis mittels des allgemeinen Konvergenzprinzips ohne Hinzunahme sonstiger Hilfssätze erbracht werden kann. Dieser neue Stetigkeitsbeweis verläuft indirekt.

Wir wollen zunächst dartun, daß das Maximum der Funktion $u(\Phi)$ in Φ, welches wir mit μ bezeichnen wollen, unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, wenn Φ sich stetig ändert. Zu dem Zwecke werde angenommen, daß dem nicht so sei. Alsdann könnten wir eine Folge von Bereichen Φ bestimmen, sie mögen mit

$$\Phi', \Phi'', \Phi''', \cdots$$

bezeichnet werden, welche gegen den Ausgangsbereich Φ konvergieren und für welche die bezüglichen Maxima

$$\mu', \mu'', \mu''', \cdots,$$

d. s. die Maxima des absoluten Betrages der zugehörenden Funktionen

$$u', u'', u''', \cdots$$

bezw. innerhalb $\Phi', \Phi'', \Phi''', \cdots$ gegen ∞ konvergieren. Wir bemerken, daß innerhalb B die Maxima derselben Funktionen bezüglich unterhalb $\mu'+1$, $\mu''+1$, $\mu'''+1$, $\cdots$ bleiben. Die Funktionen

$$\left|\frac{u'}{\mu'}\right|, \left|\frac{u''}{\mu''}\right|, \left|\frac{u'''}{\mu'''}\right|, \cdots$$

haben jetzt als Maximalwerte sämtlich den Wert 1, jedoch die Periodizitätsmoduln $\frac{1}{\mu'}, \frac{1}{\mu''}, \frac{1}{\mu'''}, \cdots$. Dieselben Funktionen besitzen in B, $(B > \Phi)$, Maximalwerte, die bezüglich unterhalb $1+\frac{1}{\mu'}$, $1+\frac{1}{\mu''}$, $1+\frac{1}{\mu'''}$, $\cdots$ bleiben. Da die letztgenannten Werte selbst unterhalb einer festen Schranke bleiben, ergibt sich mithin aus dem allgemeinen Konvergenzprinzip, daß man aus der Reihe der Funktionen $\frac{u'}{\mu'}, \frac{u''}{\mu''}, \cdots$ eine innerhalb B gleichmäßig konvergente Folge auswählen kann, welche gegen eine Grenzfunktion $\bar{u}$ mit folgenden Eigenschaften konvergiert: $\bar{u}$ ist eine innerhalb B reguläre Potentialfunktion, die gegenüber sämtlichen p Randsubstitutionen von Φ ungeändert bleibt und deren absoluter Betrag in Φ das Maximum 1 besitzt. Das ist aber unmöglich, weil auf Grund der erstgenannten Eigenschaft die Funktion $\bar{u}$ eine Konstante sein muß, welche Konstante nur den Wert 0 haben kann, weil $\bar{u}$ wie alle betrachteten Potentiale im Unendlichen verschwindet. Wir sind also auf einen Widerspruch geführt, und folglich muß für alle Funktionen u, die zu Bereichen Φ einer gewissen Nachbarschaft des Ausgangsbereichs Φ gehören, eine obere Schranke des absoluten Betrages dieser Funktionen innerhalb Φ, daher auch innerhalb B existieren.

Nunmehr können wir leicht den Nachweis führen, daß $u' - u$ innerhalb B gleichmäßig unendlich klein wird, wenn Φ' gegen Φ konvergiert. Wir nehmen zu dem Zwecke wieder das Gegenteil an; d. h. wir nehmen an, daß in einem in B enthaltenen Bezirk β die Funktion $u' - u$, welche im Punkte ∞ verschwindet, ein Maximum des absoluten Betrages besitzt, welches oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Größe γ bleibt, wie nahe auch Φ' an Φ liege. Alsdann ließe sich wieder eine gegen Φ konvergierende Folge von Bereichen bestimmen, die wir mit $\Phi', \Phi'', \Phi''', \cdots$ bezeichnen könnten, sodaß stets $|u^{(\nu)} - u|$ in β ein Maximum des absoluten Betrages $> \gamma$ hätte. Hieraus müßte sich, da alle Funktionen der Folge in B bewiesenermaßen unterhalb einer festen endlichen Schranke bleiben, eine Teilfolge $\Phi^{(n_1)}, \Phi^{(n_2)}, \cdots$ bestimmen lassen, sodaß eine bestimmte Grenzfunktion $\lim\limits_{\alpha=\infty} u^{(n_\alpha)}$ zustande käme, für welche nun natürlich auch der Unterschied gegen u in β ein Maximum des absoluten Betrages $\geqq \gamma$ besitzen müßte und die daher jedenfalls keine Konstante sein könnte. Andererseits müßte jedoch diese Grenzfunktion wie alle Funktionen $u', u'', u''', \cdots$ einen Periodizitätsmodul 1 besitzen und zwar entsprechend derselben Randsubstitution, in bezug auf welche u selbst den Periodizitätsmodul 1 besitzt. Hieraus folgt, daß die erwähnte Grenzfunktion mit u identisch sein muß, daß also ihr Unterschied gegen u innerhalb β identisch 0 ist, während derselbe soeben $\geqq \gamma$ gefunden wurde.

§ 3.

Einführung von Riemanns $(6p-6)$-parametriger Parallelogrammfigur. Stetige Änderung derselben in Abhängigkeit von Φ.

Wir betrachten wieder unsern Bereich Φ mit den p Randkurvenpaaren L_α, L_α' $[\alpha = 1, \cdots, p]$. Indem wir in diesem Bereiche, wie oben, die p Querschnitte Q_α ziehen, erhalten wir den oben mit φ bezeichneten p-fach zusammenhängenden Bereich. Ist J irgend ein zu Φ gehörendes Abelsches Integral erster Art, so besitzt das Differential dJ gemäß einem bekannten Satze der Theorie der Abelschen Integrale $2p-2$ Nullstellen, wobei jede eventuell mit der richtigen Multiplizität zu zählen ist. Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz direkt am Bereiche Φ demonstriert werden kann. Zu dem Zwecke erstrecken wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log J'(z)$$

über die vollständige Begrenzung des Bereichs Φ. Dieses Integral ist nämlich gleich der zu bestimmenden Anzahl der Nullstellen des Differentials dJ, vermehrt um zwei Einheiten, die von dem unendlich fernen Punkte herrühren. Wir bezeichnen mit dz und dz' zwei zugeordnete Randelemente des Bereichs Φ, welcher, was stets erreichbar ist, der Bedingung genügen möge, daß der unendlich ferne Punkt nicht eine der betrachteten Nullstellen ist und daß auch auf seiner Begrenzung keine Nullstelle liegt. Werden mit z und z' die betrachteten zugeordneten Randpunkte selbst bezeichnet, so können wir in dem auszuwertenden Integrale je zwei Elemente in der Form vereinigen

$$d \log\left(\frac{dJ(z)}{dz}\right) - d \log\left(\frac{dJ(z')}{dz'}\right) = d \log\left(\frac{dz'}{dz}\right),$$

da $dJ(z') = dJ(z)$ ist. Hierdurch ergibt sich für das einzelne Randlinienpaar als Wert des zu untersuchenden Integrales der Wert 2. Denn die Amplitude der Größe $\frac{dz'}{dz}$ vermehrt sich bei Durchlaufung der das Differential dz enthaltenden Linie L um 4π, weil die Amplitude von dz den Zuwachs -2π erfährt, während die Amplitude von dz' den Zuwachs $+2\pi$ erfährt.

Das Integral J ist in φ jedenfalls eindeutig, und wir können vermöge einer geringen Abänderung der Begrenzung unter Aufrechterhaltung der analytischen Randsubstitutionen annehmen, daß keine der $2p-2$ Nullstellen des Differentials dJ auf der Begrenzung von φ liegt. Alsdann vermittelt die Funktion J eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Bereichs φ auf eine mehrblättrige Figur mit $2p-2$ Windungspunkten im Innern, begrenzt von p parallelogrammartigen Rahmen, deren je vier Seiten paarweise durch euklidische Parallelverschiebungen aufeinander bezogen sind. Es ist dies die bekannte mehrblättrige Parallelogrammfigur, welche Riemann in seiner Abhandlung über Abelsche Funktionen § 12*) betrachtet und mit Bezug auf welche Riemann eine Reihe von Bemerkungen macht, welche für seine Ideengänge überhaupt sehr bezeichnend sind.

Wir wollen nun, bevor wir von der soeben erwähnten Riemannschen Normalfigur planmäßigen Gebrauch machen, noch einige unseren Zwecken dienliche Spezialentwicklungen geben. Es kommt uns wegen einer einheitlichen Behandlung darauf an, den Satz zu haben, daß, wie auch φ gegeben sein möge, es stets möglich ist, J so zu wählen, daß die $2p-2$ Nullstellen des Differentials dJ sämtlich *einfache* Nullstellen sind und daß auch keine der Nullstellen auf der Begrenzung von φ, wie dies nun einmal begrenzt ist, liegt. Selbstverständlich würde dann das allgemeine Abelsche Integral erster Art die genannten Eigenschaften ebenfalls besitzen.

Wir formulieren zunächst den der ersten Forderung entsprechenden Satz.

Satz:**) Auf jeder Fläche Φ vom Geschlecht $p \geqq 1$ existiert ein Abelsches Differential erster Art, dessen sämtliche $2p-2$ Nullstellen einfach sind.

Zum Beweise dieses Satzes benötigen wir einige bekannte Tatsachen aus der Theorie der Abelschen Integrale, an welche wir hier mit direktem Bezug auf die Fläche Φ erinnern unter Angabe auch der sehr einfachen Beweishilfsmittel, die unmittelbar auf den Bereich Φ zur Anwendung gelangen.

Wir definieren zunächst für den Bereich φ die p Normalintegrale erster Art $J_1(z), \cdots, J_p(z)$, von welchen $J_\alpha(z)$ durch die Eigenschaft definiert sein soll, für $z=\infty$ zu verschwinden, längs den Querschnitten $Q_1, \cdots, Q_{\alpha-1}, Q_{\alpha+1}, \cdots, Q_p$ den Periodizitätsmodul 0 und längs Q_α den Periodizitätsmodul 2π zu besitzen. Nunmehr normieren wir das zu Φ gehörende Normalintegral zweiter Art mit der Unendlichkeitsstelle z_0 als dasjenige Integral, welches in Φ eindeutig ist und nur im Punkte z_0 unstetig wird, nämlich wie $\frac{1}{z-z_0}$ plus reguläre analytische Funktion. Wir bezeichnen dasselbe mit $J(z_0, z)$. Die Existenz desselben ergibt sich mit Hilfe der kombinatorischen Methoden sofort, wenn man zunächst diejenige in Φ eindeutige, gegenüber den Randsubstitutionen ungeändert

*) Riemann, Ges. Werke Nr. VI.

**) Dieser Satz überträgt sich natürlich auf jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$.

bleibende Potentialfunktion konstruiert, welche im Punkte z_0 unendlich wird wie der reelle Teil von $\frac{1}{z - z_0}$. Ist U diese Potentialfunktion, so besitzt $U + iV$ bereits die gewünschte Unstetigkeit und führt nach Subtraktion einer linearen homogenen Verbindung der J_α sofort zur Funktion $J(z_0, z)$. Die Funktion $J(z_0, z)$ erleidet gegenüber den analytischen Randsubstitutionen des Bereichs Φ gewisse additive Zuwüchse, die Perioden des Normalintegrals zweiter Art. Um die α^{te} Periode zu bestimmen, erstreckt man das Integral $\int J dJ_\alpha$ über die vollständige Begrenzung des Bereichs Φ und findet dadurch für die α^{te} Periode $2\omega_\alpha$ den Wert $J_\alpha'(z_0)$. Nunmehr können wir die bekannte Bedingung dafür aufstellen, daß es eine von einer Konstanten verschiedene, in Φ eindeutige, gegenüber den Randsubstitutionen ungeändert bleibende Funktion geben soll, welche an p voneinander verschiedenen Stellen $z_1, \cdots, z_p$ des Bereichs Φ von der ersten Ordnung unendlich wird, sofern sie an den betreffenden Stellen überhaupt unendlich wird. Eine solche Funktion würde nach Substraktion einer gewissen linearen homogenen Verbindung der zu $z_1, \cdots, z_p$ gehörenden Normalintegrale zweiter Art in eine in Φ eindeutige Integralfunktion erster Art übergehen, bei der notwendig auch die gegenüber den Randsubstitutionen auftretenden Perioden verschwinden würden. Das gibt p lineare homogene Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten jener linearen Verbindung, welche dann und nur dann eine von dem Systeme $0, \cdots, 0$ verschiedene Lösung gestatten, wenn die Determinante

$$(*) \qquad |J_\alpha'(z_\beta)| = 0$$

ist.

Anmerkung. Bei den vorstehenden Betrachtungen spielte der unendlich ferne Punkt eine in gewissem Umfange ausgezeichnete Rolle. Man kann jedoch zweckmäßig den Bereich Φ für die Zwecke dieser Aufstellungen durch eine lineare Transformation in einen ganz im Endlichen liegenden Bereich verwandeln, wobei dann eine der $2p$ Begrenzungslinien umschließende Begrenzungslinie wird. An dieser Vorstellung möge auch im folgenden bei der Herleitung des Hilfssatzes festgehalten werden.

Auf der gegenwärtigen Grundlage gewinnen wir nun folgenden Brill-Noetherschen*) Satz: Es gibt für die Gesamtheit der zu Φ gehörenden Differentiale erster Art keine allen gemeinschaftliche Nullstelle in Φ. — Nehmen wir in der Tat eine solche gemeinschaftliche Nullstelle a in Φ an. Wir wählen dann $p - 1$ von a und von einander verschiedene, sonst willkürliche Stellen $z_1, \cdots, z_{p-1}$ in Φ und bestimmen, was sicher möglich

*) Brill-Noether: „Über die algebraischen Funktionen usw." Math. Ann. 7, S. 285. Unsere Beweisführung folgt Picard, Traité d'Analyse Bd. II, S. 449 (2. Aufl.).

ist, ein solches Differential erster Art dw_1, welches in $z_1, \cdots, z_{p-1}$ verschwindet. Dasselbe verschwindet dann auch in a und außerdem noch in $p-2$ weiteren Stellen, welche auch mit den genannten p Stellen zusammenfallen können. Nun gibt es aber noch ein zweites Differential dw_2 von der ersten Art, welches ebenfalls in den letztgenannten $p-2$ Stellen verschwindet und sich von dem Differential dw_1 nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. Der Quotient $\frac{dw_2}{dw_1}$ wäre eine von einer Konstanten verschiedene Funktion, welche in Φ eindeutig ist und gegenüber den p Randsubstitutionen ungeändert bleibt, dazu nur in $z_1, \cdots, z_{p-1}$ unendlich werden kann und zwar von der ersten Ordnung. Demnach wäre es möglich, für willkürlich gewähltes $z_1, \cdots, z_{p-1}$ eine zugehörende Funktion zu finden, was mit dem vorher gefundenen Satze im Widerspruch steht, nach welchem je p Punkte der Bedingung $(*)$ unterworfen sein müssen, damit eine zugehörende Funktion existiert.

Nunmehr gehen wir zum Beweise des von uns oben S. 73 aufgestellten Satzes über. Wir stellen uns, wie gesagt, vor, daß der Bereich Φ ganz im Endlichen liege. Angenommen, es sei jedes zu Φ gehörende Differential erster Art mit einer mindestens zweifachen Nullstelle behaftet, so würde dies bedeuten, daß es möglich ist, für jede Wahl der Konstanten $c_1, \cdots, c_p$ die beiden Gleichungen

$$(*) \qquad c_1 J_1'(z) + c_2 J_2'(z) + \cdots + c_p J_p'(z) = 0,$$

$$(**) \qquad c_1 J_1''(z) + c_2 J_2''(z) + \cdots + c_p J_p''(z) = 0$$

gleichzeitig durch passende Wahl von z zu befriedigen. Daraus erhalten wir durch Elimination von c_1 die neue Gleichung

$$(***) \qquad c_2(J_2' J_1'' - J_2'' J_1') + \cdots + c_p(J_p' J_1'' - J_p'' J_1') = 0.$$

Diese Gleichung würde demnach für dasselbe z befriedigt werden. Das würde besagen, daß die Größe z, welche nun eben auch durch die Gleichung $(***)$ bestimmt gedacht werden kann, nicht von c_1 abhängt. Ebenso können wir schließen, daß sie nicht von c_2 abhängt, usw. bis c_p, d. h., daß sie eine für alle c feste Größe ist, entgegen dem Brill-Noetherschen Satze.

Um den soeben gegebenen Beweis im einzelnen noch etwas zu präzisieren, seien folgende Bemerkungen gemacht. Die durch die Gleichungen $(*)$ und $(**)$ bestimmte Größe z kann, wenn man $c_1, \cdots, c_p$ frei variieren läßt, nicht an einer und derselben Stelle verharren, weil dadurch diese Stelle eine feste Nullstelle für p unabhängige Differentiale erster Art würde und daher eine feste Stelle für alle Differentiale erster Art. Ferner sei bemerkt, daß die in $(***)$ auftretenden p Klammergrößen Funktionen ihres Argumentes sind, deren keine verschwindet. In der Tat würde das Verschwinden einer solchen Klammergröße besagen, daß die betreffenden in der Klammer auftretenden Normaldifferentiale erster Art sich nur um konstante Faktoren unterscheiden.

Wir wollen nunmehr zeigen, wie auch der weiteren oben (S. 73) an ein Differential erster Art dW gestellten Forderung genügt werden kann. Wir formulieren folgenden Zusatz.

Zusatz: Das Differential dW erster Art in Φ kann noch der weiteren Bedingung gemäß bestimmt werden, daß keine der $2p-2$ Nullstellen auf einer der Begrenzungslinie des Bereichs Φ oder auf weiteren in Φ etwa angenommenen Linien liegt.

Zum Beweise des Zusatzes gehen wir von einem dW aus, welches bereits $2p-2$ voneinander verschiedene einfache Nullstellen hat, jedoch etwa noch nicht der erwähnten weiteren Bedingung genügt, von welcher im Zusatze die Rede ist. Es seien $dJ_1, \cdots, dJ_p$ die oben bereits betrachteten p linear unabhängigen Differentiale erster Art, die zu Φ gehören. Alsdann bilden wir das Differential

$$d\overline{W} = dW + c\,dJ_1 + c^2 dJ_2 + \cdots + c^p dJ_p,$$

mit c einen variablen komplexen Parameter bezeichnend, welcher auf die Umgebung des Wertes $c=0$ beschränkt werde. Bei Beschränkung von c auf eine hinreichend kleine Umgebung des Wertes 0 unterscheidet sich $d\overline{W}$ von dW so wenig, daß die $2p-2$ Nullstellen von $d\overline{W}$ ebenfalls noch einfach sind, da sie jedenfalls mit c sich stetig ändern. Diese Änderung muß nun aber für jede einzelne Nullstelle sogar eine analytische sein, d. h.: Wir sagen, daß die einzelne Nullstelle z des Differentials $d\overline{W}$ eine in der Umgebung der Stelle $c=0$ reguläre analytische Funktion des Parameters c ist. Dies ergibt sich sofort aus der bekannten Formel für die Nullstelle ζ einer Funktion $f(z)$, nämlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

eine Formel, welche gültig ist, sofern längs einer geschlossenen, den Punkt ζ einfach umschließenden Linie integriert wird, welche keine weiteren Nullstellen umschließt. In unserm Falle wird auf diese Weise die Nullstelle ζ durch ein Integral dargestellt, welches von dem Parameter c abhängt, nach welchem man unter dem Integralzeichen unbedenklich differentiieren kann. Ist somit ζ als reguläre analytische Funktion von c für die Umgebung der Stelle $c=0$ erwiesen, so bleibt jetzt nur noch festzustellen, daß ζ in Abhängigkeit von c nicht eine Konstante ist. Diese Möglichkeit wird mit Hilfe des Brill-Noetherschen Satzes folgendermaßen ausgeschlossen. Wäre ζ eine Konstante, so würde ζ für p verschiedene Wahlen von c, etwa $c_1, c_2, \cdots, c_p$, stets denselben Wert erhalten. Die sich so ergebenden Differentiale erster Art sind aber jedenfalls linear unabhängig wegen des Nichtverschwindens der Determinante

$$|c_\alpha^\beta| \qquad [\alpha = 1, \cdots, p;\ \beta = 1, \cdots, p].$$

Demnach würde überhaupt jedes Differential erster Art die Nullstelle ζ besitzen, entgegen dem Brill-Noetherschen Satze.

Hiermit ist klar, daß die Nullstellen des Differentials $d\overline{W}$ bei frei variablem c die vollen Umgebungen der Ausgangsstellen beschreiben und daß es mithin möglich ist, durch beliebig kleine Modifikation zu erreichen, daß keine der Nullstellen auf einem gegebenen Liniensystem liegt.

Nachdem der oben formulierte Hilfssatz und Zusatz bewiesen ist, können wir also jetzt ein in φ eindeutiges Abelsches Integral W auffinden, für welches die $2p-2$ Nullstellen von dW alle voneinander verschieden und also alle einfache Nullstellen sind. Die erwähnte Eigenschaft bleibt auch aufrecht erhalten, wenn wir zu W irgend eine lineare homogene Verbindung der Normalintegrale erster Art mit hinreichend klein gewählten Koeffizienten hinzufügen. Wir können daher, um auf eine normale Vorstellung zu kommen, dem zu wählenden Integral W auch noch die Bedingung auferlegen, daß die $2p$ Periodizitätsmoduln sämtlich von Null verschieden sind. Weiter können wir durch eine eventuelle Modifikation der Begrenzung des Bereichs φ oder direkt unter Bezugnahme auf den „Zusatz" erreichen, daß keine der Nullstellen des Differentials dW auf einer Begrenzungslinie des Bereichs φ liegt. Ein so gewähltes Integral wollen wir mit $W(\Phi)$ bezeichnen, wenn wir jetzt schließlich noch vorschreiben, daß dieses W an einer der $2p-2$ Nullstellen von dW den Wert Null annehmen soll, wodurch auch über die additive Konstante verfügt wird. Das Integral $W(\Phi)$ besitzt längs den p Querschnitten Q p Perioden. Durch diese Perioden in Verbindung mit der Bedingung des Verschwindens von W an der gewählten Nullstelle von dW ist W in φ eindeutig definiert, und wir können, indem wir die genannten p Perioden ihrem Werte nach festhalten, $W(\Phi)$ als eine von Φ selbst abhängige Größe betrachten, die sich nun beim Übergange zu einem Nachbarbereiche Φ' in ganz bestimmter Weise ändert. Dabei hat man sich natürlich die Querschnitte Q auch stetig mitgeändert zu denken, eine Änderung, die man übrigens nur an den Endstücken der Q vorzunehmen braucht, wo diese Querschnitte in die Begrenzungslinien von Φ münden.

