

Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque.

Par

H. G. ZEUTHEN à Copenhague.

M. Cayley a énoncé le premier l'extension du principe de correspondance à une courbe d'un genre quelconque*); mais l'illustre savant n'en a publié aucune démonstration complète. En récompense il a montré, par de nombreuses et importantes applications, soit à la détermination de courbes, soit au problème des polygones inscrits et circonscrits**), qu'il connaissait très bien la portée du principe étendu, et qu'il savait le rendre utile même au cas de correspondances auxquelles son énoncé ne s'applique pas immédiatement (correspondances dont la «valeur» est négative).

On doit la première démonstration complète du principe étendu à M. Brill***). Elle était algébrique, mais son auteur ne tardait pas à lui donner une forme plus géométrique†). Sa démonstration a plus tard été développée ultérieurement, et M. Brill††) et son élève M. Junker†††) ont fini par mettre en pleine lumière les éliminations qui conduisent, dans la géométrie analytique, à la détermination des coïncidences dont le principe indique le nombre. Une démonstration

*) Comptes rendus, t. 62, p. 658; Proceedings of the London math. society, vol. 1. Je regrette de ne connaître pas ce dernier mémoire, qui doit contenir la démonstration du cas très-essentiel pour la démonstration complète où les courbes que j'appelle φ ont des points k -tuples; mais j'espère que ce mémoire va être publié prochainement dans les «Collected Mathematical Papers» de Cayley.

**) Transactions of the Royal Society, vol. 158 et 161.

***) Math. Annalen, t. VI, p. 33.

†) Math. Annalen, t. VII, p. 607.

††) Mathematische Annalen, t. XXXI, p. 374.

†††) Inaugural-Dissertation («Ueber algebraische Korrespondenzen») Tübingen

par les procédés de la géométrie énumérative est due à M. Schubert*), et une démonstration mixte à M. Bobek**). Le principe a encore été démontré au moyen de la théorie des fonctions par MM. Lindemann***) et Hurwitz†). Surtout la démonstration de ce dernier savant met au jour la véritable nature des correspondances de points d'une surface de Riemann à connexion multiple, non seulement celle des correspondances à une «valeur» positive, auxquelles s'applique immédiatement le théorème de Cayley et Brill, et celle des correspondances à une «valeur» négative, qui étaient déjà fort bien illustrées par les applications indirectes de M. Cayley, mais aussi celle des correspondances qu'il appelle singulières.

En même temps que ces démonstrations, dont la liste n'est pas même complète, ouvrent autant de voies de se mettre en possession du théorème, elles servent à l'élucider de côtés très-différents, et elles lui assurent une importance qui ne se borne nullement à la géométrie énumérative.

Malgré cette richesse de démonstrations très-complètes, chacune dans sa direction, j'ai éprouvé le besoin d'une démonstration plus adaptée aux applications à la géométrie énumérative dont M. Cayley avait donné de si importants exemples. Certainement la démonstration énumérative de M. Schubert††) ne laisse rien à désirer au point de vue de la généralité, et elle trouve une place très-naturelle dans son système général de la géométrie énumérative — quand même il n'en fait ensuite aucun usage; mais dans les applications particulières il s'agit non seulement de savoir qu'un nombre de coïncidences a «en général» telle valeur, et que par conséquent il existe, dans chaque cas particulier, une manière d'énumérer les coïncidences qui y conduit. Il s'agit d'avoir pour ce dénombrement des règles précises et applicables même aux cas limites, qui jouent un si grand rôle dans la géométrie énumérative. Il est vrai que M. Brill obtient la même chose en donnant le moyen de former les équations algébriques dont la géométrie énumérative détermine seulement les degrés; mais il convient à la géométrie énumérative d'opérer indépendamment de ces équations, à la formation desquelles, réciproquement, les degrés, une fois trouvés, peuvent être utiles. J'ai donc cherché les règles en

*) Calcul der abzählenden Geometrie § 18.

**) Sitzungsberichte der Wiener Academie vol. 93 II, p. 899 etc.

***) Journal für Mathemat., t. 84, p. 300.

†) Mathematische Annalen, t. 28, p. 567.

††) Une partie essentielle de la démonstration de M. Bobek est analytique. Avant tout son point de départ: «Aus der Annahme folgt, dass die Curvenschaar X die Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ der Punkte x von C_m^p in rationaler Form enthalten muss» dépend, selon moi, de considérations analytiques.

question, que j'ai énoncées dans le § I, en les faisant dépendre des règles connues pour l'application du principe de correspondance ordinaire, ce qui demandait une démonstration prenant ce principe pour point de départ. Je l'ai donnée dans le § II.

Cette démonstration n'a égard qu'aux correspondances déterminées de la manière supposée dans le théorème de Cayley et Brill. Il est donc utile d'avoir à côté d'elle une méthode de trouver le nombre des coïncidences qui n'en dépend pas. J'ai exposé cette méthode dans le § III et montré son application à une démonstration partielle du théorème de Cayley et Brill; mais elle aura ses principales applications aux questions particulières où les courbes servant, dans ce théorème, à déterminer les points Y qui correspondent à un point X sont inconnues ou n'existent pas (correspondances à une «valeur» négative). Le § IV contient des exemples de ces applications: j'applique, en particulier, la méthode aux polygones de Steiner, et à la détermination des nombres des groupes de points que MM. Brill et Nöther ont appelés des *groupes spéciaux*.

En fondant cette dernière méthode sur le principe de la conservation des nombres j'ai cru possible qu'elle présenterait quelque ressemblance avec les considérations qui ont conduit originairement M. Cayley à son théorème. Ce savant l'emploie, en effet, à côté de sa méthode fonctionnelle, qui est une importante application du principe auquel M. Schubert a donné plus tard le nom que je viens de citer.

Suivant l'usage de la géométrie énumérative, je parlerai ordinairement de la «courbe» et de ses «branches», et non pas de la «surface de Riemann» qui représente à la fois ses points réels et imaginaires et des «nappes» de cette surface. Parfois j'aurai pourtant recours à cette dernière représentation, mais seulement pour illustrer ce qui se passe aux points singuliers de la courbe. Les points d'embranchement dont je parlerai alors seront donc exclusivement ceux qui résultent de la multiplicité de branches de la courbe, et non pas ceux qui varieront avec le système de coordonnées, étant les points de contact des tangentes qui passent par un point dépendant de ce système.

§ I.

Énoncé du théorème de Cayley et Brill.

Soit donnée sur une courbe algébrique f du genre p (de l'ordre n et de la classe n') une correspondance telle qu'à chaque point X de la courbe correspondent β points Y déterminés par l'intersection de f avec une courbe φ rencontrant encore la courbe f en k points coïncidant avec X et en un certain nombre de points fixes, et qu'à chaque point Y correspondent α points X . Alors il existera sur la courbe f

$$(1) \quad \gamma = \alpha + \beta + 2kp$$

points où le point X coïncide avec un point correspondant Y .

L'évaluation du nombre γ se fait en general par les mêmes règles que dans le cas particulier où la courbe f est unicursale :

1°. La coïncidence d'un point X avec un point Y en un point multiple de f ne sera pas comprise au nombre γ , si ces deux points se trouvent sur des branches complètes différentes (ou bien sur des nappes de la surface de Riemann qui n'y sont pas réunies par un point d'embranchement).

2°. Pour trouver le nombre des coïncidences confondues qui ont lieu en un point D , qui peut être simple ou point multiple d'une seule branche complète (point d'embranchement qui réunit plusieurs nappes de la surface de Riemann), on peut exprimer, dans le voisinage de D , les coordonnées des points de f par des séries développées suivant des puissances à exposants entiers et positifs d'une quantité t , et prendre les valeurs de t pour abscisses des points d'une droite. Désignons par D' , X' et Y' les points de cette droite qui correspondent aux points D , X et Y de la courbe f . Alors, le dénombrement des coïncidences de X et Y qui ont lieu en D se fait suivant les règles connues*) qui servent au dénombrement des coïncidences des points X' et Y' de la droite qui ont lieu en D' . Il faut donc commencer par donner à $|D'X'|$ une valeur infiniment petite du premier ordre, et déterminer ensuite, successivement, le point X de f qui correspond à X' , les points Y qui correspondent à X , et enfin les points Y' correspondant aux points Y qui sont infiniment voisins de D : le nombre cherché sera égal à la somme des ordres des distances infiniment petites $|X'Y'|$.

Dans les cas où D est un point simple de f on peut substituer, dans cette règle, les points D , X et Y à D' , X' et Y' . La même chose sera permise si D est un point multiple d'une seule branche complète et si la distance de X à Y , mesurée sur la surface de Riemann n'est pas infiniment petite d'ordre supérieur que $|DX|$. Alors la coïncidence de X avec Y comptera pour 1 dans le nombre γ , si l'ordre η de $|DY|$ est ≥ 1 , $|DX|$ étant regardée comme infiniment petite du premier ordre, et pour η , si $\eta < 1$. On voit la justesse de cette substitution de D , X et Y à D' , X' et Y' , en déduisant des séries servant à exprimer les coordonnées de X et Y les séries suivantes

$$DX = a \cdot D'X'^\sigma + \dots,$$

$$DY = a \cdot D'Y'^\eta + \dots,$$

*) Voir mon *Mémoire sur les systèmes de courbes planes* dans les *Mémoires de l'Académie R. Danoise* 5^{me} série X, 1872, p. 330 (46), ou ma *Note sur le principe de correspondance* dans le *Bulletin de Darboux* t. V, 1873, p. 186—187.

où σ est égal au plus petit exposant dans les séries servant à exprimer les coordonnées, ou bien au degré de multiplicité de la branche complète (au nombre des nappes de la surface de Riemann réunies au point d'embranchement D). Ces séries montrent, en effet, que l'ordre η de DY sera le même que serait celui de $D'Y'$ si l'on regardait $D'X'$ comme infiniment petit du premier ordre.

Il nous reste donc seulement le cas où la distance $|XY|$, mesurée sur la surface de Riemann, est infiniment petite d'ordre supérieur que $|DX|$. Alors on aura $XY = DY - DX$, ou bien

$$XY = a(D'Y'^\sigma - D'X'^\sigma) + \dots = aX'Y'(D'Y'^{\sigma-1} + \dots + D'X'^{\sigma-1}) + \dots$$

En désignant par ϱ l'ordre de $|XY|$, $|DX|$ étant regardée comme infiniment petite du premier ordre, et par ϱ' l'ordre de $|X'Y'|$, $|D'X'|$ étant regardée comme infiniment petite du premier ordre, on voit que

$$\varrho\sigma = \varrho' + \sigma - 1.$$

La contribution ϱ' de la coïncidence qui a lieu en D au nombre γ sera donc égale à

$$\varrho\sigma - \sigma + 1. -$$

Si les courbes φ servant à déterminer les points Y qui correspondent aux points X ont des points d'intersection fixes avec la courbe f , il est évidemment permis, de regarder le nombre de ces points comme faisant partie à la fois du nombre β et du nombre γ . Alors le nombre β comprendra tous les points d'intersection de f avec φ à l'exception des k qui se trouvent au point X . Si nous désignons par n et r les ordres de f et φ , on aura donc

$$(2) \quad \beta = nr - k.$$

De même s'il y a des points X qui correspondent à tous les points Y de la courbe f , on pourra, à son gré, les compter à la fois au nombre α et au nombre γ . Les courbes φ correspondant à ces points X contiendront toute la courbe f .

§ II.

Démonstration au moyen du principe de correspondance de Chasles.