Wir machen nun die wichtige Bemerkung, daß $W(\Phi)$ unter den genannten Normierungsbedingungen eine stetige Funktion von Φ ist. Für den Nachweis bedarf auf Grund der vorangegangenen Entwicklungen nur noch derjenige Punkt einer Erledigung, der durch die Normierung der additiven Konstanten gegeben ist, insofern als die Stellen a und a', an welchen W und W', unter W' das zu einem benachbarten Bereiche Φ' gehörende Integral verstanden, der Normierung gemäß verschwinden, allgemein zu reden nicht zusammenfallen. Dieser Nachweis ergibt sich jedoch unmittelbar, wenn man folgendes beachtet. Es möge mit W^* diejenige zu Φ' gehörende Integralfunktion bezeichnet werden, welche sich von W' nur dadurch unterscheidet, daß sie nicht in a', sondern in a verschwindet, also von W' nur durch eine additive Konstante, nämlich den Wert $W'(a)$, verschieden ist. Der Wert dieser Konstanten ist nun in der Tat eine infinitesimale Größe, weil einerseits $a'-a$ eine infinitesimale Größe ist, andererseits die Ableitungen der Funktion W' ebenso wie W' selbst unterhalb einer festen Schranke bleiben, gemäß den Untersuchungen des § 2. Die Untersuchung ist hierdurch auf die Betrachtung der Differenz W^*-W reduziert, welche in a verschwindet und daher nach früheren Entwicklungen gleichmäßig in dem oben S. 66 mit B bezeichneten Bereiche unendlich klein wird, wenn Φ' in Φ übergeht.

Die Funktion $W(\Phi)$ oder W, wie wir sie abgekürzt bezeichnen, leistet eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs φ auf eine gewisse mehrblättrige, p-fach zusammenhängende Fläche N, welche $2p-2$ innere Windungspunkte erster Ordnung besitzt, von welchen der eine mit dem Nullpunkte der W-Ebene koinzidiert. Die Begrenzung wird von p parallelogrammartigen Rahmen gebildet, deren je vier Seiten über Kreuz durch p feste (entsprechend den p Querschnitten Q) und p mit Φ veränderlich zu denkende euklidische Parallelverschiebungen aufeinander bezogen sind. Die Fläche N als solche hängt noch von $3p-3$ komplexen Konstanten ab, welche wir, da für die Anwendung nur die nachbarlichen Variationen in Betracht gezogen werden, ohne daß der eigentliche Riemannsche Klassenbegriff als solcher in unsere Betrachtung hineinspielen wird, als die $3p-3$ komplexen Parameter von N bezeichnen. Wir können statt dessen auch von $6p-6$ reellen Parametern reden, indem wir uns für jeden der $3p-3$ beweglichen Windungspunkte und jeden der p beweglichen Verschiebungsvektoren (das sind die $3p-3$ Parameter) die Zerlegung im reellen und imaginären Teil vorgenommen denken.

Wir können uns die einzelne Fläche N dadurch erweitert denken, daß wir entsprechend der Ränderzuordnung die analytische Fortsetzung derselben betrachten, d. h. zunächst $8p$ kongruente Exemplare N an dieselbe angesetzt denken, an jeden Rahmen einen ihn umschließenden Kranz. Die von uns in der Folge zu betrachtenden Variationen der Fläche N werden stets in solcher Beschränkung vorgenommen, daß eine Kollision namentlich zwischen den Windungspunkten und Begrenzungslinien sowie auch zwischen den Windungspunkten untereinander nicht möglich ist. In der Tat wird es für die folgenden Betrachtungen gleichgültig sein, welchen

Grad der Beschränkung wir der Fläche N hinsichtlich ihrer $6p-6$ dimensionalen Variabilität auferlegen, wesentlich wird immer nur sein, daß die Möglichkeit der Bewegung mit $6p-6$ reellen Freiheitsgraden gegeben ist, wobei für die Begrenzungslinien selbst auch ein beliebig kleines Feld ihrer Beweglichkeit zugelassen werden kann.

§ 4.

Einführung des $(6p-6)$-parametrigen Fundamentalbereichs Ψ. Die umgebungstreue Abbildung seines Parametergebiets auf das Parametergebiet der Riemannschen Parallelogrammfigur.

Mit Ψ werde im folgenden ein Fundamentalbereich des Schottkyschen Typus bezeichnet, d. i. ein Bereich der Gattung Φ, jedoch mit p *linearen*, nicht mehr nur regulär analytischen Randsubstitutionen. Diesen Bereich Ψ stellen wir uns dabei noch in bestimmter Normierung vor. Wir denken uns nämlich von den $2p$ Fixpunkten der p Randsubstitutionen die beiden ersten nach 0 und ∞ verlegt, den dritten nach 1, eine Normierung, welche durch eine einzige lineare Substitution erreicht wird. Der so normierte Bereich Ψ wird von der Linie L_1' umschlossen, welche ebenso wie die Linie L_1 den Nullpunkt einfach umschlingt. Auch jetzt können wir, obwohl dies nicht unbedingt erforderlich sein wird, für die Begrenzung des Bereichs Ψ vorschreiben, daß alle $2p$ Begrenzungslinien geschlossene reguläre analytische Linien sind. Die Randsubstitutionen stellen sich der Reihe nach in der Form dar

$$z' = \mu_1 \cdot z, \quad \frac{z'-1}{z'-b_2} = \mu_2\,\frac{z-1}{z-b_2}, \cdots, \frac{z'-a_\alpha}{z'-b_\alpha} = \mu_\alpha\,\frac{z-a_\alpha}{z-b_\alpha} \quad [\alpha = 3, \cdots, p].$$

Die $3p-3$ Größen $\mu_1, \cdots, \mu_p, a_3, \cdots, a_p, b_2, \cdots, b_p$ bilden ein System von $3p-3$ komplexen Größen, welche man im komplexen Gebiet frei variieren kann. Diese Konstanten nennen wir kurz die Parameter des Gebietes Ψ (*Ψ-Parameter*). Entsprechend der Veränderung dieser Parameter wollen wir uns die stetige Veränderung von Ψ so vor sich gehend denken, daß die p Begrenzungslinien $L_1, \cdots, L_p$ festgehalten werden, wodurch jedesmal die Bildkurven $L_1', \cdots, L_p'$ nach Angabe des Parametersystems vollständig bestimmt werden. Bei dieser stetigen Veränderung wird es uns immer nur auf nachbarliche Veränderungen ankommen, wobei Kollisionen von selbst ausgeschlossen sind.

Wir bestimmen nun zu einem Bereiche Ψ, von welchem ausgegangen wird, gemäß den Bestimmungen des § 4 eine zugehörende Integralfunktion erster Art W, wobei wir auch hier durch eine eventuelle geringe Modifikation der Begrenzungslinien*) oder unter Bezugnahme auf den Zusatz S. 76 erreichen, daß W auf den Begrenzungslinien von Ψ und ψ, d. i. die mit p Querschnitten ausgestattete p-fach zusammenhängend gemachte Fläche Ψ, keine Nullstelle seiner Ableitung besitzt. Durch Vermittlung der Funktion W wird die Fläche ψ auf die Normalfläche N abgebildet, und es ergeben sich $3p-3$ Werte für deren Parameter (*N-Parameter*). Nunmehr lassen wir Ψ und damit zugleich ψ stetig variieren mit den $6p-6$ oben genannten reellen Freiheitsgraden. Dabei verändert sich die Fläche N stetig, d. h. sowohl die inneren Windungspunkte als auch die veränderlichen Perioden als auch die Begrenzungslinien selbst variieren stetig.

Es ist nun der Nachweis zu führen, daß die bei der genannten Variation sich ergebenden Wertsysteme für die N-Parameter die $(6p-6)$-dimensionale Umgebung des Anfangswertsystems vollständig erschöpfen, wie klein auch die um das Ausgangswertsystem der Ψ-Parameter gewählte Umgebung sein mag. Dieser Nachweis beruht erstens auf der Tatsache des Bestehens des Unitätssatzes für die uniformisierenden Variablen des Schottkyschen Typus, zweitens auf der Tatsache, daß das stetige eineindeutige Bild eines n-dimensionalen Gebietes im n-dimensionalen Raum wieder ein n-dimensionales Gebiet ist oder, anders ausgedrückt, daß eine solche Abbildung stets *umgebungstreu* ist, d. h. den Charakter eines Punktes als innerer Punkt aufrecht erhält. Innerer Punkt eines Bereichs wird hierbei ein Punkt genannt, von welchem eine volle Umgebung auch noch dem Bereiche angehört.

Im Einzelnen verläuft die Beweisführung folgendermaßen.

Es mögen mit i_0 das Ausgangssystem der Ψ-Parameter, mit m_0 das System der entsprechenden N-Parameter, mit i' und i'', m' und m'' Ψ-Parametersysteme beziehungsweise N-Parametersysteme in der Nachbarschaft der Ausgangssysteme bezeichnet werden. Wir können dann zunächst um i_0 eine Umgebung U im Gebiete der Ψ-Parameter so klein abgrenzen, daß die im Bezirke U sich ergebenden Flächen N und $\overline{N}$ von der Ausgangsfläche N_0 und $\overline{N}_0$ ($\overline{N}$ und $\overline{N}_0$ sind die gemäß dem oben genannten Prinzip durch p Kränze erweiterten Flächen N und N_0) sich so wenig unterscheiden, daß folgenden Bedingungen genügt wird: Innerhalb N_0 werde um jeden inneren Windungspunkt herum ein kleines Kreisflächenstück K abgegrenzt, ebenso werde jede der p Begrenzungslinien von N_0 in einen auf $\overline{N}_0$ konstruierten Rahmen eingebettet, der weder mit den genannten Kreisflächenstücken noch auch ihren Wiederholungen auf

*) Vgl. unten S. 96.

$\bar{N}_0$ kollidiert, (vgl. die schematische Figur 4); schließlich werde in diesem Rahmen für die vier Eckpunkte des Parallelogramms je ein viereckartiger Bezirk in der in Figur 4 angedeuteten Weise abgegrenzt. Die erwähnte Umgebung U soll nun so klein gewählt sein, daß jedes der angeführten Stücke (Windungspunkte, Begrenzungsseiten, Eckpunkte der Begrenzungslinien) der Fläche N jedenfalls in den für dasselbe gezogenen Schranken bleibt. Diesen Bedingungen kann sicher genügt werden wegen der früher bebewiesenen Stetigkeit der Funktion $W \equiv W(\Phi)$. Wir können und wollen die Schranken von U noch enger ziehen, indem wir jetzt verlangen, daß insbesondere die Änderung der Begrenzungslinien von N, welche entsprechend dem Bezirke U statthaben kann, so klein sei, daß, sobald gleiche Periodensysteme für zwei verschiedene Flächen N, etwa N' und N'', vorhanden sind, die betreffenden Begrenzungslinien dadurch zur Deckung miteinander gebracht werden können, daß man, ohne sonstige Kollisionen hervorzurufen, erstens die vier Eckpunkte durch kongruente Parallelverschiebung zur Deckung bringt und dann die Begrenzungsseiten einzeln deformiert, und zwar alles dies, ohne daß das oben definierte Feld der Variabilität verlassen wird.

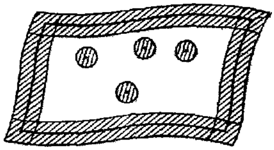


Fig. 4.

Nachdem U so bestimmt ist, können wir behaupten, daß zwei verschiedenen in U gewählten Systemen i' und i'' notwendig zwei verschiedene Systeme m' und m'' entsprechen. Nehmen wir in der Tat an, daß i' und i'' voneinander verschieden sind und trotzdem m' und m'' einander gleich, so würden die Flächen N' und N'' dieselben Randsubstitutionen und dieselben Windungspunkte haben und sich nur hinsichtlich der Lage ihrer Begrenzungslinien voneinander unterscheiden. Die zu i' und i'' gehörenden Schottky-Bereiche Ψ' und Ψ'' liegen in einer z-Ebene. Die beiden Integralfunktionen, welche beziehungsweise Ψ' und Ψ'' auf N' und N'' abbilden, mögen mit W' und W'' bezeichnet werden. Betrachten wir dann die Funktion $z(W')$ einerseits und $z(W'')$ andererseits. Wir behaupten von diesen beiden Funktionen, daß es dieselben Funktionen sein müssen. Gehen wir etwa aus von der Funktion $z(W')$. Diese Funktion ist in bezug auf die Fläche N' auf Grund des Unitätssatzes vollständig charakterisiert durch die Eigenschaft, eine eineindeutige konforme Abbildung der Fläche N' auf einen Bereich der Gattung Ψ zu leisten in der Weise, daß von den p linearen Substitutionen die drei ersten Fixpunkte mit $0, \infty, 1$ zusammenfallen. Dieselben Bemerkungen gelten nun aber auch von der Funktion $z(W'')$, wenn diese Funktion als Funktion in N'' betrachtet wird, welche letztere Fläche sich von N' nur durch eine Deformation der Begrenzung unterscheidet. Demnach ist die Funktion $z(W')$ mit der Funktion $z(W'')$

identisch, womit nun selbstverständlich auch gesagt ist, daß $W' = W''$ ist. Vor allem aber machen wir jetzt den Schluß, daß die p linearen Substitutionen, welche die Funktion $z(W')$ erleidet, d. s. die Randsubstitutionen des Bereiches Ψ' mit den Randsubstitutionen des Bereiches Ψ'' identisch sind. Damit ist gezeigt, daß das Wertsystem i' mit dem Wertsystem i'' zusammenfällt, entgegen der Voraussetzung.

Demnach wird das Gebiet U der Parametersysteme i stetig und eineindeutig im Parametergebiet der N abgebildet. Diese Abbildung muß dann auch einem allgemeinen Satze zufolge („Satz von der Invarianz des Gebietes" bei stetiger eineindeutiger Abbildung eines n-dimensionalen Gebietes im n-dimensionalen Raume) *umgebungstreu* sein, d. h. im Gebiete der m wird jedes Wertsystem einer gewissen Umgebung um das Ausgangswertsystem m_0 auch wirklich angenommen.

Der Beweis dieses Satzes, dessen Gebrauch für eine Dimension in der Analysis ganz geläufig ist, ist erst kürzlich von Herrn Brouwer (Zitat S. 51 unten) allgemein geliefert worden.

Bemerkung: Man kann mit Klein (Math. Ann. 21, S. 211) den Wunsch haben, die Beweisführung für die umgebungstreue Abbildung in unserem Falle der Abbildung des Größengebietes der i auf das Größengebiet der m auf die analytische Natur der Abhängigkeit zu gründen. Dazu würde, nachdem die umkehrbare Eindeutigkeit und Stetigkeit der Beziehung und damit jedenfalls die Unmöglichkeit *identischen* Verschwindens der Funktionaldeterminante festgestellt ist, wesentlich genügen, den *analytischen* Charakter der Beziehung festzustellen. Dies ist in der Tat auch möglich. Es sind nämlich im vorliegenden Falle (Schottky-Typus) die Poincaréschen Reihen offenbar analytische Funktionen der Größen i, da diese Größen frei komplex variiert werden können und da die in bekannter Weise mit dem Flächeninhalte operierende Abschätzung zum Zwecke des Konvergenzbeweises offenbar auch in bezug auf die angegebene Parametervariabilität gleichmäßig ausgeführt werden kann. Man kann nun zwei Quotienten von Poincaréschen Reihen gleicher Dimension so wählen, daß dieselben zwei Funktionen X und Y definieren, zwischen denen eine algebraische, für den betreffenden Fundamentalbereich charakteristische Gleichung entsteht, die nun von den erwähnten Parametern analytisch abhängt. Alsdann sind aber auch die Abelschen Integrale erster Art, die aus dieser Gleichung algebraisch hergeleitet werden können, analytische Funktionen dieser Parameter. Mithin sind auch die Konstanten m analytische Funktionen der Konstanten i.

§ 5.

Der Limessatz.

Von besonderer Wichtigkeit für die im nächsten Paragraphen folgende Durchführung des Kontinuitätsbeweises ist nun der folgende Limessatz.

Limessatz: Es sei F die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion $y(x)$ vom Geschlecht $p \geqq 1$, und es mögen alle Windungspunkte der Fläche F im Endlichen liegen. Die Fläche F sei durch p Rückkehrschnitte, deren keiner durch einen Windungspunkt oder unendlich fernen Punkt der Fläche F hindurchgehen möge, in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche f verwandelt. Es sei ferner bekannt, daß in jeder beliebigen Nähe der Fläche F noch eine Fläche F' bzw. f' mit denselben (koinzidierenden) Rückkehrschnitten existiert, für welche die auffassungsmäßig zugehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus auch wirklich existiert. Alsdann existiert auch die auffassungsmäßig zu f gehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus.*)

Zur Erläuterung des vorstehenden Satzes bemerken wir noch folgendes. Der Ausdruck „F' soll beliebig nahe an F liegen" soll bedeuten, daß die Windungspunkte der Fläche F' von den Windungspunkten der Fläche F beliebig wenig entfernt sind, wobei im Falle des Vorkommens eines Windungspunktes höherer Ordnung der Fläche F für F' die Auflösung eines derartigen Windungspunktes in Windungspunkte niederer Ordnung zugelassen wird.

Wir gehen nun zum Beweise des Limessatzes über. Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, daß es auf Grund der gestellten Voraussetzungen natürlich in jeder Nähe von F noch unendlich viele Flächen mit den Eigenschaften der Fläche F' gibt. Wir nehmen an, es seien F' und F'' zwei voneinander verschiedene Flächen, welche von F um weniger als ε entfernt sind. Das soll heißen: Die einzelnen Windungspunkte der Flächen F' und F'' sollen von den bezüglichen Windungspunkten der Fläche F um weniger als ε entfernt sein. Wir denken uns um jeden der Windungspunkte der Fläche F auf dieser Fläche je einen Kreis vom Radius ε konstruiert. Wir nennen diese Kreise die Kreise K_ε. In derselben Weise konstruieren wir noch für spätere Zwecke die Kreise K_{ε_1} und K_{ε_2}, wobei $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ gedacht wird. Wir bezeichnen gelegentlich auch mit K_ε usw. nicht die Kreislinien, sondern die durch diese Kreise auf F ababgegrenzten kreisförmigen Windungsflächenstücke. Die Größen ε, ε_1, ε_2

*) Diesen Satz und meine erste, unten S. 87, näher bezeichnete, auf dem Verzerrungssatze und allgemeinen Konvergenzprinzipe fußende Beweisidee desselben habe ich zuerst Anfang August 1911 (d. i. vor der Karlsruher Versammlung Sept. 1911) Herrn L. Bieberbach in Leipzig vorgetragen.

mögen von vornherein so klein angenommen werden, daß die von den verschiedenen Windungspunkten herrührenden erwähnten Kreisflächenstücke weder gegenseitig noch mit den Begrenzungslinien von f kollidieren. Nun wählen wir in dem Gebiete $f - \Sigma K_{\varepsilon_2}$, d. i. die Fläche f vermindert um sämtliche Kreisflächenstücke K_{ε_2}, einen endlichen Punkt x_0 und einen davon verschiedenen Punkt x_1, welch letzterer auch mit dem unendlich fernen Punkt zusammenfallen kann. Diese Punkte gehören ebenso den Flächen f' und f'' an, welche ja mit f das Stück $f - \Sigma K_\varepsilon$ gemeinschaftlich haben.

Zu f' und f'' existiert nach Voraussetzung die auffassungsmäßig zugehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus. Wir bezeichnen dieselben mit t' bzw. t''. Diese Größen sind zunächst nur bis auf lineare Substitutionen im Gebiete f' bzw. f'' definiert. Wir normieren sie jedoch durch die Bedingung, daß t' und t'', welche in dem Gebiete f' und f'' als eindeutige Zweige erklärt zu denken sind, an der Stelle x_0 beide unendlich werden sollen wie

$$\frac{1}{x - x_0} + ((0)),$$

unter $((0))$ eine im Punkte x_0 verschwindende, reguläre analytische Funktion verstanden. Nach Einführung dieser Normierung wollen wir nunmehr zur abschätzungsweisen Berechnung des Wertes $t'(x_1) - t''(x_1)$ übergehen. Dazu denken wir uns über F' und F'' die der uniformisierenden Variablen t' bzw. t'' entsprechende Überlagerungsfläche Φ' bzw. Φ'' gebildet. Aus diesen beiden Überlagerungsflächen wollen wir uns in allen relativen Blättern derselben diejenigen Teile ausgeschnitten vorstellen, welche auf F' bzw. F'' durch die Kreislinien K_ε begrenzt werden. Hierdurch entstehen aus Φ' und Φ'' zwei Flächen Φ_ε' und Φ_ε'', welche miteinander identisch sind und übereinstimmend mit Φ_ε bezeichnet werden können. Diese Fläche Φ_ε ist zugleich der analog gebildete Teil der zu F selbst gebildeten Überlagerungsfläche Φ der auffassungsmäßig dazu gehörenden, jedoch noch nicht als existierend festgestellten uniformisierenden Variablen t. Zur Berechnung der Differenz $t'(x_1) - t''(x_1)$ betrachten wir jetzt t'' als Funktion von t'. $t'(x)$ und $t''(x)$ liefern je eine ein-eindeutige konforme Abbildung der Fläche Φ_ε auf ein schlichtes Gebiet T_ε' bzw. T_ε''. Die Funktion $t''(t')$ verhält sich im Unendlichen wie $t'' \equiv t' + ((0))$.

Dem Werte x_1 mögen die Werte t_1' und t_1'' entsprechen. Alsdann ergibt sich, wenn wir die Methode des Cauchyschen Integrals und die Prinzipien des Verzerrungssatzes gemäß unseren Entwicklungen beim Unitätsbeweise anwenden, für den Wert t_1'', d. i. der zu t_1' gehörende Wert der Funktion $t''(t')$, der Ausdruck

$$(*) \qquad t_1'' = t_1' + \frac{1}{2\pi i} \sum \int \frac{t''(t')\,dt'}{t' - t_1},$$

die Integrale erstreckt über die unendlich vielen Begrenzungslinien $\bar{x}_{\varepsilon_1}$ des Bereiches T_{ε_1}', Begrenzungslinien, welche nichts anderes sind als die unendlich vielen bei der Abbildung der Fläche Φ_{ε_1}' mittels der Funktion $t'(x)$ sich ergebenden Bilder der Kreise K_{ε_1}.

Die Formel (*) dient uns nun zur Abschätzung der Größe $t''(x_1) - t'(x_1)$, welche Größe eben durch die Integralsumme selbst auf der rechten Seite der Formel (*) dargestellt wird. Die Abschätzung dieser Integralsumme gelingt nach unserer alten Methode. Um sie gleichmäßig für variables x_1 und so ausführen zu können, daß die Abschätzungsgröße eine zugleich mit ε_1 unendlich klein werdende Größe wird, wollen wir für ε_1 jetzt den Wert 2ε, für ε_2 den Wert 4ε wählen. Ferner wollen wir noch einen von ε unabhängigen Wert $\alpha > 4\varepsilon$ und einen ebenfalls von ε unabhängigen Wert $\alpha_1 > \alpha$ wählen und diesen Werten entsprechend die Kreise K_α und K_{α_1} auf F, F'', F''' gezogen denken. x_0 und x_1 werden jetzt außerhalb der Kreisflächenstücke K_{α_1} liegend vorgestellt, x_0, wie gesagt, fest, x_1 jedoch in diesem Bezirke frei variabel. Zur Abschätzung bemerken wir zunächst, daß einerseits erfordert wird die Angabe einer positiven von null verschiedenen unteren Schranke für den Nenner $t' - t_1'$, andererseits eine obere Schranke für die Zählersumme. Beide Schranken werden durch den Verzerrungssatz geliefert.

Was zunächst die untere Schranke für $t' - t_1'$ anbetrifft, so erwähnen wir unter Rückbeziehung auf die entsprechenden Entwicklungen beim Unitätsbeweise, daß der Zweig $t'(x)$, welcher im Punkte x_0 unendlich wird, eine Abbildung der zwischen den einzelnen K_α und K_{α_1} enthaltenen Ringe auf schlichte Gebiete entwirft, deren jedes eine Minimaldistanz seiner Begrenzungslinien besitzt, die sich nach den Grundsätzen des Verzerrungssatzes in Verbindung mit dem Vorbereitungssatze S. 87 in „U. d. a. K. II“ abschätzen läßt. Diese Minimaldistanz ist jedenfalls größer als der absolute Betrag der Größe $t' - t_1'$ während der Integration. Zur Abschätzung der Zähler aber bemerken wir, daß dieselbe nach unseren Abschätzungsprinzipien auf die Abschätzung der Summe der Quadrate der Umfänge aller $\bar{K}_{2\varepsilon}'$ und aller $\bar{K}_{2\varepsilon}''$ hinausläuft, deren erstere in der t'-Ebene, letztere in der t''-Ebene liegen. Nun hat der einzelne Ring zwischen K_ε und $K_{4\varepsilon}$ eine von der Größe von ε unabhängige Gestalt. Er kann durch Vermittlung einer Wurzeloperation auf einen schlichten Kreisring abgebildet werden, welcher durch Ähnlichkeitstransformation noch so abgeändert werden kann, daß der dem Kreise $K_{3\varepsilon}$ entsprechende Kreis der Einheitskreis wird und dann die beiden anderen Kreise ganz bestimmte von ε unabhängige Kreise werden. Hieraus schließen wir, daß alle Kurven $\bar{K}_{2\varepsilon}'$ und $\bar{K}_{2\varepsilon}''$, sofern sie eben in schlichte eineindeutige Bildbereiche der erwähnten Kreisringe eingebettet sind, den Prinzipien des Verzerrungssatzes unterworfen sind. Die Summe der Quadrate der Umfänge steht dann zur Summe der von allen diesen Linien umschlossenen Flächeninhalte $J_{2\varepsilon}$ in einem endlichen von ε unabhängigen Verhältnis, und es bleibt also die *Summe dieser Flächeninhalte* abzuschätzen. Um nun diese Flächeninhalte abzuschätzen, bemerken wir zunächst, daß dieselben kleiner sind als die Flächeninhalte J_α, welche von den Kurven $\bar{K}_\alpha'$ und $\bar{K}_\alpha''$ umschlossen werden, die in der t'- und t''-Ebene den Kreisen K_α entsprechen. Die Summe dieser Flächeninhalte ist selbstverständlich endlich und unterhalb einer von der Wahl von F' und F'' unabhängigen Schranke enthalten gemäß dem Vorbereitungssatze des Verzerrungssatzes. Wir zeigen nun, daß das Verhältnis $J_{2\varepsilon} : J_\alpha$ zugleich mit ε unendlich klein wird, wenn mit $J_{2\varepsilon}$ und J_α irgend zwei der erwähnten Flächeninhalte bezeichnet werden, von welchen $J_{2\varepsilon}$ in J_α enthalten ist.

Wir denken uns zum Zwecke dieses Nachweises außer den Kreisen mit den Radien ε, 2ε, 4ε noch die weiteren Kreise mit den Radien 8ε, $16\varepsilon, \cdots, 2^\nu\varepsilon$ konstruiert, wobei ν die größte ganze Zahl sei, für welche noch $2^\nu\varepsilon < \alpha$ ist. Auf diese Weise haben wir innerhalb jedes Kreises K_α im ganzen ν Ringe von gleichem Radienverhältnis konstruiert. Von diesen ν Ringen möge der erste und letzte außer Betracht gelassen werden; alsdann gilt für die übrigen $\nu - 2$ Ringe der Satz, daß jeder derselben nach außen und innen von einem der ν Ringe gewissermaßen umsäumt wird. Die so in K_α entstehenden $\nu - 2$ Ringe mit dem Radienverhältnis $1:8$ sind untereinander ähnlich, und es finden daher auf die Abbildungen dieser Ringe in der t'-Ebene und t''-Ebene die gestaltlich beschränkenden Gesetze des Verzerrungssatzes Anwendung. Bezeichnen wir die den genannten Kreisen in der t'-Ebene und t''-Ebene entsprechenden Linien oder vielmehr die von diesen Linien umschlossenen einzelnen Flächeninhalte mit $J_{2\varepsilon}, J_{4\varepsilon}, \cdots, J_{2^\nu\varepsilon}$, so gibt es auf Grund des Verzerrungssatzes eine von der Wahl von ε und von λ unabhängige Konstante $Q < 1$, sodaß man hat

$$J_{2\varepsilon} < QJ_{4\varepsilon} < Q^2J_{8\varepsilon} < \cdots < Q^{\lambda-1}J_{2^\lambda\varepsilon} < \cdots < Q^{\nu-1}J_{2^\nu\varepsilon},$$

wobei noch

$$J_{2^\nu\varepsilon} < J_\alpha$$

ist, also

$$J_{2\varepsilon} < Q^{\nu-1}J_\alpha.$$

Dies gilt für jedes einzelne $J_{2\varepsilon}$ im Verhältnis zu J_α, also auch für die zu betrachtenden Summen von Flächeninhalten. Die Summe aller $J_{2\varepsilon}$ ist mithin in der Tat eine mit ε unendlich klein werdende Größe.

Nachdem nunmehr feststeht, daß die Größe $t_1'' - t_1'$ im Gebiete $(f - \Sigma K_\alpha)$ gleichmäßig unendlich klein wird, wenn nur ε unendlich klein wird, ist damit gezeigt, daß eine Grenzfunktion

$$t = \lim_{\varepsilon=0} t'$$

existiert, welche als Resultat einer gleichmäßigen Konvergenz im Gebiete $(f - \Sigma K_\alpha)$ erscheint. Die Grenzfunktion t ist in diesem Bezirke eindeutig und regulär, sie wird in x_0 unendlich wie

$$t = \frac{1}{x - x_0} + ((0)),$$

d. h. genau so wie t', und sie vermittelt eine eineindeutige konforme Abbildung des Gebietes $(f - \Sigma K_\alpha)$ auf einen schlichten Bereich mit linearer Ränderzuordnung. Diese Funktion t existiert nun aber auch im ganzen Gebiet f. In der Tat kann man ja die Kreise K_α beliebig klein wählen, und immer bleibt unser Konvergenzbeweis gültig. Demnach existiert jedenfalls die Funktion t auch noch in beliebiger Nähe des Windungspunktes der Fläche f, und da sie nun in dieser beliebigen Nähe jedenfalls auf Grund des schlichten Abbildungscharakters beschränkt bleibt, so muß sie sich auch in den Windungspunkten selbst noch regulär verhalten, d. h. in der Weise, daß sie auch die Umgebung dieser Windungspunkte durchaus schlicht und stetig abbildet bis in die Windungspunkte selbst hinein.

Die Funktion $t(x)$ ist mithin die zu f gehörende uniformisierende Variable, deren Existenz jetzt bewiesen ist.

Es ist ebenso wie oben in § 2 von Interesse, den nunmehr bewiesenen auf S. 83 formulierten Limessatz auch mit Hilfe des *allgemeinen Konvergenzprinzips* darzutun.

Wir haben einerseits die mit p Rückkehrschnitten aufgeschnittene Fläche F, welche in der Aufschneidung oben mit f bezeichnet wurde, ferner F', der Fläche F benachbart mit denselben (koinzidierenden) Rückkehrschnitten, nach der Aufschneidung bezeichnet mit f'. Die zu f' gehörende uniformisierende Variable t' wird im Punkte x_0 unendlich wie

$$\frac{1}{x - x_0} + ((0)).$$

Dabei dachten wir uns den Punkt x_0 fest, wenn F' gegen F konvergiert. Es werde nunmehr um den Punkt x_0 ein Kreis K_R vom Radius R beschrieben, welcher auf F und F' ein gewöhnliches Kreisflächenstück K_R begrenzt. Alsdann wird das Maximum des absoluten Betrages der Funktion $t'(x)$ in dem Gebiete $(f' - K_R)$ wegen des Abbildungscharakters dieser Funktion offenbar auf der Linie K_R angenommen, und wir wollen beweisen, daß dieses Maximum M' unterhalb einer endlichen von der Wahl von F' unabhängigen Schranke bleibt. Für diesen Nachweis könnten wir uns auf den in „U. d. a. K. II." (Math. Ann. 69, S. 46) bewiesenen Hilfssatz (Vorbereitungssatz des Verzerrungssatzes) berufen. Wir können aber diesen Nachweis auch aus dem allgemeinen Konvergenzprinzip selbst gewinnen.

Dazu nehmen wir an, daß M' beliebig groß werden könnte. Alsdann gäbe es eine Folge von Flächen F', die gegen F konvergieren und zugehörende Funktionen t', für welche das betrachtete Maximum M' in der Grenze unendlich groß wird. Die Funktionen $\frac{t'}{M'}$ der Folge würden dann auf der Kreislinie K_R als Maximum des absoluten Betrages sämtlich den Wert 1 haben. Andererseits würden diese Funktionen im Punkte x_0 unendlich wie

$$\frac{\frac{1}{M'}}{x - x_0} + ((0)).$$

Wir könnten nun aus der Folge der Funktionen $\frac{t'}{M'}$ eine innerhalb $f - K_R$ nach vorläufigem Ausschluß der Windungspunkte selbst gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion τ konvergierende neue Folge herausgreifen. Diese konvergente Folge würde aber auch auf K_R selbst, sowie innerhalb des Kreises K_R gleichmäßig konvergieren, weil sie jedenfalls auf einer Kreislinie $K_{R'}$ konvergiert, wenn $R' > R$ gewählt wird, und weil die Funktionen $\frac{t'}{M'} - \frac{\frac{1}{M'}}{x - x_0}$ innerhalb $K_{R'}$ regulär sind und im Punkte x_0 verschwinden. Daraus folgt, daß die genannte Grenzfunktion τ die Eigenschaften besitzt, auf K_R den Wert 1 als Maximum des absoluten Betrages zu haben und in x_0 zu verschwinden, ferner die Eigenschaft, daß das Maximum des absoluten Betrages der Funktion τ im Gebiete $f - K_R$ auf der Kreislinie K_R erreicht wird. Hieraus ergibt sich ein Widerspruch, weil τ nun eine Funktion wäre, welche nicht konstant ist und doch an einem regulären Punkte ein Maximum ihres Betrages erreicht.*)

Nachdem somit feststeht, daß die Funktionen t' im Gebiete $f - K_R$ unterhalb einer festen Schranke bleiben, kann man nunmehr eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen t' bestimmen, gleichmäßig konvergent zunächst innerhalb $f - K_R$, dann aber auch auf K_R und innerhalb K_R, weil jedenfalls auf $K_{R'}$ $(R' > R)$ gleichmäßige Konvergenz stattfindet und weil $t' - \frac{1}{x - x_0}$ innerhalb $K_{R'}$ regulär ist und im Punkte x_0 verschwindet. Die Funktion

$$t = \lim_{F' \equiv F} t'$$

besitzt offenbar die Eigenschaften der für F zu bestimmenden uniformisierenden Variablen. Man bemerke, um dies einzusehen, daß ihre Existenz natürlich auch über die Begrenzung von f hinaus als erwiesen zu betrachten ist, weil ja die Funktionen t' auch über die Begrenzung von f

*) Vgl. hiermit eine Entwicklung S. 235 meiner Abhandlung in J. f. Math. 138.

hinaus existieren und nur Werte annehmen, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als das Maximum des absoluten Betrages der in $f' - K_R$ angenommenen Werte.

§ 6.

Durchführung des Kontinuitätsbeweises.

Wir gehen nunmehr nach den vorbereitenden Entwicklungen der §§ 1—5 zur Durchführung des Kontinuitätsbeweises über.

Es soll gezeigt werden für eine gegebene Riemannsche Fläche F vom Geschlecht $p \geqq 2$, daß zu derselben nach ihrer Aufschneidung zu einer $2p$-fach zusammenhängenden Fläche F_0 mittels p getrennter Rückkehrschnitte eine uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus $t \equiv t(x, y)$ gehört, durch deren Vermittlung F_0 umkehrbar eindeutig konform auf einen schlichten Bereich mit linearer Randänderung abgebildet wird. Daß die gestellte Aufgabe nicht mehr als eine Lösung gestatten kann, ist das Ergebnis des in der Abhandlung „U. d. a. K. II." geführten Unitätsbeweises. Die tatsächliche Exsitenz der Größe soll nun eben gezeigt werden.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Fläche F_0 in der schon oben § 1 angewandten Weise auf einen schlichten Bereich Φ_2 mit regulär analytischer Ränderzuordnung abgebildet. Die $2p$ Begrenzungslinien des Bereiches Φ_2 modifizieren wir unter Aufrechterhaltung der analytischen Randsubstitutionen nach der Methode des § 1 so, daß dieselben sämtlich geschlossene reguläre analytische Linien sind. Der unendlich ferne Punkt wird übrigens als innerer Punkt des Bereiches Φ_2 gedacht.

Wir stellen jetzt neben den Bereich Φ_2 irgend einen Bereich Φ_1 von der Gattung der oben betrachteten Bereiche Φ, welcher zudem *lineare* Ränderzuordnung besitzt. Einen solchen Bereich erhalten wir sofort, wenn wir bei einem von $2p$ Vollkreisen begrenzten schlichten Kreisbereich die $2p$ Kreise irgend wie paarweise durch lineare Substitutionen aufeinander beziehen unter richtiger Beachtung des Umlaufssinnes.

Das Uniformisierungsproblem, welches wir behandeln, ist durch den Übergang zum Bereiche Φ_2 in ein Abbildungsproblem für diesen Bereich verwandelt, nämlich das Problem der konformen Abbildung des Bereiches Φ_2 mit analytischer Ränderzuordnung in einen Bereich der Gattung Φ mit linearer Ränderzuordnung in der Art, daß bei der Abbildung zugeordnete Randpunkte wieder in zugeordnete Randpunkte übergehen. Diese Abbildungsaufgabe wird für den Bereich Φ_1 durch die identische Abbildung gelöst. Da die Aufgabe nur abgesehen von einer linearen Substitution bestimmt ist, führen wir vorteilhafterweise für den abgebildeten Bereich die Normierung des § 4 ein. D. h. wir normieren ihn so, daß die drei ersten Fixpunkte der linearen Randsubstitutionen mit 0, ∞, 1 zusammenfallen. Nennen wir die solcherweise normierten Bereiche Ψ, so haben wir entsprechend Φ einen durch eine lineare Substitution aus Φ_1 hervorgehenden Bereich Ψ_1 und entsprechend Φ_2 einen zu bestimmenden Bereich Ψ_2.

Der Beweis für die Existenz des Bereiches Ψ_2 zerfällt nun in folgende Beweisschritte.

1. In der Mannigfaltigkeit der Φ läßt sich von Φ_1 nach Φ_2 eine Überführungslinie Ω konstruieren.

2. Ist Φ^* irgend ein Φ der Überführungslinie, für welches das zugehörende Ψ, zu bezeichnen mit Ψ^*, existiert, so existiert auch für die auf der Überführungslinie Ω dem Bereiche Φ^* benachbarten Bereiche jedesmal ein zugehörendes Ψ, sofern man sich nur auf eine hinreichend kleine Nachbarschaft beschränkt.

3. Ist Φ^* irgend ein Φ der Überführungslinie Ω, in dessen beliebiger Nähe auf Ω noch Bereiche Φ existieren, für welche das zugehörende Ψ vorhanden ist, so gibt es auch zu Φ^* noch ein zugehörendes Ψ.

In der Tat können wir aus den vorstehenden drei Sätzen folgern, daß auch zu Φ_2 ein zugehörendes Ψ_2 vorhanden ist. Denn da zu Φ_1 ein Ψ_1 existiert, so kann man auf der Überführungslinie Ω nach Satz 2 ein Stück weitergehen mit der Gewißheit, daß dabei zu jedem Φ ein zugehörendes Ψ existiert. Nehmen wir nun an, daß zu Φ_2 kein zugehörendes Ψ_2 vorhanden wäre, so müßte es auf Ω ein Φ^* geben, das sicher von Φ_1 verschieden ist, jedoch mit Φ_2 zusammenfallen kann, von der Art, daß für alle Φ der Linie Ω von Φ_1 bis Φ^* (Φ^* exkl.) jeweilig ein zugehörendes Ψ existiert, während hinter Φ^* in beliebiger Nähe von Φ^* selbst stets noch ein Φ gefunden werden kann, für welches es ein zugehörendes Ψ nicht gibt. Ein solches Φ^* kann nun aber andererseits nicht existieren; denn dieses Φ^* müßte wegen Satz 3 jedenfalls selbst noch ein zugehörendes Ψ besitzen, und dann müßten wegen Satz 2. auch nach Φ^* in einer gewissen Nähe von Φ^* noch alle Φ ein zugehörendes Ψ haben, was der Definition von Φ^* widerspricht. Also ergibt sich in der Tat für Φ_2 ein zugehörender Bereich Ψ_2.

Wir hätten uns sonach zu überlegen, inwiefern die drei Sätze 1, 2, 3 gelten.

Satz 1 ist unmittelbar bewiesen durch die Entwicklungen des § 1.

Satz 2 finden wir aus den Entwicklungen des § 2—4 in folgender Weise. Wir bestimmen zu Φ^* ein Differential erster Art dW^*, dessen sämtliche Nullstellen einfach sind, so, daß keine der Nullstellen auf einer Begrenzungslinie von Φ^* noch auch auf einem der p Querschnitte liegt, durch deren Einführung die Fläche Φ^* in eine p-fach zusammenhängende Fläche φ^* verwandelt wird. Durch W^* wird φ^* abgebildet auf die Normalfläche N^* mit einem gewissen Parametersystem m^*. Indem wir von Φ^* zu solchen Φ übergehen, die Φ^* auf der Linie Ω hinreichend benachbart sind, wird die zugehörende Funktion W eine Abbildung von Φ auf eine Fläche N liefern, deren Konstantensysteme m sich beliebig wenig von dem Konstantensystem m^* unterscheidet, und es werden die p Begrenzungslinien der Fläche N sich beliebig wenig von den entsprechenden Begrenzungslinien der Fläche N^* unterscheiden. Gehen wir nun andererseits von Ψ^* aus und denken uns auf Ψ^* das Differential dW^* überpflanzt, so wird Ψ^* durch W^* auf dieselbe Fläche N^* abgebildet. Läßt man jetzt Ψ die $(6p-6)$-dimensionale Umgebung von Ψ^* beschreiben, indem man das Parametersystem i die volle Umgebung des zu Ψ^* gehörenden Invariantensystems i^* beschreiben läßt, so wird dabei nach Früherem die zugehörende Fläche N eine Variation ausführen, bei welcher die ganze Umgebung des Konstantensystems m^* in erschöpfender Weise ausgefüllt wird. Darin liegt der Beweis des Satzes 2. Denn man kann jetzt auf Ω die Nachbarschaft von Φ^* soweit einschränken, daß man beim Übergange von einem Φ dieser Nachbarschaft zu dem entsprechenden N in dem sicher voll ausgefüllten Bezirk der Konstanten m um m^* herum bleibt. Der Umstand, daß hier in der Regel zwar ein Zusammenfallen der Konstantensysteme m für ein Ψ und ein Φ bewirkt wird, nicht jedoch auch ein Zusammenfallen der Begrenzungslinien der beiden betreffenden Figuren N, gibt nicht zu Bedenken Anlaß, weil wir gemäß den genaueren in § 4 gegebenen Präzisierungen die zu betrachtenden nachbarlichen Variationen jedenfalls soweit einschränken können, daß eine Identität der Konstantensysteme für zwei Flächen N unmittelbar auch die deformatorische Äquivalenz der betreffenden Begrenzungslinien zur Folge hat.

Es bleibt somit nur noch Punkt 3. zu erledigen. Der Satz 3. ist wesentlich eine Folge des in § 5 bewiesenen Limessatzes. Zum Beweise bestimmen wir zu Φ^* wie vorher ein Differential dW^*. Es gibt dann, wie aus dem Zusatz S. 76 sofort ersichtlich ist, ein von dW^* verschiedenes Differential $d\overline{W}^*$, welches allen Bedingungen des Differentials dW^* genügt und außerdem so beschaffen ist, daß es mit dW^* keine Nullstelle gemeinschaftlich hat. Der Quotient $\frac{d\overline{W}^*}{dW^*}$ ist eine in Φ^* eindeutige Funktion mit $2p-2$ einfachen Unendlichkeitsstellen und vermittelt eine konforme Abbildung des Bereiches Φ^* auf eine längs p Rückkehrschnitten aufgeschnitten zu denkende und als solche mit f^* bezeichnete Fläche F^*, deren sämtliche Windungspunkte im Endlichen liegen. Der analog gebildete Quotient für die auf Ω vorbenachbarten Bereiche Φ liefert eine Abbildung dieser Flächen auf Flächen F bzw. f, welche sich von F^* im Sinne der in § 5 S. 83 eingeführten Terminologie beliebig wenig unterscheiden, da der Quotient ebenso wie die Differentiale selbst stetige Funktionen in Abhängigkeit von Φ sind, sodaß insbesondere auch die Windungspunkte der Fläche F beliebig wenig von den entsprechenden Windungspunkten der Fläche F^* entfernt sind. Es kann der Fall eintreten, daß jetzt die Begrenzungslinien der Fläche f durch die Windungspunkte selbst hindurchgehen. In diesem Falle ist aber sofort eine Abhilfe möglich, dadurch, daß man ein durch einen Windungspunkt gehendes Linienstück, von welcher Ordnung auch der betreffende Windungspunkt sein mag, ersetzen kann durch ein diesen Windungspunkt umkreisendes Linienstück.*) Auf diese Weise ist es stets möglich, auf die Voraussetzungen des Beweises unseres Limessatzes in § 5 zu kommen. Der Umstand, daß für die verschiedenen Flächen F die Begrenzungslinien von f sich nicht decken, wie in § 5 beim Beweise des Limessatzes angenommen wurde, ist ebenfalls belanglos, da jedenfalls alle diese Linien durch Deformation gleichwertig sind, wenn wir uns nur auf hinreichend dem Bereiche Φ^* benachbarte Bereiche Φ beschränken. Jetzt haben wir in f^* eine Fläche, für welche die Existenz der uniformisierenden Variablen noch nicht bekannt ist, andererseits in beliebiger Nähe Flächen f, für welche die Existenz bekannt ist. Nach dem Limessatze existiert daher auch zu f^* die uniformisierende Variable, d. h.: Es gehört zu Φ^* auch ein Bereich Ψ^*.