Nous commencerons par supposer que le point X soit un point k -tuple de la courbe φ qui y correspond. Alors on trouvera les coïncidences qui ne sont pas dues à la multiplicité de branches de f en cherchant les courbes φ qui sont tangentes en X à f . Elles auront aussi avec la tangente à f en X un $(k+1)$ -ième point d'intersection coïncidant avec X , si nous commençons aussi par excepter les cas où les courbes φ sont composées de droites, et même tous ceux où il existe des courbes φ qui contiennent toute la tangente à f en X .

Nous avons besoin premièrement du lieu des $r - k$ points d'intersection, Z , différents de X , de la courbe φ avec la tangente de f en X . On trouve son ordre au moyen de la correspondance des points, M et N , où une droite fixe rencontre une courbe φ et la tangente à f en X . A un point N correspondent évidemment $n'r$ points M , n' étant la classe de la courbe f . Le nombre des points N correspondant à un point M sera égal à celui des courbes φ qui passent par M , c'est à dire par un point quelconque du plan. Selon le principe de la conservation des nombres, ce nombre est égal à celui des courbes φ qui passent par un point P infiniment voisin de f . Un point de f , infiniment voisin de P , étant un point k -tuple X d'une seule courbe φ et un point simple Y de α courbes φ , on voit que $k + \alpha$ courbes φ passent par P . Le nombre des points N correspondant à M est donc égal à $k + \alpha$. Il en résulte que le nombre des coïncidences de M et N est égal à $n'r + k + \alpha$. Or M peut coïncider avec N de deux manières différentes: 1° en un point X de la courbe f , chacune de ces coïncidences comptant pour k , 2° en un des points Z dont nous cherchons le lieu. Celui-ci sera donc de l'ordre

$$n'r + k + \alpha - nk.$$

Nous appliquerons ensuite le principe de correspondance à la détermination du nombre des coïncidences d'un point X avec un des $r - k$ points d'intersection Z de φ avec la tangente à f en X . A cet effet nous joindrons deux points correspondants X et Z à un point fixe du plan, A . Il résulte des ordres des lieux des points X et Z qu'à une droite AX correspondront $n(r - k)$ droites AZ , et à une droite AZ , $n'r + k + \alpha - nk$ droites AX . Il y aura donc

$$n(r - k) + n'r + k + \alpha - nk$$

coïncidences de droites AX et AZ . Une partie de ces coïncidences ont lieu aux droites XZ qui passent par A . Les droites XZ étant les tangentes à la courbe f , et chacune de celles-ci contenant $r - k$ segments XZ , on voit que le nombre de ces coïncidences particulières est égal à $n'(r - k)$. Les autres coïncidences de droites correspondantes AX et AZ résultent des coïncidences cherchées des points X et Z . Le nombre de celles-ci est donc égal à

$$n'r + k + \alpha - nk + n(r - k) - n'(r - k),$$

ou bien, selon la formule (2), à

$$(3) \quad \alpha + \beta + (n' - 2n + 2)k.$$

Ce nombre est égal à celui des coïncidences de points correspondants X et Y de f qui ne sont pas dues à la multiplicité de branches de f . Soit P un point singulier de f qui y a une branche σ -tuple (P sera un point d'embranchement réunissant entre elles σ nappes de la surface

de Riemann). Alors si l'on place le point X au point P , σk des points d'intersection de φ avec f coïncideront avec P , et par conséquent $k(\sigma - 1)$ des $nr - k$ points Y coïncideront avec X . Chacune de ces coïncidences devant être, conformément aux règles énoncées dans le § I, comptée pour une seule dans le cas où la courbe φ n'est pas tangente à la branche singulière de f , on voit que le nombre des coïncidences de X et Y dues exclusivement à la multiplicité de branches de f est égal à $k \cdot \sum (\sigma - 1)$. En ajoutant ce nombre à (3), on trouve

$$\gamma = \alpha + \beta + \left(n' + \sum (\sigma - 1) - 2n + 2 \right) k,$$

ou bien, conformément au théorème de Cayley-Brill,

$$\gamma = \alpha + \beta + 2kp,$$

le nombre

$$n' + \sum (\sigma - 1) - 2n$$

étant selon la détermination du genre de Riemann*) égal à $2(p - 1)$.

Afin d'éviter les recherches infinitésimales nécessaires pour démontrer directement la justesse générale des règles du § I, il suffit de remarquer que l'étude infinitésimale du nombre des coïncidences qui ont lieu en un point P , simple ou singulier, de la courbe f , dépend exclusivement des propriétés de la courbe f dans le voisinage de ce point et de celles des courbes φ correspondant aux points X de ce voisinage, et non pas du genre p de la courbe donnée f . On peut donc y substituer, dans cette recherche particulière, une courbe unicursale, sans altérer les propriétés dont il s'agit. Il en résulte que les règles énoncées, dont la justesse est évidente pour une courbe unicursale, sont applicables aussi à une courbe algébrique quelconque.

Nous allons ensuite nous occuper des cas où les courbes φ n'ont pas des points k -tuples à leurs points X , et où par conséquent une partie des k intersections sont dues à des contacts de branches de φ avec f . Alors la démonstration précédente ne sera plus en vigueur; car la coïncidence d'un point Z avec le point correspondant X n'amène plus celle d'un point Y avec X ; mais on peut réduire ce cas au précédent par la substitution suivante, au moyen de laquelle on évite aussi sans difficulté les autres cas que nous avons dû excepter jusqu'à présent**). On substitue aux courbes φ d'ordre r de nouvelles courbes ψ d'ordre $r + s$ passant par les nr points d'intersection de f et φ et

*) Ma détermination dans les Mathematische Annalen III et dans les Acta Mathematica I en est la forme qui appartient à la géométrie énumérative.