Wir haben im Vorhergehenden den Satz 3 durch Bezug auf den § 5 für Riemannsche Flächen F bewiesenen Limessatz erledigt. Wollen wir von dem *allgemeinen Konvergenzprinzip* Gebrauch machen, so können wir eine direkte, nur die Flächen Φ und Ψ selbst in Betracht nehmende Erledigung geben.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Funktion, welche Φ auf Ψ abbildet, als eine Funktion in Φ^* betrachtet, was bei hinreichender Nähe des Bereiches Φ an Φ^* keine Schwierigkeit darbietet. Die Funktion $t(z)$, welche diese Abbildung vermittelt, liefert eine schlichte Abbildung des Bereiches Φ^* auf einen Bereich $\overline{\Psi}^*$ mit noch nicht linearer Ränderzuordnung. Die Abbildung erstreckt sich dabei ein Stück über den Bereich Φ^* hinaus auf ein Gebiet, das wir mit Φ_+ bezeichnen können. Wir sind daher in der Lage, für den Bereich $\overline{\Psi}^*$, da die Abbildungsfunktion $t(z)$ sich im Unendlichen verhält wie

$$t = z + ((0)),$$

auf Grund des Verzerrungssatzes Abschätzungen anzugeben, welche unabhängig von der Wahl des Φ^* benachbarten Bereiches Φ sind, insbesondere können wir behaupten, daß die Begrenzungslinien des Bereiches $\overline{\Phi}^*$ alle

*) Vgl. auch das analoge Vorkommnis in § 7.

in einem endlichen Bezirk bleiben (vgl. den mehrfach erwähnten Hilfssatz in „U. d. a. K. II.“ S. 46 und die Entwicklungen in der vorliegenden Abhandlung S. 87 ff., welche gestatten, diesen Satz selbst mit Hilfe des allgemeinen Konvergenzprinzips zu beweisen). Man ist nun im Stande, eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $t(z)$ der genannten Art zu bilden, welche zu Bereichen Φ gehören, die ihrerseits gegen Φ^* konvergieren. Die Grenzfunktion, die sich ergibt, vermittelt dann offenbar eine Abbildung des Bereiches Φ^* auf einen Bereich Ψ^* mit linearer Ränderzuordnung, wie verlangt wird.

§ 7.

Die Einheit der Fundamentalbereiche Ψ.

In § 1 haben wir die Einheit der Bereiche Φ mit analytischer Ränderzuordnung dargetan. Dieser Beweis in Verbindung mit dem nunmehr bewiesenen Fundamentaltheorem gestattet uns jetzt den Nachweis des analogen Satzes von der Einheit der Bereiche Ψ mit linearer Ränderzuordnung zu führen.

Wir präzisieren zunächst den von uns zu beweisenden Satz. Wir verstehen unter Ψ einen Bereich mit $2p$ regulären analytischen Randkurven, die paarweise durch lineare Substitutionen aufeinander bezogen sind. Der unendlich ferne Punkt sei innerer Punkt des Bereiches Ψ. Mit Ψ_1 und Ψ_2 mögen irgend welche speziell gewählte Bereiche der Gattung Ψ bezeichnet sein. Alsdann wird behauptet, daß es möglich ist, in der Mannigfaltigkeit der Ψ eine Überführung des Bereiches Ψ_1 in den Bereich Ψ_2 vorzunehmen. Ähnlich, wie wir in § 1 von einer Überführungslinie Ω in der Φ-Mannigfaltigkeit sprachen, wollen wir jetzt von einer Überführungslinie ω in der Ψ-Mannigfaltigkeit sprechen. Die Linie ω verläuft natürlich auch im Gebiete der Bereiche Φ. Die Bedingung der beständig linearen Ränderzuordnung bedeutet insofern eine Erschwerung der ursprünglichen in § 1 behandelten Aufgabe, eben vermöge der genannten Nebenbedingung.

Wir gehen zur Bestimmung der Linie ω von einer Linie Ω aus, welche im Gebiete der Bereiche Φ den Übergang von Ψ_1 nach Ψ_2 darstellt. Auch die Bereiche Φ enthalten sämtlich den unendlich fernen Punkt in ihrem Innern. Es gehört nun zu jedem Bereiche Φ der Linie Ω ein ganz bestimmter Bereich Ψ auf Grund des bewiesenen Fundamentaltheorems. Um diesen Bereich Ψ zu einem völlig normierten zu machen, stellen wir die determinierende Bedingung, daß Φ auf Ψ in der Weise abgebildet sein soll, daß die Abbildungsfunktion $t(z)$ im Unendlichen in der Form

$$t = z + ((0))$$

entwickelbar ist. Die Linie ω wird nun direkt erklärt als Bild der Linie Ω, d. h. wir ordnen jedem Bereiche Φ der Linie Ω den zugehörenden Bereich Ψ zu. Dabei werden die Bereiche $\Phi_1 = \Psi_1$ und $\Phi_2 = \Psi_2$ sich selbst zugeordnet. Es kommt nur darauf an zu zeigen, daß Ψ sich stetig ändert, wenn Φ auf der Linie Ω stetig fortschreitet.

Für diesen Stetigkeitsbeweis dienen uns die Entwicklungen des § 2 als Grundlage. Vorweg können wir über die Beziehung der Bereiche Φ zu den Bereichen Ψ längs der ganzen Linie Ω einige Bemerkungen machen, deren Gültigkeit unmittelbar durch den Verzerrungssatz gewährleistet wird: Alle Bereiche Ψ der Überführungslinie ω besitzen die Eigenschaft, daß die zugehörenden Begrenzungslinien in einem gewissen endlichen Bezirke β bleiben, der für die ganze Überführungslinie gleichmäßig bestehen bleibt. Für die Begrenzungslinien der Bereiche Ψ existiert ferner eine längs der ganzen Linie ω gleichmäßig bestimmbare Minimalgröße derselben usw. Vgl. die entsprechenden Bemerkungen in § 1, S. 60.

Gehen wir nun zu dem Stetigkeitsbeweise selbst über.

Wir wählen irgend einen Bereich Φ^* der Linie Ω mit den zugehörenden Ψ^*. Mit Φ bezeichnen wir jetzt einen auf Ω dem Bereiche Φ^* benachbarten Bereich, mit Ψ den zugehörenden Bereich mit linearer Ränderzuordnung. Wir konstruieren wie oben S. 91 einen Quotienten $\frac{d\overline{W}^*}{d W^*} \equiv x^*(z)$ im Bereiche Φ^*, welcher in Φ^* eine Funktion mit $2p-2$ einfachen Unendlichkeitsstellen definiert. Wir nehmen zunächst an, daß keine der Unendlichkeitsstellen dieser Funktion im unendlich fernen Punkt der z-Ebene liegt und daß keine Nullstelle der Ableitung dieser Funktion auf einer der $2p$ Begrenzungslinien von Φ^* liegt, schließlich, daß auch der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung auf einen gewöhnlichen endlichen Punkt der als Bild von Φ^* sich ergebenden Riemannschen Fläche F^* abgebildet wird. (Für die hierdurch ausgeschlossenen Fälle vgl. die weiter unten gemachten Bemerkungen.) Dieser endliche Punkt heiße x_0^*; die Ebene des Bereiches F^* bezeichnen wir als x-Ebene. Die Funktion $z(x^*)$, welche die konforme Abbildung der Fläche F^* oder f^*, d. i. die längs den hier in Betracht kommenden p Rückkehrschnitten aufgeschnittene Fläche F^*, auf den Bereich Φ^* vermittelt, verhält sich im Punkte x_0^* wie

$$t^*(x^*) \equiv \frac{A^*}{x^* - x_0^*} + B^* + ((0)),$$

unter A^* und B^* gewisse Konstanten verstanden, von welchen A^* jedenfalls von 0 verschieden ist. Betrachten wir jetzt die Abbildung von f^* auf die Fläche Ψ^*, so ergibt sich für die Abbildungsfunktion $t^*(x^*)$ eine Entwicklung in derselben Gestalt mit denselben Konstanten A^* und B^*. In der Tat muß ja die Differenz $t^* - x^*$ im Punkte x_0^* gemäß der oben für die Abbildung von Φ^* auf Ψ^* gestellten Normierungsbedingung verschwinden.

Nunmehr gehen wir von Φ^* zu dem Nachbarbereiche Φ über. Die Funktion $x^*(z)$ ändert sich stetig beim Übergang von Φ^* zu Φ, wobei an Stelle von $x^*(z)$ die neue Funktion $x(z)$ tritt. Daraus ergibt sich, daß die Funktion $z(x)$ auf der Fläche F (Abbild von Φ) sich verhält wie

$$\frac{A^* + \varepsilon_1}{x - (x_0^* + \varepsilon_2)} + (B^* + \varepsilon_3) + ((0)),$$

unter ε_1, ε_2, ε_3 drei Größen verstanden, welche sämtlich unendlich klein werden, wenn Φ sich auf Ω dem Bereiche Φ^* unbegrenzt nähert. Es ist ferner x eine Größe, welche sich ebenfalls der Größe x^* unbegrenzt nähert bei der erwähnten Annäherung. Man beachte übrigens, daß wir unsere Aufmerksamkeit besonders auf das Verhalten der Funktionen auf den Begrenzungslinien der Fläche f zu richten haben. Die Stetigkeit in der Umgebung dieser Linie ist das uns eigentlich Interessierende. Es sei deswegen die Tatsache hervorgehoben, daß für die Ableitungen $\left|\frac{dz}{dx^*}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ von 0 und ∞ verschiedene obere und untere Schranken bestimmt werden können, welche für eine gewisse um die Begrenzungslinien von f^* abgegrenzte Umgebung derselben gültig sind und von der Wahl des Bereiches Φ, sofern derselbe nur genügend nahe an Φ^* liegt, unabhängig sind. Diese Schranken werden wieder durch den Verzerrungssatz in Verbindung mit dem „Vorbereitungssatz" desselben geliefert. Wir können nun von der Funktion $z(x)$ zu einer Funktion $\bar{z}(\bar{x})$ übergehen, welche aus $z(x)$ durch eine mittels einer infinitesimalen Ähnlichkeitstransformation in der x-Ebene ausgeführte Werteüberpflanzung entsteht. Die Ähnlichkeitstransformation soll diejenige ähnliche Abänderung der Fläche F in eine Fläche $\bar{F}$ definieren, durch welche, wenn dabei x in $\bar{x}$ übergeht, die Funktion $\bar{z}(\bar{x})$ an der Stelle $\bar{x} = x_0^*$ dieselbe Entwicklung bekommt, wie $z(x^*)$. Nachdem diese Überpflanzung ausgeführt ist, ergibt sich nunmehr, daß die Differenz $t - t^*$ insbesondere in der Umgebung der Begrenzungslinien von f^* eine stetige infinitesimale Größe ist, und zwar wesentlich nach derselben Methode, nach welcher wir in § 5 den Limessatz bewiesen haben.

Hiermit ist dann aber auch in Anbetracht der allgemeinen Vorbemerkungen auf S. 93 der gewünschte Nachweis des stetigen Übergangs des Bereiches Ψ in den Bereich Ψ^* bei unbegrenzter Annäherung des Bereiches Φ an den Bereich Φ^* erbracht. Die Konstanten des Bereichs Ψ erscheinen somit als stetige Funktionen des Überführungsparameters, wenn wir uns so ausdrücken dürfen. Insofern nun bei allen Ψ der gewonnenen Überführung generell eine Streifenbreite um die Begrenzungslinien von Ψ herum existiert, in welcher die Randsubstitutionen von Ψ ohne störende

Kollisionen ausführbar sind, ergibt sich, daß der Übergang von Ψ_1 nach Ψ_2 in endlich vielen Schritten ausgeführt werden kann, deren einzelner entweder eine bloße Parameteränderung der Substitutionen ist, die im Gebiete dieser Parameter geradlinig erfolgt, wobei von den p Begrenzungslinienpaaren je eine Linie festgehalten wird, oder aber bloße erlaubte Abänderungen der Begrenzungslinien bei festgehaltenen Substitutionen.

Wir haben für den soeben geführten Nachweis einige Annahmen in bezug auf die Funktion $x^*(z)$ gemacht. Sind diese Annahmen nicht erfüllt, so gelangen wir in jedem Falle durch geringe Modifikationen des Beweisverfahrens zu dem gewünschten Ziele. Diese Modifikationen wollen wir jetzt bezeichnen. Die im folgenden getrennt betrachteten Möglichkeiten können auch kombiniert auftreten, die Art der vorzunehmenden Beweismodifikation wird jedoch auch dann sofort klar sein.

Betrachten wir etwa den Fall, daß die Funktion $\frac{d\overline{W}^*}{dW^*} \equiv x^*(z)$ auf der Begrenzung des Bereiches Φ^* eine Nullstelle ihrer Ableitung besitzt. In diesem Falle könnte man daran denken, dieser Unbequemlichkeit durch eine geringe Modifikation der Differentiale oder eines derselben aus dem Wege zu gehen. Wir können indes diesen Fall auch durch eine Modifikation der Begrenzungslinien selbst auf den allgemeinen vorher betrachteten Fall zurückbringen in folgender Weise. Es seien etwa L_1^* und $L_1^{*\prime}$ die zwei betroffenen Begrenzungslinien des Bereiches Φ^*. Alsdann können wir L_1^* durch eine benachbarte, ebenfalls geschlossene reguläre Linie $\overline{L}_1^*$ ersetzen und entsprechend $L_1^{*\prime}$ abändern. Hierdurch ist Φ^* durch einen Bereich $\overline{\Phi}^*$ mit denselben Randsubstitutionen ersetzt. Ist nun Φ der betrachtete, Φ^* benachbarte Bereich, so können wir diesem Φ einen $\overline{\Phi}^*$ wieder benachbarten Bereich $\overline{\Phi}$ dadurch entsprechen lassen, daß wir die Begrenzungslinien L_1 und L_1' ersetzen durch $\overline{L}_1^*$ und $\overline{L}_1^{*\prime\prime}$, indem wir unter $\overline{L}_1^{*\prime\prime}$ diejenige geschlossene reguläre Linie verstehen, welche vermöge der zu Φ gehörenden Randsubstitution der Linie $\overline{L}_1^*$ entspricht. Der gefundene neue Bereich $\overline{\Phi}$ liegt natürlich jetzt nicht mehr auf der Linie Ω, er ist vielmehr der Linie Ω benachbart und bestimmt im Gebiete der Bereiche der Gattung Φ ein Linienstück $\overline{\Omega}$, welches insofern als Linienstück bezeichnet wird, als es nur für ein gewisses Stück der Linie Ω um Φ^* herum erklärt ist. Jetzt zeigen wir nach der vorher dargelegten Methode, daß bei $\overline{\Phi}$ einer stetigen Begrenzung auf $\overline{\Omega}$ eine stetige Bewegung auf $\overline{\omega}$ entspricht, wobei $\overline{\omega}$ ein Linienstück der Ψ-Mannigfaltigkeit ist, welches ω benachbart verläuft. Dann ist aber nun auch die stetige Bewegung auf Ω selbst an der Stelle Φ^* klar, weil die entsprechenden Bereiche auf $\overline{\Omega}$ und Ω einfach durch gewisse kleine und genau zu übersehende Deformationen der Begrenzungslinien entstehen.

Betrachten wir weiter den möglicherweise vorkommenden Fall, daß die Abbildung, welche die Funktion $x^*(z)$ leistet, im Unendlichen nicht schlicht ist, sodaß die Umgebung des Punktes $z = \infty$ auf ein Windungsflächenstück der Fläche F^* abgebildet wird. Alsdann wenden wir folgendes Schlußverfahren an. Wir wählen einen endlichen Punkt a der z-Ebene, den wir dem unendlich fernen Punkt beliebig nahe nehmen können. Die Wahl des Punktes a soll jedoch der Bedingung unterliegen, daß die Funktion $x^*(z)$ die Umgebung dieses Punktes auf die z-Ebene schlicht abbildet oder, anders ausgedrückt, daß die Ableitung dieser Funktion in a einen von Null verschiedenen endlichen Wert hat. Wir denken uns nun mit den Bereichen Φ^* und Φ, die wir betrachten, eine Transformation durch reziproke Radien $\zeta = \frac{1}{z-a}$ vorgenommen, sodaß der Punkt a in ∞ transformiert wird. Dadurch gewinnen wir aus dem betrachteten Linienstück auf Ω ein Linienstück $\overline{\Omega}$, welches jetzt nach dem zuerst betrachteten allgemeinen Fall behandelt werden kann, weil der für Φ^* aufgestellte Quotient der beiden Differentiale erster Art nach der Überpflanzung auf $\overline{\Phi}^*$ die allgemeinen Voraussetzungen erfüllt. Wir finden so, daß $\overline{\Omega}$ ein Linienstück $\overline{\omega}$ von Bereichen $\overline{\Psi}$ stetig entspricht, welche durch Funktionen $\tau(\zeta)$ aus $\overline{\Phi}$ hervorgehen. Andererseits entspricht jedem Bereiche $\overline{\Psi}$ auf $\overline{\omega}$ ein Bereich Ψ auf ω vermöge einer linearen Substitution wegen des Unitätssatzes. Der Beweis, daß die Menge ω auch einen stetigen Zug im Gebiete der Gattung Ψ repräsentiert, erfordert demnach nur den Beweis, daß die erwähnte lineare Substitution sich stetig ändert. Dies aber ergibt sich daraus, daß die erwähnte lineare Substitution sich aus den Anfangsgliedern der Entwicklung der Funktion $\tau(z)$ für $z = \infty$ bestimmt, eine Entwicklung, welche von der Form

$$\tau(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \cdots$$

sein muß, wobei B von 0 verschieden ist. Dabei ändern sich $A, B, C,$ stetig mit Φ, da sie ja durch bestimmte Integrale aus dem sich stetig ändernden $\tau(z)$ dargestellt werden können. Die Funktion $t(z)$ wird nun als diejenige lineare Funktion von $\tau(z)$ zu bestimmen sein, welche sich im Unendlichen wie $z + ((0))$ verhält. Diese lineare Funktion ändert sich aber in der Tat stetig mit A, B, C.

Es ist wiederum von Interesse festzustellen, daß der nunmehr bewiesene Satz von der Einheit der Bereiche Ψ sich auf Grund des bewiesenen Fundamentaltheorems verhältnismäßig einfach mit Hilfe des *allgemeinen Konvergenzprinzips* beweisen läßt, aus der Einheit der Bereiche Φ direkt. In der Tat ergibt sich die Stetigkeit der Änderung von Ψ bei

Änderung von Φ ganz ähnlich, wie der Stetigkeitsnachweis der Abelschen Integrale erster Art auf Grund der Bemerkung, daß einerseits für die bei stetiger Änderung von Φ in Betracht kommenden Bereiche Ψ durch den Verzerrungssatz bestimmte Schranken geliefert werden, welche die Anwendung des allgemeinen Konvergenzsatzes unmittelbar auf $t(z)$ ermöglichen, daß andererseits der Unitätssatz gilt. Es erübrigt sich auf Grund früherer Bemerkungen und Entwicklungen hierauf noch näher einzugehen.

Es sei schließlich noch auf eine dritte Möglichkeit der Beweisführung hingewiesen, welche auf dem iterierenden Verfahren beruht. In der Tat kann man bemerken, daß die Konvergenzabschätzung für das iterierende Verfahren gleichmäßig für alle Φ der Überführungslinie Ω ausgeführt werden kann, woraus dann die stetige Abhängigkeit der Funktion $t(z)$ in Abhängigkeit von Φ folgt mit Rücksicht auf die entsprechende stetige Abhängigkeit der beim iterierenden Verfahren auftretenden Näherungsfunktionen in Abhängigkeit von Φ. Hiermit aber ist wieder ein Beweis für die Einheit der Bereiche Ψ gegeben.

Zweiter Teil.

Die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven: Das Hauptkreistheorem.

§ 8.

Problemstellung und Unitätssatz.

Es sei nunmehr (x, y) eine reelle algebraische Kurve mit mindestens einem wirklich vorhandenen reellen Zuge. Wird entsprechend der in „U. d. a. K. I." gewählten Bezeichnung mit F_s die zu $y(x)$ gehörende Riemannsche Fläche bezeichnet, welche in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist, so hat F_s entsprechend den reellen Zügen der algebraischen Kurve ein System geschlossener und voneinander getrennt verlaufender Symmetrielinien (Rückkehrschnitte), deren Anzahl höchstens $p+1$ ist, wenn p das Geschlecht der Riemannschen Fläche F_s ist. Umgekehrt kann man sich auch eine in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrische Riemannsche Fläche F_s gegeben denken, für welche die zu betrachtende Symmetrie auf der Riemannschen Fläche mindestens einen festen Punkt und daher auch feste Linien aufweist, die sich notwendig als ein System voneinander völlig getrennt verlaufender geschlossener Rückkehrschnitte darstellen; es ist dann gemäß den von uns in „U. d. a. K. I." S. 184 ff. (Math. Ann. 67) gegebenen Entwicklungen stets möglich, zu F_s eine zugehörende irreduzible reelle algebraische Kurve (x, y) vermöge einer

Funktion $y(x)$ zu konstruieren, welche zur Fläche F_s eigentlich gehört und auf den genannten Symmetrielinien reelle Werte annimmt, woraus sich dann von selbst weiter ergibt, daß diese Funktion an keiner weiteren reellen Stelle der Fläche F_s einen reellen Wert annimmt. Wir bemerken, daß F_s durch das System der Symmetrielinien entweder in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird (*orthosymmetrischer* Fall in Kleins Bezeichnungsweise) oder ein Ganzes bleibt (*diasymmetrischer* Fall).

Wir formulieren nun das folgende Problem

Uniformisierungsproblem: Es soll eine relativ zur Fläche F_s unverzweigte uniformisierende Variable $t \equiv t(x, y)$ bestimmt werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß die von ihr auf den reellen Zügen der Kurve (x, y) oder, was dasselbe ist, auf den erwähnten Symmetrielinien der Fläche F_s angenommenen Werte reell sind. (Die Forderung, daß die Größe $t(x, y)$ linear-polymorph sein soll, wird nicht gestellt, wird sich jedoch als eine Folge der bereits angeführten Bedingungen herausstellen.)*)

Wir analysieren jetzt das gestellte Problem und suchen insbesondere bis zu der Einsicht zu gelangen, daß es nicht mehr als eine uniformisierende Variable mit den gewünschten Eigenschaften geben kann, und daß diese uniformisierende Variable notwendig *linear*-polymorph sein muß, sofern sie überhaupt existiert.