**) Dans celui où toutes les courbes φ sont composées de droites on pourrait aussi démontrer le théorème directement au moyen de la correspondance des droites qui joignent X et Y à un point fixe.

par les ns points d'intersection de f avec une courbe fixe d'ordre s . Comme on peut assujétir encore une courbe ψ à

$$\frac{(r+s)(r+s+3)}{2} - n(r+s) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

conditions, on peut obtenir, en faisant s assez grand, que les courbes ψ ont des points k -tuples à leurs points correspondants X (et qu'aucune d'elles ne contient la tangente à f en X). Seulement il peut arriver que la courbe f fait elle-même partie des courbes ψ correspondant à certains points X . Cela arrivera toutes les fois que X se trouve en un point multiple de f , et on ne l'évitera pas même d'une manière générale pour d'autres points de la courbe. Cependant nous avons vu, à la fin du § I, que cette décomposition n'a aucune influence sur la formule (1). Certainement, il peut être douteux combien de nouvelles coïncidences on doit regarder ici comme «dues exclusivement aux multiplicités de branches de la courbe donnée f »; mais cette question ne se présentera pas si la courbe f est une courbe générale d'ordre n . On a donc en tout cas établi le théorème de Cayley et Brill pour une courbe générale d'ordre n . Il s'ensuit qu'il est juste aussi pour des courbes douées de singularités quelconques, à condition qu'on compte l'influence de ces singularités d'une manière conforme au théorème. Pour trouver cette influence nous n'avons pas besoin de revenir sur le détail de la démonstration, mais de même que nous l'avons fait dans le cas où les courbes φ ont des points k -tuples, nous pouvons renvoyer au cas connu des courbes unicursales.

Le théorème énoncé dans le § I, et les explications que nous y avons ajoutées, sont donc entièrement démontrés.

§ III.

Démonstration au moyen du principe de la conservation des nombres. Extension aux correspondances caractérisées par un nombre k négatif.

En déterminant directement l'influence d'un point double de la courbe f sur le nombre $\gamma - \alpha - \beta$, on pourrait déduire le principe général de correspondance de Cayley-Brill du cas particulier et connu où la courbe f est unicursale. Ce procédé s'applique, non seulement aux correspondances déterminées par les courbes que nous avons appelées φ , mais aussi — et en général beaucoup plus facilement — à d'autres où le nombre k est remplacé, dans l'expression du nombre des coïncidences, par un nombre négatif. Il faut seulement supposer que la courbe f appartienne à une famille de courbes qui possède une généralité assez grande pour leur attribuer p nouveaux points doubles et les réduire ainsi à des courbes unicursales. Nos recherches ne comprendront donc pas les correspondances singulières

indiquées par M. Hurwitz*); car ces correspondances n'appartiennent qu'à des familles singulières de courbes — telles que les courbes hyperelliptiques — qui ne sont pas caractérisées par des nombres de points singuliers. Cela n'empêche pas toutefois qu'on n'applique aussi des procédés semblables à l'étude particulière de chacune de ces dernières correspondances.

Ayant à parler de correspondances à «un nombre k » négatif, j'aurai besoin d'une nouvelle définition de ce nombre que j'appellerai *la valeur de la correspondance***). Je la définis par l'équation

$$(1) \quad \gamma = \alpha + \beta + 2kp,$$

où α et β désignent — de même que dans ce qui précède — les nombres des points X ou Y qui correspondent, respectivement, à un point Y ou X , γ le nombre des coïncidences, et p le genre de la courbe f . Alors le théorème de Cayley et Brill énoncera que, dans le cas où les points Y correspondant à un point X sont déterminés — comme le font MM. Cayley et Brill — par les intersections d'une courbe ϕ ayant encore en X un certain nombre d'intersections confondues, la valeur de la correspondance sera égale à ce dernier nombre. Dans les cas où la correspondance est déterminée autrement la recherche d'une expression du nombre γ des coïncidences sera identique à celle de la valeur de la correspondance.

Pour la trouver nous procéderons de la manière suivante. Nous commencerons pas attribuer à la courbe f p nouveaux points doubles, ce que nous avons supposé possible sans abandonner les conditions imposées à la correspondance donnée, et sans que la courbe f ne se décompose. Les p nouveaux points doubles la rendront donc unicursale. Transportons à cette courbe les conditions de la correspondance donnée, et désignons par α' , β' et γ' ce que deviennent alors α , β et γ . Il résulte du principe ordinaire de correspondance que

$$\gamma' = \alpha' + \beta'.$$

On aura donc

$$2kp = \gamma - \alpha - \beta = \gamma - \gamma' - (\alpha - \alpha') - (\beta - \beta').$$

Pour déterminer $\gamma - \gamma'$ il faut soustraire les nouvelles coïncidences dues à l'introduction des p nouveaux points doubles de celles qu'on perd à cause de cette introduction. Les premières ont lieu sur les

*) Mathematische Annalen t. 28, p. 565.

**) Ne sachant pas traduire en français le mot de «*Werthigkeit*» dont se servent MM. Brill et Hurwitz j'écris «*valeur*», qui est du moins un mot français. Pour en comprendre l'usage actuel il faut remarquer qu'originellement M. Brill parle de la valeur (*Werthigkeit*) du point X dans la correspondance, qui deviendra en même temps la valeur de Y si l'on détermine réciproquement les points X correspondant aux points Y par des courbes dépendant de ces derniers points.

deux branches distinctes qui forment chacun des nouveaux points doubles (sur les deux nappes distinctes et simples de la surface de Riemann). Leur énumération se fait donc au moyen des règles simples et connues. Pour trouver le nombre des coïncidences qui vont être perdues il faut considérer une courbe du genre p infiniment voisine de la courbe unicursale. Les deux nappes de la surface correspondante de Riemann qui vont être distinctes entre elles par l'introduction d'un nouveau point double sont réunies par deux points d'embranchement séparés par un intervalle infiniment petit. En général une coïncidence aura lieu de X avec Y , si ces deux points se trouvent dans un contour qui se retrécit à un point sans passer aucun point d'embranchement. Ce contour peut s'étendre, dans le cas actuel, de l'une nappe à l'autre par l'intervalle des deux points d'embranchement. Il ne sera donc pas difficile de s'assurer de l'existence ou de l'absence, de coïncidences qui vont être perdues en même temps que les deux points d'embranchement, ou bien par l'introduction du nouveau point double. Leur dénombrement direct serait plus difficile, mais nous indiquerons un moyen qui permet en beaucoup de cas d'y substituer le dénombrement plus facile de coïncidences de points appartenant à une branche (nappe) simple.

On doit encore déterminer les différences $\alpha - \alpha'$ et $\beta - \beta'$ par l'étude de l'influence de l'introduction des p nouveaux points doubles sur α et β . En beaucoup de cas cela se fera immédiatement au moyen de la détermination donnée de la correspondance, en d'autres on l'obtient en déterminant α et β par des correspondances plus simples. Il est permis d'ailleurs de regarder les nombres α et β comme inaltérés par l'introduction des nouveaux points doubles, à condition qu'on compte en faveurs de γ toutes les pertes de α et β .

Nous commencerons par appliquer ce procédé à la démonstration du théorème de Cayley et Brill dans le cas où les β points Y correspondant à un point X sont déterminés par les intersections de f avec une courbe φ qui ne passe pas par X . Alors on peut s'imaginer que l'introduction des points doubles contraigne les courbes φ à passer par ces points fixes; mais nous avons vu [que les points fixes n'ont aucune influence sur la différence $\gamma - \beta$. Il peut arriver que la courbe φ passe par un nouveau point double, D , en même temps que X ; mais ce cas peut être regardé comme un cas particulier*) où il

*) Nous avouons qu'il est difficile de s'assurer de l'impossibilité absolue de cas d'exception où cette considération serait inapplicable ou quelque chose d'imprévu se présenterait. La même observation pouvant être faite à plusieurs points des démonstrations suivantes, nous regardons comme notre démonstration propre du théorème *général* de Cayley et Brill celle que nous avons donnée dans le § II. Celle qui nous occupe ici en est une *explication* en même temps qu'elle illustre

faut attribuer et à α , β , γ et à α' , β' , γ' les mêmes valeurs que dans le cas plus général où les courbes φ correspondant à D passent seulement dans le voisinage de D . L'introduction des p points doubles n'a donc aucune influence sur $\gamma - \alpha - \beta$ de façon qu'on trouve que $k = 0$, on bien que $\gamma = \alpha + \beta$.*)

On peut en déduire un autre résultat qui va nous être utile. Il a égard à une combinaison de deux correspondances que nous appellerons leur produit. Soit donnée entre les points X et Y de la courbe f une correspondance (α, β) , et entre les points Y et Y_1 de la même courbe une correspondance (μ, ν) — c'est à dire une correspondance telle qu'à un point Y correspondent ν points Y_1 , et à un point Y_1 , μ points Y . Alors il existera évidemment entre les points X et Y_1 une correspondance (α_1, β_1) telle que

$$\alpha_1 = \alpha \mu, \quad \beta_1 = \beta \nu.$$

Nous l'appellerons le *produit de la correspondance $(\alpha \beta)$ de X et Y et de la correspondance (μ, ν) de Y et Y_1* .

Nous ne ferons toutefois usage de cette notion que dans le cas, où seulement la correspondance (α, β) est une correspondance quelconque, tandis que dans la correspondance (μ, ν) les points Y_1 sont déterminés par l'intersection de f avec une courbe ψ qui appartient à un faisceau donné et qui passe par Y .

Alors on peut faire correspondre à X à la fois tous les points d'intersection mobiles, Y et Y_1 , de la collection des β courbes correspondantes ψ . Dans cette correspondance (α_2, β_2) on aura évidemment

$$\alpha_2 = \alpha + \alpha_1, \quad \beta_2 = \beta + \beta_1,$$

et en désignant les nombres des coïncidences de X 1^o avec un point Y , 2^o avec un point Y_1 , et 3^o avec un des points Y ou Y_1 , respectivement par γ , γ_1 et γ_2 , on aura

$$\gamma_2 = \gamma + \gamma_1.$$

Or, les courbes ψ ne passant pas par X , nous venons de voir que

$$\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2,$$

ou bien que

$$\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 = -(\gamma - \alpha - \beta).$$

La valeur k_1 de la correspondance (α_1, β_1) est donc égal à $-k$, où k désigne la valeur de la correspondance donnée (α, β) **).

une methode, qui fournira dans les *cas particuliers bien définis* une démonstration irréprochable, et qui sera utile dans les cas auxquels il serait difficile ou impossible d'appliquer immédiatement le théorème de Cayley et Brill.

*) Le théorème de Cayley et Brill étant démontré dans ce cas particulier, on pourrait appliquer la partie énumérative de la démonstration de M. Bobek, citée dans l'introduction du présent article, à en compléter la démonstration.

**) Ce résultat, auquel nous avons donné la forme limitée qui va nous être

Nous sommes ainsi préparés à appliquer notre nouvelle démonstration du moins à une partie des correspondances des MM. Cayley et Brill. Nous commencerons, comme dans le § II, par le cas où la courbe φ qui détermine les points Y correspondant à X a en X un point k -tuple dont aucune branche n'est tangente à f , et nous devons démontrer que ce nombre k est égal à la valeur de la correspondance. Dans notre démonstration nous supposerons toutefois qu'aucune des courbes φ qui correspondent aux p nouveaux points doubles que nous allons introduire ne contienne toute la courbe f .