Zu dem Zwecke machen wir zunächst die Bemerkung, daß die Größe $t(x, y)$ auf Grund ihrer vorausgesetzten Eigenschaften an einer Stelle (x, y), die nicht einem reellen Zuge der Kurve (x, y) angehört, keinen reellen Wert haben kann. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte $t(x, y)$, weil auf den reellen Zügen reell, aus Gründen der analytischen Symmetrie auch an dem zu (x, y) konjugierten Kurvenpunkte $(\bar{x}, \bar{y})$ denselben reellen Wert annehmen. Das widerspricht jedoch der Uniformisierungseigenschaft der Größe $t(x, y)$.

Es werde jetzt im orthosymmetrischen Falle die eine Hälfte der Fläche F_s, im diasymmetrischen Falle jedoch die längs den Symmetrielinien aufgeschnittene Fläche F_s mit $[F_s]$ bezeichnet. Die Fläche $[F_s]$ werde wie in „U. d. a. K. I." durch Q**) Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche $[F_0]$ verwandelt. Wird $[F_0]$ durch Vermittlung der Funktion $t(x, y)$ konform abgebildet, so ergibt sich als Bild von $[F_0]$ ein schlichtes einfach zusammenhängendes Flächenstück φ_0, welches die Achse des Reellen nicht durchsetzt, jedoch in $2Q$ getrennt liegenden Strecken an die Achse des Reellen anstößt. Betrachten wir diese konforme

*) Diese Formulierung habe ich bereits 1907 in meiner Gött. Nachr.-Note „über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven" gewählt.

**) Q ist im orthosymmetrischen Falle gleich p, im diasymmetrischen Falle gleich $2p$.

Abbildung in ihrem weiteren Verlaufe, wenn wir die Überschreitung der Q Querschnitte, jedoch noch nicht die Überschreitung der Symmetrielinien gestatten, so werden offenbar die verschiedenen sich ergebenden Zweige der Funktion $t(x, y)$ lauter verschiedene Bilder der Fläche $[F_0]$ entwerfen, welche in ihrer Gesamtheit sich notwendigerweise zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet γ oberhalb der Achse des Reellen zusammenschließen, welches nunmehr offenbar nicht mehr nur in endlich vielen, sondern allgemein zu reden, in unendlich vielen getrennten Stücken an die Achse des Reellen anstößt. Gestatten wir nunmehr auch die Überschreitung der Symmetrielinien, so wird der Effekt aus Gründen der analytischen Symmetrie nur der sein, daß wir ein zu γ symmetrisches Gebiet $\bar{\gamma}$ erhalten, welches mit γ zusammen ein, allgemein zu reden, unendlich-vielfach zusammenhängendes Gebiet T bildet, das in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist und welches durch analytische Transformationen vermöge der Nebeneinanderlagerung von lauter Bildern eines Bereiches Φ entsteht, der seinerseits von φ_0 und seinem Spiegelbilde $\bar{\varphi}_0$ gebildet wird und Q analytische Randsubstitutionen aufweist. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, auf die erwähnten unendlich vielen Bilder des Bereiches Φ den Verzerrungssatz zur Anwendung zu bringen und zwar in folgender Gestalt: Wird für irgend einen der erwähnten Bildbereiche von Φ mit r die Summe der Längen der in ihm enthaltenen reellen Strecken bezeichnet, mit u der Umfang der vollständigen Begrenzung desselben Bereiches, so hat das Verhältnis $r : u$ einen Wert, der zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken bleibt, die nicht von der Wahl des genannten Bildbereiches abhängen. Beachtet man nun, daß offenbar die Summe aller r, d. h. die Gesamtlänge der reellen Strecken, welche der Bereich T enthält, endlich ist, wenn man, was unwesentlich ist, von der einen durchs Unendliche gehend gedachten, in Φ selbst enthaltenen reellen Strecke absieht, so ergibt sich hieraus, daß die Summe aller u konvergent ist. Wenn man also den Bereich T nach und nach durch Näherungsbereiche ausschöpft, indem man immer mehr Bilder von Φ hinzunimmt, so wird der nicht reelle Begrenzungsteil des Näherungsbereiches eine Gesamtlänge besitzen, welche schließlich unendlich klein wird. Das heißt aber, daß der Bereich T die ganze Ebene ausfüllt und daß folglich exklusive von, allgemein zu reden, unendlich vielen diskreten reellen Punkten die einzelne analytische Randsubstitution des Bereiches Φ, welche offenbar T in sich selbst transformiert, eine reelle lineare Substitution ist, nämlich eine Substitution, welche die obere Halbebene eineindeutig in sich transformiert, wobei zu beachten ist, daß dieser Satz in der Tat ja nur voraussetzt, daß die Eindeutigkeit der Abbildung für alle nicht reellen Punkte der oberen Halbebene feststeht. Es versteht sich nun von selbst, daß überhaupt alle relativen Zweige der Funktion $t(x, y)$, gleichgültig, ob man zu denselben lediglich durch Überschreitung von Querschnitten oder auch durch Zuhilfenahme von Überschreitungen der Symmetrielinien gelangt sei, durch reelle lineare Substitutionen verknüpft sind, da der Überschreitung einer Symmetrielinie in der x-Ebene ja stets nur eine Spiegelung an der Achse des Reellen entspricht. Auch ist jetzt klar, daß die Größe $t(x, y)$ durch ihre Eigenschaften bis auf eine lineare Substitution vollständig bestimmt ist, weil die Annahme der Existenz zweier verschiedener derartiger Größen, etwa t_1 und t_2, zu einer konformen Beziehung der beiden Ebenen aufeinander führen würde, bei welcher die obere Halbebene der einen Ebene eineindeutig konform auf die obere, eventuell untere, Halbebene der anderen Ebene bezogen wird.

Zum Schlusse dieses Paragraphen werde noch darauf hingewiesen, daß der Unitätsbeweis in dem Umfange, wie wir ihn hier geführt haben, sich einfacher führen läßt, insbesondere ohne Bezugnahme auf den allgemeinen Verzerrungssatz, wenn man die lineare Abhängigkeit der Zweige untereinander zunächst mit in die Voraussetzung aufnimmt. Ist dann der Existenzbeweis dieser uniformisierenden Variablen t^* geführt, so kann man die allgemeinere postulierte Größe t in Abhängigkeit von t^* durch das Cauchysche Integral darstellen, wobei man in der t^*-Ebene wegen der Linearität der Substitutionen die Endlichkeit des Verhältnisses $r : u$ unter alleiniger Bezugnahme auf den Verzerrungssatz für lineare Funktionen erkennt. Damit ist aber für unsere Abschätzungsmethode das Erforderliche erreicht. Es ergibt sich, daß t eine lineare Funktion von t^* sein muß.

§ 9.

Auffassung der gesuchten uniformisierenden Variablen als einer uniformisierenden Variablen des Schottkyschen Typus und damit zusammenhängender Existenzbeweis.

Die von uns zu bestimmende linear-polymorphe Uniformisierungstranszendente $t(x, y)$ läßt sich leicht als eine uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus, wie wir sie im ersten Teile vorliegender Abhandlung betrachtet haben, charakterisieren. Das ist zunächst unmittelbar einleuchtend in dem Falle, daß F_s eine orthosymmetrische Riemannsche Fläche ist. In der Tat brauchen wir in diesem Falle nur die beiden zueinander symmetrischen Hälften $[F_s]$, aufgeschnitten längs den p Querschnitten, längs den Symmetrielinien wieder zusammenzuheften, so haben wir wieder F_s, nunmehr aufgeschnitten längs p die Fläche F_s nicht zerstückenden Rückkehrschnitten, deren jeder einzelne zu sich selbst symmetrisch ist und die Symmetrielinien in zwei Punkten durchsetzt. Nennen wir diese $2p$-fach zusammenhängende Fläche f_0 und denken uns zu f_0 die zugehörende uniformisierende Variable t des Schottkyschen Typus nach der im ersten Teile entwickelten Methode bestimmt, so läßt sich nun von dieser uniformisierenden Variablen zeigen, daß die Werte, welche dieselbe auf den Symmetrielinien annimmt, sämtlich auf einem und demselben Kreise der t-Ebene liegen, welcher Kreis vermöge einer linearen Transformation in die Achse des Rellen verwandelt werden kann.

Der Beweis wird folgendermaßen geführt. Man denke sich neben der in der angegebenen Weise bestimmten Funktion $t(x, y)$ die Funktion $t'(x, y) \equiv \bar{t}(\bar{x}, \bar{y})$ gebildet, indem man mit $\bar{t}(\bar{x}, \bar{y})$ den zu $t(\bar{x}, \bar{y})$ konjugiert-komplexen Wert bezeichnet. Alsdann ist unmittelbar einleuchtend, daß die Größe $t'(x, y)$ ebenso wie $t(x, y)$ eine zu f_0 gehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus darstellt. Zwei derartige uniformisierende Variable müssen nun gemäß dem für die uniformisierenden Variablen des Schottkyschen Typus geltenden Unitätssatze durch eine lineare Substitution ineinander übergehen. Es seien jetzt t_1, t_2, t_3, t_4 irgend vier Werte, welche die Größe t auf dem Symmetrieliniensystem der Fläche F_s annimmt, alsdann sind $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4$ die entsprechenden Werte, welche die Funktion t' auf dem Symmetrieliniensystem an denselben Punkten annimmt. Diese vier Werte gehen nun aus den erstgenannten vier Werten vermöge der oben erwähnten linearen Substitution hervor. Dabei bleibt das Doppelverhältnis ungeändert. Dieses Doppelverhältnis geht andererseits in seinen konjugierten Wert über. Diesen beiden Bedingungen wird nur genügt, wenn das Doppelverhältnis reell ist, wenn also die vier Punkte t_1, t_2, t_3, t_4 auf einem Kreise liegen. Hiermit ist aber gezeigt, daß alle von $t(x, y)$ auf den Symmetrielinien angenommenen Werte auf einem und demselben Kreise liegen, da man zu drei festgewählten Werten t_1, t_2, t_3, welche den Kreis bestimmen, jeden beliebigen weiteren auf einer Symmetrielinie angenommenen Wert als den Wert t_4 wählen kann.

Sei jetzt die Fläche F_s *diasymmetrisch.* In diesem Falle ist es ebenfalls möglich, die Größe t als eine zu F_s gehörende uniformisierende Variable des Schottkyschen Typus zu charakterisieren. Dazu sind allerdings die weiter unten in § 11 gegebenen Entwicklungen erforderlich. Einfacher und für den gegenwärtigen Zweck des Existenzbeweises ausreichend ist es, von der Fläche F_s überzugehen zu einer relativ zu F_s zweiblättrigen Überlagerungsfläche $\overline{F}_s$, welche aus F_s entsteht, indem man die Fläche $[F_s]$ in zwei kongruent übereinander liegenden Exemplaren denkt und diese nun längs den sämtlichen Symmetrielinien über Kreuz zu einer einzigen Fläche, eben der Fläche $\overline{F}_s$ zusammenheftet. Diese Fläche $\overline{F}_s$ ist gemäß ihrer Konstruktion orthosymmetrisch, indem sie eben aus zwei zueinander symmetrischen Hälften hergestellt ist. Diese orthosymmetrische Fläche ist vom Geschlecht $2p$. Die Anzahl ihrer Symmetrielinien (reelle Züge der zugehörenden reellen algebraischen Kurve) ist doppelt so groß als die entsprechende Anzahl bei F_s. Die Fläche $\overline{F}_s$ ist gemäß dem Schottkyschen Typus dadurch aufgeschnitten zu denken, daß man die oben S. 99 erwähnten $Q = 2p$ Querschnitte in dem benutzten zweiten Exemplare $[F_s]$ symmetrisch wiederholt.

§ 10.

Selbständiger Kontinuitätsbeweis des Hauptkreistheorems.

Es ist wegen verschiedener dabei zur Geltung kommender Gesichtspunkte von Interesse, auch einen selbständigen Beweis des Hauptkreistheorems mittels Kontinuitätsmethode zu geben.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Fläche $[F_0]$, d. i. im orthosymmetrischen Falle*) die längs p Querschnitten aufgeschnittene Fläche $[F_s]$, konform auf einen Bereich φ_0 mit p regulären Randsubstitutionen und $2p$ reellen Begrenzungsstücken abgebildet, welcher ganz oberhalb der Achse des Reellen liegt. Eine solche Abbildung erhalten wir in der wünschenswerten Form, indem wir uns den Bereich $[F_0]$ über seine $2p$ Querschnittseiten der Begrenzung hinaus ein Stück fortgesetzt denken durch Ansetzung von $2p$ bandartigen Flächenstreifen, welche sich ebenfalls bis an die Symmetrielinien heranerstrecken. Die so erweiterte einfach zusammenhängende Fläche $[F_0]$ möge mit $[F_0]'$ bezeichnet werden. Nun werde der einfach zusammenhängende Bereich $[F_0]'$ eineindeutig konform auf die obere Halbebene abgebildet. Dabei wird $[F_0]$ auf einen Bereich φ_0 abgebildet, welcher zusammen mit seinem Spiegelbilde $\overline{\varphi}_0$ einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich Φ_s mit p regulären analytischen Randsubstitutionen bildet. Es gilt, den Nachweis zu führen, daß der Bereich Φ_s eineindeutig konform auf einen Bereich Ψ_s derselben Gattung wie Φ_s abgebildet werden kann, für welchen jedoch die erwähnten p regulären Randsubstitutionen reelle *lineare*, nicht mehr nur analytische Substitutionen sind. Sowohl bei Φ_s als auch bei Ψ_s werden wir zweckmäßig die Annahme machen, daß der unendlich ferne Punkt dem Innern des Bereiches angehört, und wir können uns auch vorstellen, daß für die zu bestimmende Abbildung, bei welcher natürlich die zu Φ_s gehörenden Stücke der Achse des Reellen in die entsprechenden Stücke des Bereiches Ψ_s übergehen sollen, der unendlich ferne Punkt sich selbst entsprechen soll.

Bereiche von der Gattung Ψ_s erhalten wir sofort, wenn wir $2p$ die

*) Den diasymmetrischen Fall können wir nach der vorher geschilderten Methode unter den orthosymmetrischen Fall subsumieren.

Achse des Reellen orthogonal schneidende Kreise, die sich gegenseitig ausschließen, durch reelle hyperbolische Substitutionen irgendwie aufeinander beziehen, wobei nur in bezug auf die Paarung der Kreise der Bedingung zu genügen ist, daß dieselbe in topologischer Beziehung der bei Φ_s bestehenden Paarung entspricht, sodaß bei Durchlaufung der Begrenzung der oberen Hälfte von Φ_s und Ψ_s entsprechende Stücke in gleicher Weise sich folgen.

Wir bemerken, wenn wir jetzt die Kette der den Kontinuitätsbeweis im allgemeineren Falle des ersten Teiles der Abhandlung bildenden Entwicklungen der Reihe nach durchgehen, zunächst, daß die Bereiche der Gattung Φ_s ein *einheitliches Kontinuum* bilden, sofern wir eben nur solche Bereiche als Bereiche Φ_s in Betracht ziehen, bei welchen auch die oben erwähnte Reihenfolge in der Paarung dieselbe ist. Dieser Nachweis der Einheit der Bereiche Φ_s vollzieht sich ganz analog dem obigen Beweise; nur wird man, was nicht die geringste Schwierigkeit bietet, bei allen Deformationen stets die Symmetrie im Auge zu behalten haben. Betrachten wir andererseits die Bereiche Ψ_s, so können wir zu Ψ_s zunächst die entsprechenden p Abelschen Integrale erster Art bilden, in dem wir von den Potentialen $u_1, \cdots, u_p$ ausgehen, welche in Φ_s eindeutig sind und wegen ihrer Unität aus Gründen der Symmetrie offenbar an spiegelbildlich symmetrischen Punkten des Bereiches Φ_s denselben Wert annehmen. Für diese Potentiale ist daher längs sämtlichen dem Bereiche Φ_s angehörenden Stücken der Achse des Reellen die Ableitung in Richtung der Normalen zu dieser Achse gleich Null, woraus folgt, daß die zugehörenden konjugierten Potentiale $v_1, \cdots, v_p$ längs jedes derartigen Stückes konstant sind und daß die p linear unabhängen Integralfunktionen $w_\alpha = u_\alpha + i v_\alpha$ p reelle Abelsche Differentiale erster Art dw_α liefern, welche sich bei stetiger Änderung von Φ_s ebenfalls stetig ändern.

Wir haben uns nun weiter der Existenz einer $(3p-3)$-parametrigen *Normalfigur* zu vergewissern. Zu einer solchen gelangen wir folgendermaßen. Wir bemerken vorab, daß das allgemeinste zu Φ_s gehörende reelle Abelsche Differential erster Art eine reelle lineare Kombination der obengenannten p Differentiale dw_α ist. Dies ergibt sich durch Betrachtung der Periodizitätsmoduln aus dem Umstande, daß für ein solches Differential dw notwendigerweise der reelle Teil von w eine Funktion sein muß, die längs den reellen Stücken von Φ_s die normale Ableitung Null hat und daher gemäß dem Spiegelungsprinzip für Potentialfunktionen in Φ_s eindeutig sein muß. Ist sie doch in jeder einzelnen Hälfte von Φ_s jedenfalls eindeutig, weil eine derartige Hälfte ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Nun ergibt sich der dem Brill-Noetherschen (S. 74) analoge Satz, daß die *reellen* Differentiale erster Art nicht eine allen gemeinschaftliche Nullstelle besitzen können, und daraus folgern wir nach Analogie eines oben (S. 75) gegebenen Beweises, daß das *allgemeine reelle Differential dw erster Art nur einfache Nullstellen* haben wird, welche teils einzeln auftreten und dann reell sind, teils konjugiert angeordnet sind, eine Unterscheidung, auf welche es jedoch für unsere Zwecke nicht näher ankommt. Die Normalfigur wird nun gefunden, indem man ein reelles dw mit nur einfachen Nullstellen zu Φ_s bestimmt und die Normierung von w in Abhängigkeit von Φ_s dadurch gibt, daß man vorschreibt, der imaginäre Teil von w solle im Unendlichen, also auf dem ganzen betreffenden Stück der Achse des Reellen verschwinden und gegenüber den analytischen Randsubstitutionen des Bereiches Φ_s in seinem reellen Teile feste Periodizitäsmoduln bewahren, schließlich solle der reelle Teil von w in einer Nullstelle von dw verschwinden. Im übrigen hat man sich den Bereich Φ_s dabei, um einen Zweig von w zu isolieren, längs sämtlichen Stücken der Achse des Reellen mit Ausnahme des durchs Unendliche gehenden aufgeschnitten vorzustellen, sodaß dadurch der Bereich Φ_s in einen einfach zusammenhängenden, in bezug auf die Achse zu sich selbst symmetrischen Bereich verwandelt wird. Das Bild dieses einfach zusammenhängenden Bereiches, welches sich bei der konformen Abbildung durch das normierte Integral erster Art w ergibt, ist die gewünschte $(3p-3)$-parametrige zweckdienliche Normalfigur. Als frei veränderliche Bestimmungsstücke dieser Figur sind die $2p-3$ Bestimmungsstücke für die Lage der Windungspunkte der Normalfigur einerseits und andererseits p Periodizitätsmoduln des imaginären Teils zu bezeichnen, deren unabhängige Wahl nach folgender Regel getroffen werden kann. Man denke sich $[F_s]$, wie oben näher bezeichnet, durch p Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt. Man hat dann einerseits die Wertdifferenzen längs diesen p Querschnitten zu geben, welche jedoch entsprechend den σ vorhandenen geschlossenen Begrenzungslinien von $[F_s]$ im ganzen $\sigma-1$ Bedingungen unterworfen sind, für deren Erfüllung man beachte, daß $p-(\sigma-1)$ eine gerade Zahl $2p'$ ist, indem p' die Anzahl der innerhalb $[F_s]$ möglichen getrennten die Fläche $[F_s]$ nicht zerfällenden Rückkehrschnittpaare ist, längs welchen die $2p'$ Periodizitätsmoduln frei gegeben werden können. Abgesehen von den $2p'$ Größen sind die den Übergang von einer Symmetrielinie zur andern entsprechenden Wertdifferenzen des imaginären Teiles zu geben, was noch $\sigma-1$ weitere Bestimmungsstücke der Normalfigur sind.

Es dürfte überflüssig sein, noch weiter auf den Kontinuitätsbeweis des Hauptkreistheorems einzugehen. Erwähnt sei nur noch, daß der Nachweis der analytischen Abhängigkeit zwischen den Konstanten des Bereiches Ψ_s einerseits und den Konstanten der Normalfigur andererseits im vorliegenden Falle durch den Hinweis auf gewisse von Schottky gebildete

Reihen*) erledigt wird, welche in dem hier betrachteten Falle von Bereichen Ψ_s tatsächlich auch noch bei komplexer Variation der Konstanten der linearen Randsubstitution wegen des Erfülltseins der Schottkyschen Bedingung der Konvergenz der Radiensumme konvergieren und auch direkte Darstellungen für die Abelschen Integrale erster Art geben, was mit Hilfe der Poincaréschen Reihen nicht möglich ist.

Es mag weiter noch besonders darauf hingewiesen werden, wie auch hier die Einheit der symmetrischen Riemannschen Flächen eines bestimmten Typus sich als die Einheit der Bereiche Φ_s wiederspiegelt. Dabei ist jedoch hervorzuheben, daß hier noch das Analogon für den Fall der diasymmetrischen Riemannschen Flächen fehlt, die wir in diesem Paragraphen vermöge der in § 9 entwickelten Vorstellung unter die orthosymmetrischen Flächen subsumiert haben. Diese Zurückführung kann für die Frage der Einheit dieser Flächen nicht mehr herangezogen werden. Vielmehr ist eine selbständige Betrachtung erforderlich, deren Wesen in der Lösung eines bestimmten Analysis-situs-Problems liegt. In der Tat prägt sich in den Bereichen der Gattung Φ_s der diasymmetrische Typus aus, wenn die Paarung der Randkurven mindestens für ein Paar mit der Modifikation vorgenommen gedacht wird, daß nun nicht mehr bei der analytischen Zuordnung die obere Hälfte des Kurvenbogens wieder der oberen Hälfte und die untere der unteren entspricht, sondern umgekehrt. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man sich einem derartig gebildeten Bereiche Φ_s eine reelle algebraische Gleichung zugeordnet denkt, nach der allgemeinen Methode zwei Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ bildend, die in Φ_s eindeutig sind, gegenüber den Randsubstitutionen ungeändert bleiben und auf den reellen Achsenstücken reell sind, die ferner die Eigenschaft haben, daß (x, y) ein dem Bereiche Φ_s eigentlich zugehörendes irreduzibles algebraisches Gebilde ist. Indem man mit $x(z)$ den Bereich Φ_s konform abbildet, wird Φ_s in eine zu sich selbst symmetrische Riemannsche Fläche F_s übergeführt, welche Symmetrielinien besitzt und nun durch dieselben offenbar nicht zerfällt, hingegen in zwei zueinander symmetrisch einfach zusammenhängende Stücke zerlegt wird, wenn man zu den Symmetrielinien p zu sich selbst symmetrische, das Symmetrieliniensystem je in zwei Punkten schneidende geeignete Rückkehrschnitte (entsprechend den Randkurven von Φ_s) hinzunimmt, welche, wie auch die Figur eines Φ_s zeigt, für sich genommen keinen Zerfall der Fläche F_s bewirken. Wir sehen auf diese Weise im Zusammenhange mit den Kontinuitätsideen eine ganz bestimmte Frage entstehen, nämlich die im folgenden Paragraphen behandelte *Frage der*

*) F. Schottky: „Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Substitution ihres Arguments ungeändert bleibt.“ J. f. Math. 101, S. 227 ff.

symmetrischen Aufschneidung der symmetrischen, insbesondere auch der diasymmetrischen Riemannschen Fläche. Auch die Frage nach einer durch ein reelles Abelsches Integral zu definierenden $(3p-3)$-parametrigen Normalfigur der diasymmetrischen Flächen erledigt sich dann analog wie oben bei den orthosymmetrischen Flächen. Natürlich ist a posteriori die Figur Ψ_s selbst mit der linearen Ränderzuordnung eine $(3p-3)$-parametrige Normalfigur.