On voit qu'en même temps que X passe, sur l'une des deux branches par un point double D , k points d'intersection Y avec l'autre branche coïncideront, eux-aussi, avec D . Cela donnera lieu à un certain nombre de coïncidences de X avec Y dans le cas où l'on regarde la courbe comme limite de celles qui n'ont pas encore ce point double. Il faut prouver que pour chacun des p nouveaux points doubles, nécessaires pour réduire la courbe f à une courbe unicursale, ce nombre est égal à $2k$. Afin de nous appuyer, dans cette énumération, sur des règles connues, nous substituerons à la correspondance donnée (α, β) le produit (α_1, β_1) d'elle et de la correspondance particulière dont nous venons de parler. Si l'on donne au faisceau des courbes ψ qui passent par Y et qui servent à déterminer les points Y_1 une position indépendante du point D , à chacun des points Y qui coïncident avec le point double D sur l'une des deux branches (nappes de la surface de Riemann) correspondra un point Y_1 coïncidant avec D sur l'autre, c'est à dire sur la même branche que le point correspondant X . A un point X qui se trouve sur l'une des deux branches à une distance de D qui est infiniment petit de premier ordre correspondront k points Y_1 se trouvant sur la même branche à des distances infiniment petites du même ordre de X . On voit donc que $2kp$ des coïncidences de la courbe rendue unicursale par l'introduction des p points doubles se trouvent en ces points, et elles cesseront d'exister si la courbe perd de nouveau ces points doubles. On voit donc que la valeur de la correspondance de X et Y_1 est égale à $-k$. Il en résulte que celle de la correspondance donnée de X et Y , est égale à $+k$, ce qu'il fallait démontrer.

immédiatement utile, n'est qu'un cas particulier de la formule dont M. Cayley [Transactions of the Royal Society vol 158, p. 149] fait usage dans le cas où les points d'intersection Y de la courbe φ se distribuent en plusieurs groupes de points Y_1, Y_2 etc.: Si μ_1 des points Y coïncident dans chaque point Y_1 , μ_2 dans chaque point Y_2 etc., et si la correspondance de X et Y_1 est caractérisée par les nombres $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, celle de X et Y_2 par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ etc., on aura

$$\mu_1(\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1) + \mu_2(\gamma_2 - \alpha_2 - \beta_2) + \dots = 2k\gamma.$$

M. Cayley fait de nombreuses applications de cette formule qui lui permet de trouver aussi les nombres des coïncidences de correspondances dont la valeur est négative.

A côté de ce cas du théorème de Cayley et Brill, auquel il n'est pas permis ici à cause de la supposition que nous avons faite, de réduire les autres — ce que nous avons pu faire dans le § II — nous considérerons encore celui où *une seule branche de φ passe par X et y a un contact du premier ordre avec f* . Il faut démontrer qu'alors la valeur de la correspondance est égale à 2.

Nous aurons à étudier l'influence de l'introduction des p nouveaux points doubles sur les nombres α, β, γ , appartenant à la correspondance (de X et Y_1), produit de la correspondance donnée (de X et Y) et de la correspondance particulière (de Y et Y_1) dont nous avons déjà fait usage. Désignons par $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ les valeurs que vont prendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ par cette introduction. Celle-ci n'aura aucune influence ni sur β ni sur β_1 , de façon que $\beta'_1 = \beta_1$. Une partie des α points X qui correspondent, dans la correspondance donnée, à un point Y coïncideront avec les nouveaux points doubles et disparaîtront dans le cas où on regarde la courbe comme unicursale. Les points de contact des α courbes φ qui passent par un point donné Y pouvant être déterminés par les coïncidences d'une correspondance de points d'intersection simples, et la valeur de cette correspondance étant égale à 1, la réduction $\alpha - \alpha'$ due aux nouveaux points doubles sera égale à $2p$. Si nous désignons (comme nous l'avons fait déjà) par μ le nombre des points Y qui correspondent à un point Y_1 , la réduction $\alpha_1 - \alpha'_1$ du nombre α_1 sera égale à $2\mu p$.

Quant à la valeur de $\gamma_1 - \gamma'_1$, le point X , en passant sur l'une des deux branches par un des nouveaux points doubles, D , rencontrera évidemment un point Y_1 correspondant au point d'intersection Y de la courbe φ avec l'autre branche.

La distance DY_1 devenant infiniment petite du second ordre en même temps que DX devient infiniment petit du premier ordre, XY_1 sera du premier ordre, et le passage donne par conséquent lieu à une seule coïncidence. L'introduction des p nouveaux points doubles a donc premièrement donné lieu à l'introduction de $2p$ nouvelles coïncidences.

En même temps elle aura causé la perte d'un certain nombre de coïncidences. En effet, les 2μ points X correspondant à un point Y_1 qui vont être perdus par l'introduction d'un nouveau point double, D , se trouveront en même temps que Y_1 dans le voisinage de D . Il faut donc se rendre compte, pour la courbe du genre p infiniment voisine de la courbe unicursale, des rencontres de Y_1 et de X qui ont lieu dans le voisinage de D . A un point Y_1 de ce voisinage correspondront 1° un point Y du même voisinage et 2° $\mu - 1$ points Y qui ne s'y trouvent pas. Le point Y_1 rencontrant simplement dans ce voisinage chacun des $2(\mu - 1)$ points X qui correspondent à ces derniers points

Y , sans que les rapports infinitésimaux ne présentent rien de particulier, ces rencontres donnent lieu à $2(\mu-1)$ coïncidences qui vont être perdues par la formation du point double. Au contraire le point Y_1 ne rencontrera pas du tout, dans ce voisinage, les points X qui correspondent au point Y qui se trouve dans le même voisinage.

En effet, si le point Y_1 coïncidait avec un de ces points X , la position limite de la courbe φ , tangente à la courbe donnée f en X et passant par Y , serait tangente à la courbe ψ qui sert à déterminer les points correspondants Y et Y_1 . Or la position limite de φ qui doit rencontrer f en 3 points confondus sera tangente à une des deux branches du point double D , tandis qu'on peut déterminer le faisceau des courbes ψ ainsi que la tangente en D à la courbe ψ qui passe par ce point ait une direction arbitraire. On voit donc qu'aucune coïncidence de Y_1 avec X ne devient possible de cette façon.