§ 11.

Die symmetrische Aufschneidung der symmetrischen Riemannschen Flächen und damit zusammenhängende neue Formulierung des Hauptkreistheorems.

Es soll in diesem Paragraphen der folgende Satz begründet werden.

Satz: Jede symmetrische Riemannsche Fläche F_s mit Symmetrielinien kann, wenn p das Geschlecht dieser Fläche ist, durch p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte, deren jeder einzelne das Symmetrieliniensystem an genau zwei Stellen durchkreuzt, in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche verwandelt werden.

Zusatz: Diese $2p$-fach zusammenhängende Fläche zerfällt in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften, wenn man die Fläche F_s außer längs den erwähnten p Rückkehrschnitten auch noch längs sämtlichen Symmetrielinien aufschneidet.

Bevor wir an den Beweis der Existenz der p Rückkehrschnitte gehen, seien vorab einige Bemerkungen gemacht. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß jeder auf der Fläche F_s gezogene, zu sich selbst symmetrische Rückkehrschnitt, welcher eine Symmetrielinie in einem Punkte kreuzt, dieselbe oder eine andere Symmetrielinie notwendig noch einmal treffen muß und auch nicht mehr als einmal. Die beiden Treffpunkte sind notwendig Punkte, in welchen der Rückkehrschnitt die Symmetrielinie durchschneidet.

Nehmen wir an, daß es uns gelungen sei, p zu sich selbst symmetrische Rückkehrschnitte der in dem Satze geforderten Art zu finden, so folgern wir zunächst die Richtigkeit des Zusatzes.

Durch das vollständige System der Symmetrielinien wird die Fläche F_s, wenn wir etwa den diasymmetrischen Fall betrachten, in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche $[F_s]$ verwandelt. Das Ausziehen der p Rückkehrschnitte stellt sich in dieser Fläche $[F_s]$ als ein Ziehen von $2p$ Querschnitten dar. Dabei muß jedenfalls die Fläche $[F_s]$ in Stücke zerfallen. Nehmen wir jetzt an, daß die Anzahl der Stücke, in welche $[F_s]$ zerfällt, größer als 2 ist, so unterscheiden wir paarweise zueinander symmetrische Stücke und zu sich selbst symmetrische Stücke. Denken wir uns jetzt diese Stücke, wie sie liegen, längs den Symmetrielinien wieder zusammengeheftet, so wird notwendigerweise jedes zu sich selbst symmetrische Stück und jedes Paar zueinander symmetrischer Stücke nach der Heftung je ein besonderes Flächenstück liefern. Diese Flächenstücke stellen nun aber das Resultat der Aufschneidung der Fläche F_s durch die p Rückkehrschnitte allein (ohne Hinzunahme der Symmetrielinien) dar und bilden also in Wahrheit ein in sich zusammenhängendes Flächenstück. Demnach zerfällt $[F_s]$ durch die $2p$ Querschnitte genau in zwei zueinander symmetrische Flächenstücke und diese sind dann selbstverständlich einfach zusammenhängend.

Was nun den Beweis des *Satzes* selbst anbetrifft, nämlich den Beweis der Existenz der p Rückkehrschnitte, so versteht sich derselbe für den Fall, daß die Fläche F_s *orthosymmetrisch* ist, also durch das vollständige System der Symmetrielinien in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird, von selbst, da man nur nötig hat, die eine Hälfte, welche notwendig den Zusammenhang $p+1$ besitzt, durch p Querschnitte einfach zusammenhängend zu machen, wie das auch in Math. Ann. 67, S. 203 und oben S. 99 geschehen ist, und die symmetrische Hälfte in symmetrischer Weise aufzuschneiden.

Eine Schwierigkeit bietet lediglich der Fall, in welchem die Fläche F_s *diasymmetrisch* ist, d. h. durch das System der Symmetrielinien noch nicht in Stücke zerlegt wird. Ist σ die Anzahl der Symmetrielinien, so ist jedenfalls $\sigma \leqq p$.*)

Die Fläche $[F_s]$ ist dann $2p$-fach zusammenhängend und besitzt 2σ Begrenzungslinien. Nun wählen wir in $[F_s]$ einen beliebigen Punkt P. Mit P' werde der zu P spiegelbildlich symmetrische Punkt bezeichnet. Wir konstruieren innerhalb $[F_s]$ eine sich selbst nicht treffende Verbindungslinie l von P nach P', darauf die zu l spiegelbildlich symmetrische Verbindungslinie l' von P' nach P. Indem wir uns vorstellen, daß wir die Linie l und gleichzeitig die Linie l' durchlaufen, ausgehend von P bzw. P' und darauf achtend, daß wir in demselben Moment immer in spiegelbildlich symmetrischen Punkten sind, unterscheiden wir zwei Fälle: es kann erstens sein, daß die Linie l mit l' keinen Punkt gemeinschaftlich hat außer P und P'; in diesem Falle ist die aus l und l' zusammengesetzte Linie ein Rückkehrschnitt R. Es kann zweitens sein, daß die Linien l und l' außer P und P' noch andere Punkte gemeinschaftlich haben.

*) σ kann jeden ganzzahligen positiven Wert $\leqq p$ haben, wie man sich am Beispiele der symmetrischen hyperelliptischen Fläche mit teils reellen, teils konjugiert-imaginären Windungspunkten sofort klarmachen kann. σ kann nicht größer als p sein, weil dann eben σ die Fläche nicht zerstückende Symmetrielinien vorhanden wären. (Klein.)

In diesem Falle werden wir zunächst solche gemeinschaftliche Punkte, in welchen nicht ein Durchschneiden der beiden Linien l und l' stattfindet, dadurch beseitigen können, daß wir sie an den betreffenden Stellen durch eine kleine Deformation voneinander entfernen, eine Operation, die wir immer an spiegelbildlich symmetrischen Punkten zugleich und in symmetrischer Weise vornehmen. Sind jedoch S und S' zwei zueinander symmetrische Schnittpunkte der beiden Linien l und l', so beseitigen wir dieselben folgendermaßen. Wir beachten, daß die Linie l durch die Punkte S und S' in drei Stücke l_1, l_2, l_3 zerlegt wird und daß entsprechend l' in die zu l_1, l_2, l_3 bzw. spiegelbildlich symmetrischen Stücke l_1', l_2', l_3' zerlegt wird. Wir lassen nun an Stelle der Linien $l_1 + l_2 + l_3$ die neue Linie $l_1 + l_2' + l_3$ als Verbindungslinien von P nach P' treten. Bezeichnen wir jetzt diese Verbindungslinien mit l, die zu l spiegelbildlich symmetrische $l_1' + l_2 + l_3'$ mit l', so besitzen die neuen Linien l und l' ein Paar von Schnittpunkten weniger als die alten Linien l und l'. Offenbar können wir so durch einen endlichen Prozeß zu zwei Linien l und l' gelangen, welche sich nicht mehr schneiden und demnach, nach Beseitigung der jetzt allerdings vorhandenen Treffpunkte gemäß obiger Vorschrift, zusammen einen Rückkehrschnitt R bilden. Durch den Rückkehrschnitt R kann nun die Fläche $[F_s]$ möglicherweise in zwei zueinander symmetrische Stücke zerfallen, deren Einzelnes dann notwendig den Zusammenhang $p + 1$ haben wird. Dieser Zerfall tritt sicher dann ein, wenn $\sigma = p$ ist. Ist jedoch $\sigma < p$, so kann man an Stelle des gefundenen Rückkehrschnittes R sofort einen anderen treten lassen, der ebenso wie R zu sich selbst symmetrisch ist, ferner keine Symmetrielinie trifft und keinen Zerfall der Fläche $[F_s]$ bewirkt. Zu dem Zwecke mögen etwa mit f und f' die erwähnten beiden Hälften bezeichnet werden. Man kann dann, da der Zusammenhang der Fläche f größer ist als die Anzahl der Begrenzungslinien dieser Fläche, einen durch das Innere von f gehenden Querschnitt Q konstruieren, der den Punkt P mit dem Punkte P' verbindet und durch welchen die Fläche f nicht zerfällt. Nimmt man zu Q den spiegelbildlich symmetrischen Querschnitt Q' hinzu, der ganz innerhalb f' verläuft, so bilden Q und Q' zusammen auf F einen zu sich selbst symmetrischen Rückkehrschnitt, durch welchen nunmehr die Fläche F offenbar nicht in Stücke zerlegt wird, sondern in eine neue zu sich selbst symmetrische $2p$-fach zusammenhängende Fläche $[\overline{F}_s]$ verwandelt wird.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß es möglich ist, in $[F_s]$ einen zu sich selbst symmetrischen, die Fläche $[F_s]$ nicht zerstückenden, sondern in eine ebenfalls $2p$-fach zusammenhängende, zu sich selbst symmetrische Fläche $[\overline{F}_s]$ mit $2\sigma + 2$ Begrenzungslinien verwandelnden Rückkehrschnitt R zu konstruieren. Indem wir das vorstehend entwickelte Konstruktionsverfahren wiederholt anwenden, zunächst auf die Fläche $[\overline{F}_s]$, darauf auf die neugewonnene Fläche $[\overline{\overline{F}}_s]$ usw., gelangen wir zur Konstruktion von $p+1-\sigma=\varrho$ voneinander getrennten Rückkehrschnitten in $[F_s]$, durch welche die Fläche $[F_s]$ in zwei zueinander symmetrische $(p+1)$-fach zusammenhängende Hälften f und f' zerlegt wird.*)

Nunmehr kann man in folgender Weise zu p zu sich selbst symmetrischen Rückkehrschnitten gelangen, deren jeder das System der Symmetrielinien in zwei Punkten schneidet.

Wir zerlegen die Fläche f durch $p+\varrho$ ($\varrho=p+1-\sigma=$ Anzahl der gefundenen Rückkehrschnitte R) sich gegenseitig nicht treffende Querschnitte in $\varrho+1$ einfach zusammenhängende Stücke und zwar in der Weise, daß wir zunächst die σ Symmetrielinien durch $\sigma-1$ in f verlaufende Querschnitte miteinander in Verbindung bringen, darauf jeden der Rückkehrschnitte R durch zwei Querschnitte mit den Symmetrielinien verbinden, wobei wir noch bei jedem einzelnen Rückkehrschnitt R die Einmündungspunkte der zugehörenden beiden Querschnitte so wählen, daß die spiegelbildlich symmetrischen Punkte dieser Einmündungsstellen einerseits und die genannten Einmündungsstellen selbst andererseits auf dem Rückkehrschnitt voneinander nicht separiert werden, was z. B. dadurch erreicht wird, daß die beiden Einmündungsstellen hinreichend nahe beieinander gewählt werden. Nachdem f und symmetrisch f' in dieser Weise aufgeschnitten sind, stellen wir nunmehr auf den Rückkehrschnitten R die Verbindung zwischen f und f' wieder her und zwar für jeden Rückkehrschnitt nur längs dem Stück zwischen den Einmündungsstellen und dem dazu symmetrischen Stücke. Auf diese Weise sind an Stelle von f und f' zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Flächen getreten, welche durch $2p$ paarweise zueinander symmetrische Querschnitte in $[F_s]$ entstehen, deren je zwei zusammengehörende sich auf F_s zu einem Rückkehrschnitt der in unserem zu beweisenden Satze geforderten Art zusammenschließen.

Wir erwähnen zum Schluß dieses Abschnittes noch die folgende nunmehr gleichmäßig für den orthosymmetrischen und diasymmetrischen Fall geltende Formulierung des Hauptkreistheorems.

Zweite Formulierung des Hauptkreistheorems: Jede reelle algebraische Kurve (x, y) vom Geschlecht p mit mindestens einem reellen Zuge läßt

*) Diese ϱ Rückkehrschnitte, deren Existenz man am Beispiel der hyperelliptischen Flächen sofort feststellen kann, kommen auch bei Klein und Weichhold (Zitate im „U. d. a. K. I" S. 184 Math. Ann. 67) vor, doch wird ein einwandfreier Existenzbeweis nicht gegeben. Die für das Hauptkreistheorem wichtige durch unsern Satz S. 107 geforderte Aufschneidung ist von Klein und Weichold noch nicht betrachtet worden.

sich durch reelle automorphe Funktionen mit p reellen Gruppenerzeugenden uniformisieren, welch letztere geometrisch durch $2p$ die Achse des Reellen orthogonal schneidende, sich gegenseitig nicht treffende Kreise in paarweiser Zuordnung definiert werden können. Je nachdem die zu $y(x)$ gehörende Riemannsche Fläche diasymmetrisch oder orthosymmetrisch ist, befinden sich unter den genannten p erzeugenden reellen Substitutionen solche, welche die obere und untere Halbebene vertauschen, oder nicht.

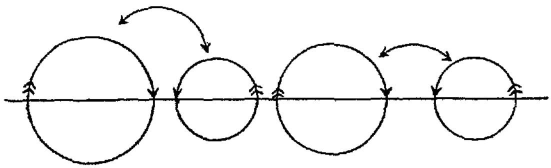


Fig. 5.

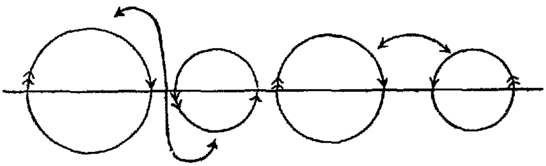


Fig. 6.

Durch die beistehenden Figuren, in welchen übrigens die Reihenfolge in der Paarung der Kreise noch auf alle möglichen Weisen variiert zu denken ist, wird der Typus der erwähnten Fundamentalbereiche schematisch erläutert, wobei man bemerke, daß es in der Tat keine Schwierigkeit hat, die Begrenzung als aus Vollkreisen gebildet vorzustellen, weil anderenfalls die betreffenden über den Durchschnittspunkten mit der Achse des Reellen konstruierten Vollkreise sofort statt der nicht kreisförmigen Begrenzungslinien gesetzt werden können.

§ 12.

Die Komposition irgendwelcher Hauptkreisgruppen.

Wir haben in „U. d. a. K. I." die allgemeinsten auf der Achse des Reellen diskontinuierlichen Hauptkreisgruppen aufgestellt, die aus der Uniformisierung reeller algebraischer Kurven entspringen und aus endlich vielen Erzeugenden hervorgehen. Dieser allgemeinen Auffassung gemäß ergibt sich eine gewisse Erweiterung des Hauptkreistheorems, auf die wir jedoch an dieser Stelle nicht näher eingehen wollen. In jedem orthosymmetrischen oder diasymmetrischen Einzelfalle ist es dabei übrigens möglich, einen in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrischen Fundamentalbereich aufzustellen, zu dessen Herstellung die Entwicklungen des vorangehenden Paragraphen die Grundlage bilden. Wir können nun den Gedanken der Uniformisierung reeller algebraischer Kurven noch in der Weise weiterführen, daß wir auch die Komposition von verschiedenen Hauptkreisgruppen in Betracht ziehen, was nach folgender Regel zu geschehen hat. Man nehme jeder Hauptkreisgruppe entsprechend einen Kreis in der Ebene an, der Bedingung gemäß, daß die Gesamtheit dieser Kreise sich gegenseitig ausschließen, und nun denke man sich in den so bestimmten mehrfach zusammenhängenden, den unendlich fernen Punkt enthaltenden Bereich β ein Fundamentalpolygon dadurch eingezeichnet, daß man jedem einzelnen der genannten Kreise entsprechend die eine Hälfte der beiden zueinander symmetrischen Hälften des bezüglichen Hauptkreispolygons in β konstruiert. Jetzt ist das Fundamentalpolygon mit seinen sämtlichen Randsubstitutionen fertig, wenn man *auch die Spiegelung an den genannten Hauptkreisen als Erzeugende* einführt. Diesem Fundamentalpolygon entspricht dann allerdings nur erst die eine Hälfte des zugeordneten algebraischen Gebildes.

Hiermit ist eine *Kette von Uniformisierungsproblemen* bezeichnet, in welchen das in diesem Abschnitt ausführlicher dargelegte oben formulierte Hauptkreistheorem einerseits und der Schottkysche Uniformisierungsfall andererseits, bei welchem der halbe Fundamentalbereich einfach von $p+1$ Vollkreisen begrenzt wird und die Erzeugenden die $p+1$ Spiegelungen an diesen Kreisen sind, als äußerste und jedenfalls auch interessanteste Glieder erscheinen. Allerdings ist der erwähnte Schottkysche Fall auf einen bestimmten orthosymmetrischen Typus Riemannscher Flächen F_s beschränkt, der durch die Bedingung definiert ist, daß die Anzahl der reellen Züge gleich $p+1$ ist, unter p das Geschlecht der Riemannschen Fläche F_s verstanden.

Dritter Teil.

Die Uniformisierung durch allgemeine kanonische uniformisierende Variable.

§ 13.

Die Uniformisierung durch automorphe Funktionen mit p Paaren parabolischer Erzeugenden. (Ineinanderschiebung von Parallelogrammen).

Der Fall, daß p Parallelogramme mit $2p$ parabolischen Substitutionen (Fig. 7a) ineinandergeschoben werden, bietet der Erledigung unter Zugrundelegung des von mir in Math. Ann. 69, 72 („U. d. a. K. II und III") gelieferten Unitätsbeweises keine neue Schwierigkeit dar. Als Bereiche Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung haben wir jetzt zu betrachten die alten im ersten Teile angeführten Φ; jedoch hat man sich für jedes einzelne Paar von Randkurven (entsprechend der Aufschneidung der Riemannschen Fläche F durch p Rückkehrschnitt*paare*) eine Verbindungslinie Q hergestellt zu denken, die zwei zugeordnete Randpunkte verbindet, auf deren durchgängig regulären Charakter es übrigens nicht weiter ankommt (vgl. Fig. 7b).

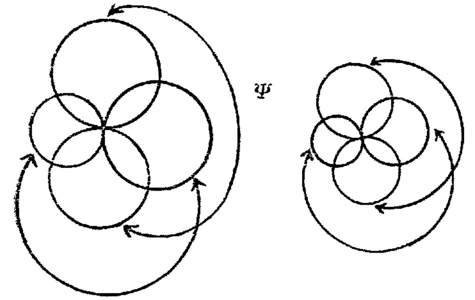


Fig. 7a.

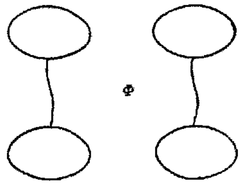


Fig. 7b.

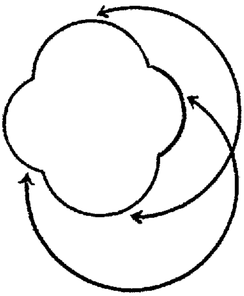
Man erkennt nun unmittelbar, daß man es in der Hand hat, die Überführung zweier Φ-Bereiche stets so zu machen, daß dabei auch noch die Verbindungslinien Q in die korrespondierenden Verbindungslinien übergehen. Dieser Tatsache entspricht in dem Kontinuum der Riemannschen Flächen F vom Geschlecht p der Satz, daß die mit p Rückkehrschnittpaaren aufgeschnittenen gleichvielblätterigen Riemannschen Flächen vom Geschlecht p ein Kontinuum bilden. Doch wird dieser Satz als solcher von uns nicht gebraucht. Er könnte aus der genannten auf die Φ sich beziehenden Tatsache jedoch gefolgert werden.

Die Bereiche Ψ, d. s. die jetzt zu betrachtenden Fundamentalbereiche mit linearer Ränderzuordnung, werden $(6p-6)$-parametrig normiert, indem man von den p Fixpunkten einen nach 0, einen nach ∞ bringt und für letzteren noch festsetzt, daß eine der parabolischen Substitutionen die Form $z' = z + 1$ haben soll.

Die Durchführung des Kontinuitätsbeweises selbst bedarf gar keiner neuen Bemerkung, wenn man wieder mit dem Auswahlverfahren vorgeht. Will man dies nicht, so ist noch besonders zu erläutern, wie im vorliegenden Falle die Existenz einer oberen Schranke für die in Ψ zu definierenden Potentiale $u_1, \cdots, u_p$ folgt. Der Nachweis der Stetigkeit dieser Potentiale bietet jedoch dann keine neue Schwierigkeit, da nach dem Endlichkeitsbeweise auch die Endlichkeit der Ableitungen allgemein feststeht und deswegen die jetzt auftretenden Begrenzungsecken der Ψ keine Schwierigkeiten machen.

Der *Endlichkeitsbeweis* kann wieder wie oben durch Betrachtung des

Dirichletschen Integrals geführt werden. Es kommt natürlich, wie erwähnt, nur darauf an, ihn für die Ψ zu führen, da er für die Φ genau so wie früher gilt, insofern als die Querschnitte Q auf die Definition der u keinen Einfluß haben. Haben wir aber einen Bereich Φ und dazu ein Potential u, welches jetzt definitionsgemäß bei einer der parabolischen Substitutionen den Periodizitätsmodul 1 hat, bei allen anderen jedoch sich reproduziert, so machen wir eine Hilfsabbildung des betreffenden Parallelogrammes durch eine Exponentialfunktion, so daß das eine Seitenpaar des Parallelogrammes in eine und dieselbe Linie verwandelt wird, in der Art der Fig. 8a, 8b. In Fig. 8b denke man sich jetzt einen schraffierten Ring eingezeichnet



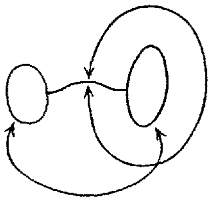


Fig. 8b.

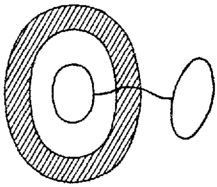


Fig. 8c.

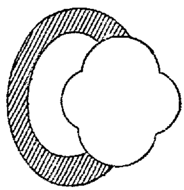


Fig. 8d.

Fig. 8a.

(vgl. Fig. 8c), und die Potentialfunktion h gebildet, die auf der einen Randkurve dieses Ringes konstant 0, auf der anderen konstant 1 ist, darauf dieselbe auf die Fig. 8a überpflanzt (Fig. 8d). Alsdann hat das Dirichletsche Integral $D_R(h)$ einen Wert, der auch für alle Nachbarbereiche Ψ' von Ψ beibehalten werden kann, da man in Fig. 8c den gewählten Ring jedenfalls bei hinreichend kleinen Veränderungen der Fig. 8c und entsprechend 8a festhalten kann.