Les mêmes nombres de coïncidence ayant lieu dans les voisinages des autres nouveaux points doubles, la valeur totale de $\gamma_1 - \gamma_1'$ sera égale à $-2p + 2(\mu-1)p$. On trouve ainsi que

$$\begin{aligned}\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 &= \gamma_1 - \gamma_1' - (\alpha_1 - \alpha_1') - (\beta_1 - \beta_1') \\ &= -2p + 2(\mu-1)p - 2\mu p = -4p.\end{aligned}$$

La valeur de la correspondance de X et Y_1 est donc égale à -2 ; celle de la correspondance donnée est par conséquent égale à 2 , ce qu'il fallait démontrer.

On pourrait essayer d'appliquer le même procédé à une détermination directe de la valeur de la correspondance dans le cas où les courbes φ ont en X un contact du second ordre. En déterminant alors les points de contact des α courbes qui passent par un point donné Y par les coïncidences de points de contact simples et de points d'intersection, on pourrait profiter du résultat que nous venons de démontrer pour trouver que $\alpha - \alpha' = 4p$. On pourrait continuer ensuite la même marche que dans le cas précédent. Seulement la dernière assertion: que le point Y_1 ne rencontre, dans le voisinage de D , aucun des points X dont le point correspondant Y se trouve dans le même voisinage, cesserait d'être vraie, parce que à présent il existera des courbes φ qui ont elles-mêmes des points doubles en D . Nous n'essaierons pas de surmonter les difficultés qui en résultent. Les démonstrations que nous avons déjà données suffisent, en effet, pour expliquer d'où vient le terme $2kp$ dans le théorème de Cayley et Brill.

Cette explication théorique n'est pas, toutefois, le principal but de notre seconde démonstration de ce théorème. Celle-ci doit servir avant tout d'exemple d'un procédé qui peut conduire, en beaucoup de cas, plus immédiatement qu'une application, ou des applications

successives, du théorème à la détermination du nombre des coïncidences d'une correspondance donnée. Je pense et aux correspondances à une valeur positive dont on ne connaît pas immédiatement les courbes φ , et aux correspondances à une valeur négative, où ces courbes n'existent pas.

Si les nombres caractéristiques α et β ne s'altèrent pas par l'introduction des p nouveaux points doubles, et si les points correspondants X et Y qui tendent à coïncider en même temps avec un de ces points se trouvent sur la même branche, la détermination des coïncidences se réduira à une application du principe de correspondance ordinaire à la courbe rendue unicursale par l'introduction des p nouveaux points doubles, suivie d'une soustraction des coïncidences qui ne sont dues qu'à ces points. La valeur de la correspondance est dans ce cas négative. Si la valeur est positive en même temps que α et β restent inaltérés, on peut faire usage de la multiplication dont nous nous sommes déjà servi pour réduire la correspondance à une correspondance à une valeur négative.

Si au contraire le nombre α (ou β) ne garde pas sa valeur à l'introduction des nouveaux points doubles, l'application de notre méthode présentera la même difficulté dont notre démonstration partielle du théorème de Cayley et Brill a offert des exemples: celle de déterminer pour une courbe voisine de la courbe unicursale les coïncidences de Y avec ceux des points X qui vont être perdus au moment où la courbe devient unicursale. Alors si la valeur de la correspondance est négative il vaudra le mieux y substituer, au moyen de la multiplication, une correspondance à valeur positive, et si la valeur est positive on peut avoir recours au théorème de Cayley et Brill. Notre étude de ce qui se passe dans le voisinage d'un nouveau point double peut servir dans ce cas à trouver la seule propriété des courbes inconnues φ dont nous ayons besoin à cet effet: le nombre k de leurs points d'intersection avec f qui coïncident avec le point X . Il résulte, en effet, des recherches de M. Hurwitz que les courbes φ servant à déterminer les points Y existent toujours dans le cas d'une correspondance à une valeur positive.

§ IV.

Applications de la méthode du § III; polygones de Steiner; groupes spéciaux.

1. Combien y a-t-il de manières dont l'équation d'une courbe donnée du 4^me ordre peut être réduite à la forme suivante:

$$xztr - \gamma \cdot yuvs = 0,$$

$x = 0$ et $y = 0$ représentant des droites données qui se rencontrent en

un point de la courbe, et $z = 0$, $t = 0$, $r = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $s = 0$ représentant des droites inconnues?

Grâce à une propriété bien connue des courbes algébriques il suffira de déterminer les droites z , t , u , v ainsi que les points d'intersection de $x \cdot z \cdot t = 0$ et de $y \cdot u \cdot v = 0$ se trouvent sur la courbe donnée: alors aussi les trois autres points d'intersection de $x \cdot z \cdot t = 0$ avec la courbe se trouveront sur une droite s , et les quatre autres points d'intersection de $y \cdot u \cdot v \cdot s = 0$, sur une droite r .

Nous commencerons par choisir, entre les points d'intersection de $x = 0$ avec la courbe, le point (xu) et le point (xv) — c'est à dire le point d'intersection des droites x et u et celui des droites x et v — et, entre les points d'intersection de $y = 0$ avec la courbe, les points (yz) et (yt) . Nous essaierons ensuite de prendre un point quelconque de la courbe, X , pour le point (tv) . Ce point connu, on connaîtrait la droite v , ce qui donnerait une détermination à 2 solutions de (zv) et par conséquent de la droite z , ensuite une détermination à 4 solutions de (zu) et par conséquent de la droite u , ensuite une détermination à 8 solutions de (tu) . En joignant ces points à (yt) on aura 8 droites t , ce qui donnera 16 points Y dont un devra coïncider avec X , si la question est résolue par notre essai. Cela n'a pas lieu en général, mais il existera entre les points X et Y une correspondance (α, β) , où nous venons de voir que $\beta = 16$. La détermination des points X correspondant à un point donné Y se faisant d'une manière analogue, on voit qu'aussi $\alpha = 16$.