Der Satz von der Invarianz des Gebiets läßt sich genau so wie oben S. 82 vermeiden, da die Poincaréschen Reihen offenbar wieder analytisch von den sämtlich frei komplex veränderlichen Konstanten des Bereichs Ψ abhängen.

§ 14.

Beweis des Sicheltheorems (Uniformisierung $p = 0$ mit einem durch Ineinanderschiebung von elliptischen und parabolischen Sicheln gebildeten Fundamentalbereich).

Auf der einen Seite (t-Ebene) haben wir eine Figur Ψ der Form Fig. 9a (Ineinanderschiebung mehrerer elliptischer und eventuell parabolischer Sicheln), auf der anderen Seite (x-Ebene) die schlichte Ebene mit n Einschnitten nach den elliptischen bzw. parabolischen Stigmata

(Fig. 9b), welche Ebene wir in dieser Aufschneidung mit Φ bezeichnen werden. Die Figg. 9a und 9b haben offenbar dieselbe Konstantenzahl. Wir

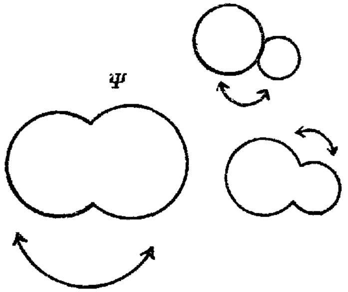


Fig. 9a.

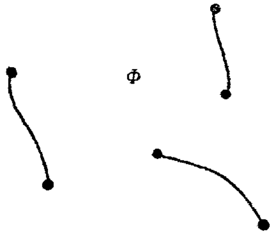


Fig. 9b

denken sie uns in der Weise in Beziehung gesetzt, daß im Unendlichen $t = x + ((0))$ sich entwickeln läßt. Dann gilt der Unitätssatz. Die x-Figuren bilden evidentermaßen ein Kontinuum. Die Funktion $x(t)$ zu einem gegebenen Bereich Ψ kann man mit den kombinatorischen Methoden bilden. Es muß sodann gezeigt werden, daß $x(t)$ eine stetige Funktion in Abhängigkeit von Ψ ist. Dazu genügt es, die Stetigkeit des in der t-Ebene zu definierenden Potentials U nachzuweisen, das im Unendlichen wie $\xi + ((0))$ unendlich wird, wenn $z = \xi + i\eta$ gesetzt wird, ferner eindeutig ist in dem Fundamentalbereich Ψ und sich reproduziert gegenüber den Randsubstitutionen dieses Bereiches. Um die Stetigkeit von $U \equiv U(\Psi)$ zu erkennen, müssen wir zunächst die Endlichkeit nachweisen unabhängig von stetiger Veränderung des Bereiches Ψ. Dies folgt unmittelbar aus meinem Hilfssatze I, S. 46 der Abhandlung „U. d. a. K. II." betreffend Funktionen mit der Unstetigkeit $\frac{1}{z} + ((0))$ oder dem ganz analogen und ganz analog zu beweisenden Hilfssatze für Potentialfunktionen, die unstetig werden wie $r^{-1} \cos \varphi + ((0))$.

Nachdem die Endlichkeit der Funktion U feststeht, steht sie offenbar, wenn nur elliptische Sicheln vorkommen, keine parabolischen, auch über den Fundamentalbereich hinaus ein Stück fest und zwar gleichmäßig bei stetiger Abänderung. Hieraus folgt jetzt durch Differenzbildung und Berechnung des Dirichletschen Integrals ganz analog wie oben § 2 die Stetigkeit der Funktion $U(\Psi)$ zunächst im Falle des Fehlens parabolischer Sicheln.

Die parabolischen Sicheln können wir gleichförmig mit den elliptischen folgendermaßen behandeln. Wir bilden eine durch eine Linie L abgegrenzte Umgebung B einer solchen Sichel durch eine Exponentialfunktion (bei elliptischen Sicheln Potenz mit ganzzahligen positiven Exponenten) auf ein Gebiet β ab in der Weise, wie die Figg. 10a und 10b erläutern. Ändern wir die parabolische Sichel stetig ab, so wollen wir uns doch L fest denken. Die Linien λ und q werden sich dann auch stetig ändern. Indem wir einmal die Funktion U für einen ersten Bereich Ψ betrachten, das andere Mal für einen Nachbarbereich Ψ' und entsprechend mit U' bezeichnen, denken wir uns jetzt die Differenz $U' - U$ für den Bezirk B dadurch erklärt, daß wir B' auf β' abbilden und nun die Funktion U' auf β' überpflanzen. Dadurch ist sie auch in β erklärt und sie kann rückwärts auf B überpflanzt gedacht werden. Die dadurch in B erklärte Funktion U' nenne ich $\overline{U}'$. Sie genügt dann vollständig den automorphen Randbedingungen längs der zu B gehörenden parabolischen Sichel. Sie weist jedoch längs der Linie L einen kleinen Unterschied gegen die eigentlichen Randwerte von U' auf, ein Unterschied, der sich aber einschließlich der Ableitungen nach allen Richtungen gleichmäßig längs der ganzen Linie L auf 0 reduziert bei unbegrenzter stetiger Annäherung von Ψ' an Ψ. Rechnen wir nun das Dirichletsche Integral $D(U' - U)$ über den ganzen Bereich Ψ aus, indem wir in B augenblicklich unter U' die Funktion $\overline{U}'$ verstehen, so ergibt sich ein Randintegral über L zu beiden Seiten, nämlich $\int (U' - U) \frac{d(U' - U)}{dn} ds$ und dieses Integral reduziert sich in der Tat auf 0 beim Grenzübergang, indem entsprechende Integralelemente zu beiden Seiten von L sich ausgleichen.

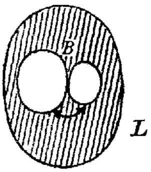


Fig. 10a.

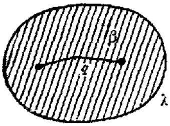


Fig. 10b.

Hiermit ist gezeigt, daß einer stetigen Veränderung der Fig. 9a eine stetige Veränderung der Fig. 9b entspricht, wobei wegen der gleichen Parameterzahl und des Unitätssatzes alle Freiheitsgrade der Fig. 9b erschöpft werden. Dabei wird man sich nun wieder entweder auf den Satz von der Invarianz des Gebiets bei stetiger eineindeutiger Abbildung beziehen können oder auch diesen Satz vermeiden durch Bezugnahme auf die analytische Abhängigkeit der Mannigfaltigkeiten, welche jetzt sofort durch den Hinweis auf die für t als Funktion von x bestehende Differentialgleichung 3. Ordnung erledigt wird, welche abgesehen von gewissen akzessorischen Parametern, zwischen welchen noch transzendente analytische Gleichungen bestehen, direkt aufgestellt werden kann und die singulären Punkte der x-Ebene wie auch die genannten akzessorischen Parameter rational enthält.

Jetzt kann man im Gebiete der Fig. 9b ohne weiteres eine Überführung von jeder Figur in jede andere vornehmen. Es kommt nun darauf an, die Unmöglichkeit einer Grenzstelle Φ^* auf der Überführungslinie nachzuweisen. Man kann dies mit Hilfe des Konvergenzprinzips folgern, indem man beachtet, daß die Funktion $t(x)$ in einem Gebiet, das den unendlich fernen Punkt der x-Ebene ausschließt, auf Grund des oben erwähnten Hilfssatzes I aus „U. d. a. K. II." unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. Im Falle des Vorkommens nur elliptischer, nicht auch parabolischer Sicheln kann man jedoch durch analoge Betrachtungen wie auf S. 94 u. 95 die Stetigkeit der Funktion $t(x)$ in Abhängigkeit von der Fig. 9b beweisen, indem man jetzt mit den Endpunkten der Einschnitte ähnlich verfährt wie dort mit den Windungspunkten. In der Tat liegt ja für die uniformisierende Variable $t(x)$ an jedem Endpunkte der Einschnitte stets ein Windungspunkt bestimmter Ordnung.

Wir bemerken übrigens noch, daß wir, was auch eine Art Kontinuitätsschlußverfahren ist, den Fall parabolischer Sicheln auch als Grenzfall elliptischer Sicheln mittels des Auswahlverfahrens behandeln können, wie dies in „U. d. a. K. II." § 19 geschehen ist.

§§ 15—18.

Beweis der allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme. (Ineinanderschiebung von Grenzkreispolygonen.)

§ 15.

Einleitende Bemerkungen.

Wir gehen nunmehr zum Beweise der allgemeinsten Fundamentaltheoreme mittels der Kontinuitätsmethode über. Dabei wollen wir uns für die Zwecke der Darstellung eine unwesentliche Beschränkung auferlegen, insofern als wir annehmen wollen, daß die jetzt zu betrachtenden Fundamentalbereiche Ψ durch Ineinanderschiebung wirklicher Grenzkreispolygone entstehen, unter Weglassung solcher komponierenden Fundamentalbereiche, deren zugehörendes Polygonnetz entweder die volle Ebene oder die ganze Ebene exklusive eines oder zweier Punkte bedeckt. Diese Beschränkung ist von der Art, daß der Leser namentlich auf Grund der vorangegangenen Entwicklungen in § 13—14 sofort erkennt, daß auch die angedeutete weitere Allgemeinheit keine neuen Schwierigkeiten mit sich bringt. Wir denken uns den Fundamentalbereich Ψ wieder als einen Bereich, welcher den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält. Das einzelne an der Komposition beteiligte Grenzkreispolygon vom Geschlecht p' möge im Falle $p' = 0$ so begrenzt sein, daß die Begrenzung einer Aufschneidung der schlichten Ebene ($p' = 0$) entspricht, bei welcher die verschiedenen relativen Windungsstellen mit einem in der Ebene willkürlich gewählten Punkte M' durch je einen Einschnitt verbunden sind, so daß die Anzahl der Seiten eines solchen Polygons $2n'$ beträgt, wenn n' die Anzahl der erwähnten relativen Windungspunkte (Stigmata) ist. Ist jedoch das Geschlecht $p' \geqq 1$, so denken wir uns das Polygon in der Weise begrenzt, daß die Begrenzung einer Aufschneidung der zugehörenden Riemannschen Fläche mittels p' getrennter Rückkehrschnittpaare entspricht, welche untereinander dadurch verbunden sind, daß von jedem der p' Kreuzungspunkte ein Schnitt nach einem willkürlichen Punkte M' der zugehörenden Riemannschen Fläche gemacht ist. Im ganzen würde dem Bereiche Ψ eine Riemannsche Fläche F zugehören, welche nun durch σ getrennte Schnittsysteme in eine σ-fach zusammenhängende schlichtartige Fläche F_0 verwandelt erscheint, wenn σ die Anzahl der den Bereich Ψ bildenden einzelnen Grenzkreispolygone darstellt.

Für den im folgenden zu liefernden Kontinuitätsbeweis ist erstlich die Frage nach der tatsächlichen Existenz von Fundamentalbereichen Ψ eines beliebigen zu betrachtenden Typus einerseits, andererseits die Frage nach dem Grade der Variationsmöglichkeit derartiger Fundamentalbereiche Ψ zu beantworten. Beide Fragen boten bei den bisher behandelten Uniformisierungsproblemen keine Schwierigkeit dar. Hier jedoch bedürfen sie einer besonderen Untersuchung. Wir könnten uns dazu auf die ausführliche Behandlung der Theorie der Polygongruppen, wie sie Fricke in Bd. II des Werkes Fricke-Klein: „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" gegeben hat, berufen, eine Theorie, durch welche tatsächlich eine direkte geometrische Lösung der beiden erwähnten Fragen gegeben wird. Wir ziehen es jedoch vor, dies nicht zu tun, weil einerseits diese Theorie im ganzen doch ziemlich kompliziert ist und weil andererseits durch eine solche Bezugnahme der independente Charakter unserer Arbeiten gestört würde. Wollte man das Grenzkreistheorem selbst mittels der Kontinuitätsmethode behandeln, so würde eine derartige direkte geometrische Untersuchung der Hauptkreisgruppen allerdings unvermeidlich sein, eine Untersuchung, die übrigens nur dann Schwierigkeiten verursacht, wenn kein Stigma ∞ vorkommt, in welchem Fall wir dem Polygon stets die in „U. d. a. K. III.", Math. Ann. 72, S. 482 geschilderte einfache Gestalt geben können, welche über Existenz und Variationsmöglichkeit unmittelbar Aufschluß gibt. Im allgemeinen Falle stützen wir uns bezüglich der Existenz von Grenzkreispolygonen jedes einzelnen Typus auf die Existenz der Grenzkreisvariablen zu gegebener unsignierter oder irgendwie signierter Riemannscher Fläche, wie wir dieselbe in „U. d. a. K. I." mittels der Methode der Überlagerungsfläche bewiesen haben, und nehmen nun in den beiden folgenden Paragraphen diese so begründete Existenz der Grenzkreispolygone auch als Grundlage zur exakten Bestimmung der Variationsmöglichkeit dieser Polygone in der Nachbarschaft jedes einzelnen derselben.

§ 16.
Die Variationsmöglichkeit der Grenzkreispolygone vom Geschlecht Null.

Wir betrachten zunächst den Fall $p' = 0$ oder, unter Weglassung der Akzente in diesem Paragraphen, $p = 0$. Wir bringen drei der Stigmata nach $0, 1, \infty$. Alsdann denken wir uns die kanonische Aufschneidung gemäß Fig. 11 (5 Stigmata). Die Abbildung der aufgeschnittenen x-Ebene ($\equiv \Phi$) auf das Grenzkreispolygon Π (t-Ebene) mit dem Einheitskreise als Grenzkreis sei so normiert, daß ein Punkt O in den Nullpunkt und eine bei O gegebene Richtung in die Richtung der positiven Achse des Reellen übergehen soll. Wir haben uns nun vorzustellen, daß die $n-3$ von $0, 1, \infty$ verschiedenen Stigmapunkte frei variieren und außerdem das Richtungselement bei O. Das sind $2n-3$ reelle Parameter.

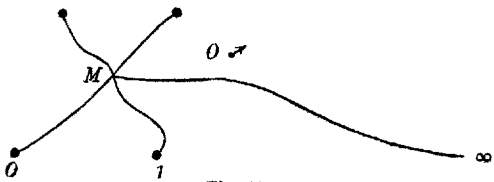


Fig. 11.

Es kommt jetzt zunächst darauf an, zu zeigen, daß die Größe $t(x)$ eine stetige Funktion der genannten $2n-3$ Konstanten ist. Das ergibt sich sofort mit dem Auswahlkonvergenzprinzip. Wir brauchen nur zu zeigen, daß, wenn ein Wertsystem der $2n-3$ Parameter gegen ein Ausgangswertsystem konvergiert, dann auch $t(x)$ gegen die Ausgangsfunktion konvergiert. Wäre dies nun nicht der Fall, so würden wir eine Folge von Wertsystemen der $2n-3$ Konstanten, die gegen das Ausgangssystem konvergieren, so bestimmen können, daß dennoch die Funktion $|t^*(x) - t_0(x)|$, unter $t_0(x)$ die Ausgangsfunktion verstanden, in einem Bezirke der t-Ebene noch Werte oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bekäme. Da nun jedenfalls alle Funktionen $t(x)$ in der aufgeschnittenen x-Ebene erklärt sind und dem absoluten Betrage nach überhaupt < 1 bleiben, so kann man jetzt eine neue Folge auswählen, die sicher gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion kann keine Konstante werden, weil dann der nichteuklidische Inhalt des Polygons sich allmählich auf Null reduzieren müßte, während er doch nur von der Signatur abhängt, also konstant ist. Die Grenzfunktion wird daher auch eine Abbildung der Ausgangsfigur der x-Ebene auf ein Grenzkreispolygon liefern, demnach mit der Funktion $t_0(x)$ identisch sein, während sie sich doch andererseits von $t_0(x)$ soweit unterscheiden müßte, daß das Maximum der Differenzfunktion in einem Gebiete der x-Figur oberhalb der genannten Schranke liegt, was ein Widerspruch ist.

Hiermit ist die stetige Änderung des Grenzkreispolygons Π in Abhängigkeit von Φ unter den oben angegebenen Normierungsbedingungen bewiesen. Wir bemerken nun weiter, daß unter Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung des Ausgangsparametersystems die erhaltenen Polygone Π alle untereinander verschieden sein müssen, so daß zwei der Polygone niemals dieselben $2n$ elliptischen Eckpunkte aufweisen können. Nehmen wir in der Tat an, es würden sich für zwei Parametersysteme, die hinreichend benachbart sind, dieselben elliptischen Eckpunkte, oder, was dasselbe ist, elliptischen Randsubstitutionen ergeben, so würden die beiden Polygone offenbar deformatorisch äquivalent sein. Daher würde zu beiden Polygonen dieselbe Hauptfunktion $x(t)$ gehören, welche so normiert zu denken ist, daß drei der elliptischen Eckpunkte in 0, 1, ∞ übergehen. Dann aber würden sich auch für die anderen elliptischen Eckpunkte sowie für den Nullpunkt und das positive reelle Richtungselement im Nullpunkt genau dieselben Stellen und dasselbe Richtungselement in der x-Ebene ergeben.

Es ist nun übrigens auch klar, daß wir durch die vermöge der $2n-3$ in der x-Ebene definierten Parameter bestimmte Variationsmöglichkeit des Grenzkreispolygons Π tatsächlich überhaupt die Variationsmöglichkeit dieses Polygons in der Nachbarschaft des Ausgangspolygons Π_0 erschöpft haben. Dies folgt daraus, daß einer geringen Veränderung des Polygons Π_0 eine geringe Veränderung der Hauptfunktion $x(t)$ entspricht und folglich ein nur wenig verändertes Parametersystem. Die Stetigkeit der Hauptfunktion bzw. des Potentials U mit der Unstetigkeit $r^{-1}\cos\varphi$ folgt genau ebenso wie in § 14 mit oder ohne Zuhilfenahme des Auswahlkonvergenzsatzes.

Man wird wünschen, die stetige Abhängigkeit der Funktion $t(x)$ von dem Parametersystem durch einen Schluß nachzuweisen, bei welchem man sich nicht des Auswahlkonvergenzsatzes bedient und welcher dadurch die Möglichkeit einer Abschätzung der Abweichung bietet. Dies ist nun nach Analogie der Entwicklungen in § 5 folgendermaßen möglich, wobei wir den Fall eines festen Richtungselementes O betrachten, nur die $n-3$ Stigmapunkte variieren lassend. Der allgemeine Fall würde, wie man sofort bemerkt, eine wesentlich neue Betrachtung nicht erfordern, da eine alleinige Veränderung des Richtungselementes O unter Festhaltung der Stigmapunkte lediglich eine lineare Transformation in der t-Ebene bedingt.

Wir können, wenn die Abweichung der Stigmapunkte in der x-Ebene von den Ausgangspunkten kleiner als ε ist, ähnlich wie in § 5 Kreise vom Radius 2ε konstruieren und nun die beiden Überlagerungsflächen betrachten exkl. der aus allen Blättern ausgestanzt zu denkenden Kreisflächenstücke. Diese beiden Überlagerungsflächen sind durch die Identität aufeinander bezogen. In der t-Ebene bekommen wir entsprechend eine Abbildung des unendlich-vielfach durchlöcherten Einheitskreises auf die in anderer homologer Weise durchlöcherte Einheitskreisfläche, wobei die Löcher sich beidemal gegen die Peripherie hin häufen. Wegen der Konstanz des nichteuklidischen Flächeninhaltes der in Betracht zu ziehenden Grenzkreispolygone sowie wegen des Verzerrungssatzes ergeben sich Beschränkungen über die Nähe, bis zu welcher die Löcher an den Mittelpunkt des Einheitskreises herantreten können. Sie müssen in gewisser Distanz bleiben. Andererseits muß die Summe der Quadrate der Umfänge der erwähnten Löcher eine Größe sein, die zugleich mit ε unendlich klein wird (vgl. § 5). Nun ist die erwähnte Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst mit der Methode des Cauchyschen Integrals zu untersuchen. Dazu müssen wir noch die Spiegelung des Innern des Einheitskreises an der Peripherie vornehmen und dadurch die erwähnte Abbildung gewissermaßen fortgesetzt denken eben vermöge der Spiegelungsdefinition (vgl. § 7 in „U. d. a. K. III."). Nunmehr kann man die Abbildungsfunktion aus den l. c. angeführten Gründen ausdrücken durch das Cauchysche Integral, erstreckt über alle Löcher, sowohl die inneren als auch die äußeren plus einer ganzen linearen Funktion, welche aus dem über einen unendlich weiten Kreis erstreckten Integrale resultiert. Es zeigt sich demnach, daß die Abbildungsfunktion in der Grenze in eine ganze lineare Funktion übergeht. Diese ganze lineare Funktion muß sich aber notwendigerweise auf die Funktion z selbst reduzieren, weil einerseits bei der Abbildung das positive reelle Richtungselement im Nullpunkte in sich übergeht, wodurch zunächst eine Drehung ausgeschlossen ist, andererseits die Annahme eines von 1 verschiedenen Vergrößerungsfaktors notwendig zur Folge hätte, daß die beiden Polygone nicht denselben nichteuklidischen Flächeninhalt haben könnten, da bei einer Vergrößerung stets jedes Flächenelement in bezug auf den Einheitskreis auch eine Vergrößerung seines nichteuklidischen Flächeninhaltes erfährt. Die erwähnte Möglichkeit wird auch durch den Umstand ausgeschlossen, daß bei der betrachteten Abbildung der unbegrenzten Annäherung an den Einheitskreis wieder die unbegrenzte Annäherung an den Einheitskreis entspricht, was sich in der die Abbildung approximativ darstellenden linearen Funktion nur dann ausprägen kann, wenn der Vergrößerungsfaktor derselben in der Grenze Eins wird.

§ 17.

Die Variationsmöglichkeit der Grenzkreispolygone mit von null verschiedenem Geschlecht.

Wir betrachten nunmehr den Fall eines Grenzkreispolygons vom Geschlecht $p \geqq 1$ beliebiger Signatur. Nur werde angenommen, daß kein

Stigma ∞ vorkommt, in welchem Falle wir uns ja auf die bezüglichen Bemerkungen in § 15 berufen können.

Wir verfahren analog $p=0$, indem wir die Variationsmöglichkeit von der Normalfigur aus durch die betreffende Parameterzahl charakterisieren; d. h. wir nehmen unsere $(6p-6)$-parametrige Riemannsche Normalfläche mit lauter einfachen Windungspunkten und haben darauf die n Stigmapunkte und außerdem das Richtungselement O. Das sind im ganzen $6p-3+2n$ Konstanten. Wir können uns die Riemannsche Normalfläche jetzt noch in der Weise zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufgeschnitten denken, daß wir von je einem Eckpunkte der p begrenzenden Parallelogramme einen Schnitt nach einem Punkte M auf der Normalfläche führen, welchen Punkt wir dann noch mit den Stigmapunkten durch je einen Einschnitt verbinden. Auf diese Weise unterscheiden wir $6p+2n$ Seiten der vollständigen Begrenzung der Normalfigur entsprechend den $6p+2n$ Seiten des Grenzkreispolygons.

Wir können nun die stetige Abhängigkeit des Grenzkreispolygons von der $(6p-3+2n)$-parametrigen Normalfigur mit Hilfe des Auswahlkonvergenzsatzes genau wie oben im Falle $p=0$ beweisen. Wollen wir uns jedoch dieses bequemen Prinzips nicht bedienen, so verfahren wir in Analogie mit dem Falle $p=0$ folgendermaßen. Wir bilden in der Ebene der Normalfigur, die wir als w-Ebene bezeichnen, ein zweites irgendwie in p Periodizitätsmoduln normiertes Integral erster Art w_1. Dann ist zu zeigen, daß w_1 stetig von der Normalfigur abhängt, was von w, welches sich selbst identisch bleibt, selbstverständlich ist. Dazu sind auf Grund der früheren analogen Entwicklungen (§ 2) nur zwei Fragepunkte besonders zu erledigen. *Erstens*: Angabe einer oberen Schranke für w_1, die gültig bleibt bei stetiger Veränderung der Normalfigur. *Zweitens*: Anbringung geeigneter Modifikationen an den genannten früheren Entwicklungen wegen der vorhandenen beweglichen Windungspunkte der Normalfigur.

Der erste Punkt erledigt sich sehr einfach, indem man jedem einzelnen der begrenzenden Parallelogramme entsprechend, (Fig. 12), einen Ring R konstruieren kann, welcher jetzt nur in der Idee geschlossen ist. Man braucht dazu nur zwei einander zugeordnete Seiten eines Parallelogramms so durch einen Flächenstreifen zu verbinden, daß die auf den erwähnten Parallelogrammseiten liegenden Begrenzungsteile des idealen Ringes einander entsprechen, wie in Fig. 12, wobei man zweckmäßigerweise zwei solche zugeordnete Seiten nimmt, die durch eine feste Substitution der $(6p-6+2n)$-parametrigen Normalfigur auf einander bezogen sind. In der Tat sind ja bei der vorzunehmen-

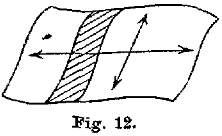


Fig. 12.

den Veränderung der Normalfigur p Randsubstitutionen fest zu denken, und es ist zulässig, von jedem der p Parallelogramme je eine der beiden bezüglichen Substitutionen als fest zu denken. Auf diese Weise wird der erwähnte Hilfsring ein gegenüber der Beweglichkeit der Figur fester Ring bleiben und deswegen die eine zugehörende in dem ideal geschlossenen Ringe eindeutige reguläre Potentialfunktion h mit den konstanten Randwerten 0 und 1 eine brauchbare Vergleichsfunktion für die Vergleichung der Dirichletschen Integralwerte.

Der zweite Punkt erledigt sich dadurch, daß man um die einzelnen Windungspunkte der Ausgangsnormalfläche und der variierten Fläche Windungskreise beschreibt von einem gemeinschaftlichen Radius ϱ, dessen Größe bei der Stetigkeitsuntersuchung festgehalten wird. Die zu betrachtende Differenz der beiden Potentiale u und u' (vgl. S. 116) wird dann auch in den erwähnten Kreisflächenstücken bis in die Windungspunkte selbst hinein einen eindeutigen Sinn bekommen mittels einer, durch kleine, die verschobenen Windungspunkte in die Ausgangswindungspunkte überführende Parallelverschiebungen der erwähnten Kreisflächenstücke bewirkten Werteüberpflanzung nach Analogie der entsprechenden Operation S. 116, wobei nun auf Grund der vorher bewiesenen Beschränktheit der Potentiale u und u' und daher auch ihres Gefälles die an der Grenze der genannten Kreisflächenstücke bewirkte Diskontinuität nur einen unendlich kleinen Beitrag zum Werte des Dirichletschen Integrales der Funktion $(u' - u)$ liefert, indem entsprechende Elemente der beiden Ufer sich ausgleichen.

Die Funktion $\frac{dw}{dw_1}$ liefert nun eine Abbildung der Riemannschen Normalfläche auf eine Riemannsche Fläche F, welche sich stetig ändert bei stetiger Änderung der Riemannschen Normalfläche. Die Untersuchung der stetigen Abhängigkeit des Grenzkreispolygons Π von der Normalfläche bzw. der Funktion $t(w)$, welche diese Abhängigkeit vermittelt, ist damit auf die entsprechende Untersuchung der Abhängigkeit des Grenzkreispolygons von der Riemannschen Fläche F zurückgeführt. Diese Untersuchung vollzieht sich nun aber nach denselben Prinzipien, die wir im Falle $p = 0$ anwandten.

Hiermit wäre zunächst gezeigt, daß, wenn wir die $6p - 6 + 2n$ Konstanten der Normalfigur wenig ändern, das Grenzkreispolygon Π sich auch wenig ändert und zwar so, daß sich jeder Wahl des Konstantensystems entsprechend auch verschiedene Polygone ergeben in dem Sinne, daß dieselben der Lage der Begrenzung nach nur wenig voneinander abweichen und daß das System der Randsubstitutionen sicher nicht für zwei verschiedene Konstantensysteme dasselbe ist. D. h. aber, daß wir das Grenzkreispolygon $(6p - 6 + 2n)$-parametrig variieren können.

Daß wir damit überhaupt die Bewegungsfreiheit des Grenzkreispolygons erschöpfend charakterisiert haben, erfordert jetzt, wie im Falle $p=0$, noch den Nachweis, daß auch die Riemannsche Normalfigur sich stetig in Abhängigkeit von dem Grenzkreispolygon ändert, d. h. den Nachweis der stetigen Abhängigkeit der Abelschen Integrale erster Art bzw. der Potentiale u von dem Grenzkreispolygon, wenn man sich dasselbe ausgehend von einem Polygon Π_0 irgendwie in ein Polygon Π desselben Typus stetig abgeändert vorstellt.

Diesen Nachweis, welcher sich mittels des Auswahlkonvergenzsatzes wieder gemäß der Methode S. 70 führen läßt, führen wir unabhängig von diesem Prinzip in der Art, daß wir wieder ein Ringpotential h konstruieren, welches nun allerdings nicht mehr fest sein wird. Wir betrachten von dem Grenzkreispolygon ein System von sechs aufeinander folgenden Seiten entsprechend einem Begrenzungsparallelogramm der Riemannschen Normalfigur mit zugehörendem Einschnitt nach dem Punkt M. Wir bekommen so das Bild der Figur 13a und bilden nun aus lauter

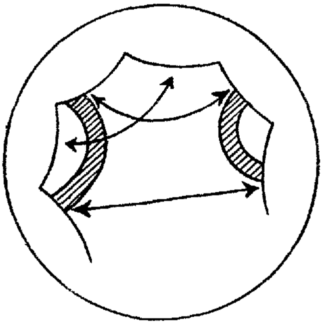


Fig. 13a.

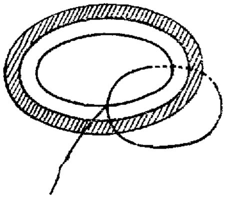


Fig. 13b.

kreisförmigen Begrenzungsstücken den Ring R, dessen Bahn sich aus dem Schema der Figur 13b ergibt, welche einen Rückkehrschnitt mit konjugiertem Rückkehrschnitt und Einschnitt nach dem Kreuzungspunkte des Rückkehrschnittpaares zeigt und die den Analysis-situs-Umständen entsprechende Ringlage. Am zweckmäßigsten wird diese Ringfigur in der Ebene des Grenzkreispolygons so aufgestellt, daß man dieselbe zunächst an den vier Austrittsstellen aus dem Polygon festlegt durch Wahl zweier die Begrenzung treffender *fest*zuhaltender Kreisflächen und Bestimmung mit dem Polygon *beweglicher*, durch die beiden in Betracht kommenden Substitutionen gelieferter Bilder (s. Figur 14a) und darauf einfach den Ring vervollständigt durch eine Kette *fest* zu denkender Kreisflächen nach Art der Figur 14b.

Man hat nun $D_R(h)=\int \frac{dh}{dn}\,ds$, das letztere Integral erstreckt über die eine Begrenzungslinie des Ringes, zu untersuchen und zu zeigen, daß sich eine endliche Größe ergibt, durch welche dieses Integral gleichmäßig für die Polygone einer gewissen zu betrachtenden Nachbarschaft des Ausgangspolygons abgeschätzt wird. Wir zerlegen zum Zwecke dieser Ab-

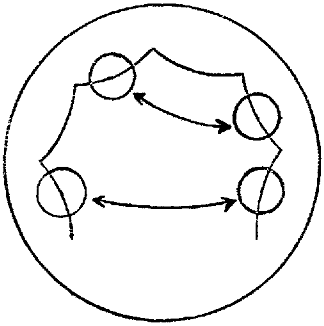


Fig. 14a.

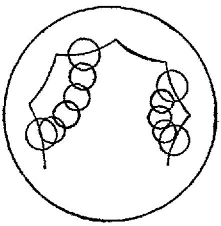


Fig. 14b.

schätzung den im Grenzkreispolygon eingezeichneten Ring in endlich viele Stücke und machen nun eine Abschätzung für das einzelne durch lokale Hilfsabbildung auf einen gestreckten Winkel (Fig. 15) übertragen zu denkende Randstück. Es ist klar, daß in der Hilfsfigur 15 das für die Halbkreisfläche gebildete Hilfspotential $\bar{h}$, welches auf dem gradlinigen Begrenzungsstück gleich 1 ist, auf dem Halbkreise jedoch gleich 0, in dem ganzen Halbkreise kleiner als h ist, weil es auf dem Rande $\leqq h$ ist. Daher ist die normale Ableitung längs des geradlinigen Begrenzungsstückes für die Funktion $\bar{h}$ größer als für die Funktion h. Nun hat $\bar{h}$ auf dem in Figur 15 sichtbaren Spiegelhalbkreise den Wert 2 und ist durch die Randwerte 0, 2 für das ganze Innere des Kreises der Figur 15 erklärt durch das Poissonsche Integral (wesentlich eine Arkustangensfunktion) darstellbar. Daraus ergibt sich für die Ableitung von h längs der inneren in Figur 15 stärker ausgezogenen Hälfte des Kreisdurchmessers eine Abschätzung durch das Maximum des Wertes den die Ableitung von $\bar{h}$ auf diesem Stück annimmt. Nun beachte man, daß man die ganze Begrenzungslinie des Ringes in der angegebenen Weise abschätzend durchlaufen kann, wobei die Wahl von endlich vielen solcher Hilfsfunktionen genügt. Der Umstand, daß die Begrenzungslinie des zu untersuchenden Ringes nicht geradlinig, sondern aus Kreisbogenstücken gebildet ist und daher auch Ecken aufweist, bietet dabei keine Schwierigkeit, weil man durch elementare Hilfsfunktionen (Potenzabbildung und Inversion) auf den betrachteten Fall der Figur 15 kommt. Das Resultat ist eine Abschätzung des vollständigen über die ganze Begrenzungslinie des Ringes erstreckten Integrales $\int \frac{dh}{dn}\, ds$ lediglich

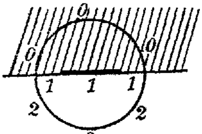


Fig. 15.

aus den Bestimmungsstücken der Ringfigur, eine Abschätzung, welche ganz offenbar stetig von diesen Bestimmungsstücken abhängt und daher auch gleichmäßig für den mit dem Grenzkreispolygon sich stetig verändernden Ring ausgeführt werden kann.

§ 18.

Durchführung des Kontinuitätsbeweises.

Der Fall $p=0$. Wir betrachten zunächst den Fall $p=0$, in welchem dann auch alle komponierenden Fundamentalbereiche das Geschlecht 0 haben. Wir haben einerseits die schlichte x-Ebene mit einer der Signatur entsprechenden Aufschneidung (siehe Figur 16a). Den unendlich fernen Punkt wollen wir uns im Innern denken. Parabolische Stigmata seien zunächst ausgeschlossen. Wir haben in der Figur 16a $n_1+n_2=n$ relative Windungspunkte (in der Figur speziell $n_1=4$, $n_2=5$). Die Frage der Konstruktion einer Überführungslinie zwischen irgend zwei x-Figuren, die

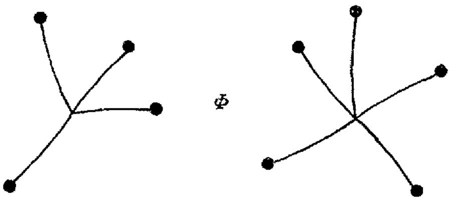


Fig. 16a.

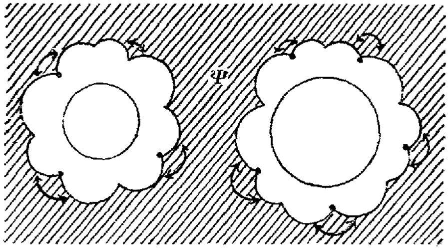


Fig. 16b.

wir jetzt mit Φ zu bezeichnen hätten, bietet offenbar überhaupt keine Schwierigkeit dar, da diese Überführbarkeit unmittelbar evident ist. Andererseits haben wir in der t-Ebene zwei ineinandergeschobene Grenzkreispolygone der betreffenden Signatur zu betrachten, welche einen Fundamentalbereich Ψ bilden (Figur 16b). Beiderseits haben wir in Anbetracht der in § 16 bestimmten Variationsmöglichkeit der Grenzkreispolygone bei festem Grenzkreise, der hier variabel wird, im ganzen dieselbe Konstantenzahl, nämlich $2n$. Wir können jetzt in der t-Ebene diejenige Fundamentalfunktion $x(t)$ bilden, die automorph ist, eindeutig, und im Unendlichen die Form $x=t+((0))$ hat. Diese Funktion ändert sich nach früheren Prinzipien stetig und erschöpft jedesmal die volle Variationsmöglichkeit der Figuren Φ. Nun wird eine Grenzfigur Φ^* auf der Überführungslinie angenommen und dann durch Nachweis der Stetigkeit der Funktion $t(x)$ nach den Prinzipien des Unitätsbeweises der Abhandlung III, im übrigen jedoch ganz analog dem Beweise in § 5, oder mit Auswahlkonvergenzprinzip gemäß S. 87 ff., gezeigt, daß auch noch für Φ^* ein zugehörendes

Grenzkreispolygon existiert. Wir haben dabei hier noch den Vorteil, daß die in § 5 in Betracht gezogene Möglichkeit der Auflösung eines Windungspunktes höherer Ordnung der Riemannschen Fläche F^* hier nicht in Betracht kommt, weil nur die Windungspunkte der Funktion $t(x)$ vorhanden sind, die ihre Ordnung behalten.

Der Fall $p \geqq 1$. In diesem Falle hat die Figur Φ in der z-Ebene, für welche man die Überführungslinie konstruiert, die Form der Figur 17 ($p=3$), welche aus Figur 1 entsteht, indem in diese (für $p=3$) eine Einzeichnung gemacht wird, entsprechend der Aufschneidung der Riemannschen Fläche, die dem etzt zu beweisenden Fundamentaltheorem zugrunde liegt. Im übrigen wird Φ von F aus durch denselben Abbildungsprozeß gewonnen, wie oben S. 52. Die weitergeführte Aufschneidung spielt eben bei dieser Abbildung nur die Rolle einer mitzuübertragenden Einzeichnung in diejenige $2p$-fach zusammenhängende Fläche, welche aus F durch Aufschneidung dieser Fläche mittels p Rückkehrschnitten hervorgeht. Wir haben sogleich einen Fall mit Stigmata ins Auge gefaßt, (zwei ineinander geschobene Grenzkreispolygone, das eine vom Geschlecht 2, das andere vom Geschlecht 1, dazu ein bzw. zwei Stigmata endlicher Ordnung).

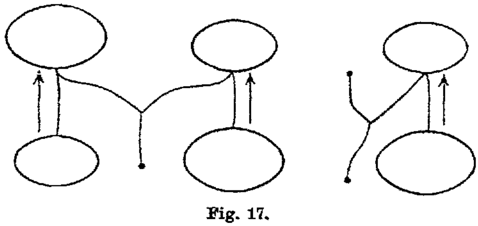


Fig. 17.

In der t-Ebene haben wir zwei einen Bereich Ψ bildende ineinandergeschobene Grenzkreispolygone der betreffenden Signaturen. Die nachbarliche Variationsmöglichkeit des Fundamentalbereichs Ψ beherrschen wir nach §§ 16 und 17, weil wir sie für jedes einzelne Grenzkreispolygon beherrschen.

Jetzt gehen wir zur Riemannschen Normalfläche über durch ein allgemeines Abelsches Integral erster Art. Wir denken uns in diese Riemannsche Normalfläche die entsprechende Einzeichnung gemacht. Die $(6p-6+2n)$-parametrige Normierung der Figur Ψ geschieht im Falle der Figur 17 dadurch, daß wir den einen Grenzkreis als Einheitskreis wählen mit der Bedingung, daß der Fundamentalbereich selbst ganz im Inneren des Einheitskreises liegen soll, während wir den zweiten Grenzkreis konzentrisch mit dem Einheitskreise wählen. Ferner schreiben wir vor, daß einer der Fixpunkte der Substitutionen*) des zweiten Grenzkreis-

*) Diese Substitutionen sind, da wir hier Stigmata der Ordnung ∞ ausschließen, bekanntlich entweder elliptisch oder hyperbolisch. In der Tat lehrt folgende Betrachtung, daß eine Gruppe G der betrachteten Art keine parabolische Substitution enthalten kann. An Stelle des Grenzkreises werde die obere Halbebene gesetzt, die als

polygons auf der positiven Seite der Achse des Reellen liegen soll. Haben wir mehr als zwei komponierende Polygone, so können wir an Stelle dieser Fixpunktnormierung die Bestimmung treten lassen, daß der Mittelpunkt eines dritten Grenzkreises auf der positiven Seite der Achse des Reellen liegen soll. Die so normierte Figur Ψ läßt sich dann in der Tat durch $6p-6+2n$ Parameter hinsichtlich ihres Freiheitsgrades eineindeutig charakterisieren (natürlich nur für eine hinreichend kleine Umgebung jedes einzelnen zu betrachtenden Bereichs Ψ). Wir haben erstens die Konstanten des umschließenden Grenzkreispolygons, welche voll in Anspruch genommen werden, nämlich $6p_1-3+2n_1$, wenn p_1 das Geschlecht dieses Polygons, n_1 die Zahl der Stigmata ist. Das innere Polygon liefert seinerseits $6p_2-3+2n_2$ Parameter. Diese Parameter sind erstens die Größe $\varrho<1$ des Radius des zugehörenden Grenzkreises, zweitens die Polygonkonstanten, die jetzt wegen der getroffenen Fixpunktnormierung nur $6p_2-4+2n_2$ betragen und transzendent gefunden werden gemäß dem in § 17 angegebenen Prinzip, wobei erstens eine Hilfsabbildung des Polygons auf ein zum Einheitskreis als Grenzkreis gehörendes Polygon vorzunehmen ist vermöge der Substitution $t'=\frac{\varrho}{t}$ und ferner auf der Riemannschen Normalfläche das Richtungselement in O lediglich durch den seine Lage fixierenden Punkt O auf genannter Fläche zu ersetzen ist.

Die Durchführung des Kontinuitätsbeweises bietet nunmehr im einzelnen nichts Neues gegen früher, wenn man meinen allgemeinen Unitätsbeweis in der Abhandlung „U. d. a. K. III." für die allgemeinen Fundamentaltheoreme zugrunde legt. Wir haben wieder wie in § 5 die Möglichkeit ohne Auswahlverfahren oder auch wie S. 92 mit Auswahlverfahren zum Ziele zu gelangen, wobei im letzteren Falle eine spezielle Bezugnahme auf die Prinzipien des Unitätsbeweises nicht erforderlich ist.

Die parabolischen Fälle. Für die parabolischen Fälle, die wir bisher noch ausgeschlossen haben, haben wir oben § 15 bereits die Freiheitsgrade der Polygone bestimmen können unabhängig von der Uniformisierung. Stützt man sich auf die Uniformisierung, so steht wieder bequemer-

---

vorkommend angenommene parabolische Substitution habe die Form $\tau'=\tau+1$. Dann enthält der Kreis mit $2ni$ als Mittelpunkt und n als Radius mindestens $2n$ in bezug auf G äquivalente Punkte. Dieser Kreis K_n, der mit der Achse des Reellen die feste Doppelverhältnisinvariante 2 besitzt (Durchmesser durch Abstand von der Achse des Reellen), ist nun vermöge G äquivalent einem Kreise K_n', der aus K_n entsteht, indem man von dem Punkte $2ni$ durch eine Substitution von G zu dessen äquivalenten Punkt im Fundamentalbereich übergeht und durch dieselbe Substitution K_n mittransformiert. Da nun alle Kreise K_n' die feste Invariante 2 haben, so ist klar, daß alle K_n' in einem endlichen Teilbezirke der oberen Halbebene liegen, welcher sich nicht bis an die Achse des Reellen heranerstreckt und daher nur endlich viele äquivalente Punkte fassen kann, deren Anzahl *nicht* mit n ins Unendliche wachsen kann.

weise das Auswahlverfahren zur Verfügung, um die stetige Änderung des Polygons zu erkennen und damit zugleich die stetige Bewegung der parabolischen Eckpunkte. Dasselbe gilt für die Durchführung des Kontinuitätsbeweises, wo auch das Auswahlverfahren schnell zum Ziele führt. Übrigens habe ich schon in III. gezeigt, wie diese Fälle sich, wenn man einmal das Hilfsmittel des Auswahlverfahrens anzuwenden gestattet, unmittelbar als Grenzfälle der anderen Fälle (elliptische Stigmata) behandeln lassen oder auch auf Grund der Bemerkung, daß ein Grenzkreispolygon mit parabolischen Eckpunkten stets als Grenzfall eines eigentlichen Hauptkreispolygons betrachtet werden kann, welches eine auf dem Hauptkreise eigentlich diskontinuierliche Gruppe bestimmt.

Die Einheit der allgemeinen Fundamentalbereiche Ψ. Es ergibt sich nun, ohne daß neue Betrachtungen erforderlich wären, wieder der Satz, daß die allgemeinsten Fundamentalbereiche, die durch Ineinanderschiebung entstehen, tatsächlich bei Festhaltung der Signatur ein einziges Kontinuum bilden. Wesentlich ist hierbei die Bemerkung, daß dieser Nachweis das Fundamentaltheorem als bewiesen voraussetzt, wobei dahingestellt bleibt, ob ein direkter elementarer Beweis dieses Satzes möglich ist.

E. Schlußbemerkungen.

Der vorliegenden Abhandlung IV beabsichtige ich demnächst noch eine weitere Abhandlung V folgen zu lassen.