Dans le cas où la courbe est unicursale le nombre γ' des coïncidences sera donc égal à 32; mais deux de ces coïncidences auront lieu en chaque point double (si nous supposons que les droites données x et y ne passent par aucun de ces points). En effet, si X se trouve sur l'une des branches d'un point double, un des points correspondants (zv) que nous venons de déterminer se trouvera sur l'autre branche, un des points (zu) sur la première branche, un des points (tu) sur la seconde et ensuite un des points Y sur la même branche que X . Cette coïncidence, qui est évidemment simple, sera perdue en même temps que le point double. On voit ainsi que la valeur de la correspondance est égale à -1 , et que le nombre de coïncidences se réduit pour une courbe générale du quatrième ordre, qui est du genre 3, à $32 - 2.3$ ou à 26. Le nombre cherché a donc cette valeur.*)

2. *Polygones de Steiner.* Soient donnés sur une courbe f du 3^{me} ordre les n points fixes A_1, A_2, \dots, A_n . Inscrivons à f un polygone,

*) On pourrait trouver le même résultat et du moins une partie des résultats suivants par une suite d'applications de la formule de M. Cayley que nous avons citée dans la note de la p. 100.

en général ouvert, $P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1}$ dont les côtés rencontrent la courbe aux points fixes, $P_1 P_2$ en A_1 , $P_2 P_3$ en A_2 etc. Alors à un point P_1 choisi arbitrairement sur la courbe, correspondra un seul point P_{n+1} , et réciproquement. Le polygone se fermera si le point P_1 coïncide avec P_{n+1} . Le nombre de coïncidences sera égal à 2, si la courbe est unicursale; mais alors il faut se demander si les coïncidences n'ont pas lieu à son point double. Nous supposons qu'aucun des points donnés $A_1 \dots A_n$ ne s'y trouve. Alors si l'on place le point P_1 au point double sur l'une des deux branches, les points $P_2 \dots P_{n+1}$ se trouveront au même point et appartiendront alternativement à l'autre branche et à la même branche que P_1 . On voit donc que dans le cas où n est pair les deux coïncidences de P_1 et P_{n+1} auront lieu sur les deux branches du point double, et qu'elles vont être perdues en même temps que la courbe perd son point double. La valeur de la correspondance est dans ce cas égale à -1 , et le nombre des coïncidences devient égal à zéro pour une cubique générale.

Dans le cas où n est impair aucune des deux coïncidences de la courbe unicursale n'aura lieu au point double; mais deux nouvelles coïncidences vont s'y ajouter à la perte du point double, ou bien la valeur de la correspondance sera égale à 1. On peut s'en assurer en ajoutant aux points donnés un nouveau point fixe A de la courbe, la correspondance à la valeur -1 qu'on obtient ainsi étant le produit de la correspondance donnée et d'une correspondance déterminée par un faisceau.

Nous avons donc démontré les résultats suivants:

Le nombre des polygones fermés, $P_1 P_2 \dots P_n$, inscrits à une cubique générale et dont les côtés rencontrent encore cette courbe aux points donnés A_1, A_2, \dots, A_n est égal à 0 ou à 4, suivant que n est pair ou impair — s'il n'est pas infini. Il faut ajouter (ou sous-entendre) cette dernière exception à tous les nombres qu'on trouve dans la géométrie énumérative; car ils indiquent des degrés d'équations algébriques, et ces équations peuvent être identiques.

Il en résulte le théorème suivant:

Soit donné un polygone fermé, $P_1 P_2 \dots P_{2r}$, à un nombre pair de côtés et inscrit à une cubique: alors on pourra faire passer par les points $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_r, B_r$ où ses côtés rencontrent encore la courbe les $2r$ côtés d'une infinité de polygones de la même nature. Pour les construire il suffit de substituer à P_1 un point quelconque de la courbe et de faire passer les côtés successifs du nouveau polygone inscrit par les points fixes $A_1 B_1 A_2 \dots A_r B_r$. Le théorème sera encore applicable à une courbe unicursale du 3^{me} ordre, si aucun des sommets du polygone donné ne se trouve à son point double.

Ce théorème sera celui de Steiner sur des polygones inscrits à

une cubique dans le cas où tous les points fixes A_1, A_2, \dots, A_n d'un numero impair coïncident avec en seul point A , et de même tous les points fixes B_1, B_2, \dots, B_n d'un n^0 pair coïncident avec un autre point B . La généralisation du théorème de Steiner que nous venons de prouver est indiquée par plusieurs des autres démonstrations qu'on en a données.*) Nous appellerons aussi les polygones plus généraux dont les points fixes sont distincts entre eux *polygones de Steiner*.

3. *Détermination des points fixes des polygones de Steiner.* Il résulte de la construction des polygones de Steiner que chacun des $2r$ points fixes $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_r B_r$ sera déterminé par les $2r - 1$ autres. Si l'on n'en donne que les $2r - 2$, les deux qui restent encore se correspondront donc un-à-un. Si la courbe est unicursale et l'un de ces deux points, mais aucun des $2r - 2$ points fixes donnés, se trouve au point double, aussi l'autre s'y trouvera. En effet, si l'on place le premier sommet P_1 du polygone, qui peut être un point arbitraire de la courbe, en un point simple, et le point A_1 se trouve au point double, les sommets suivants $P_2, P_3 \dots$ s'y trouveront aussi jusqu'au sommet qui succède à un autre point fixe qui s'y trouve. Le dernier côté devant aboutir au point P_1 , il faut que A_1 ne soit pas le seul point fixe qui coïncide avec le point double. Si les deux points correspondants sont A_1 et un des points B , qui est séparé de A par un nombre impair de sommets, ils passeront en même temps par le point double sur la même branche. Si les deux points correspondants sont A_1 et un autre des points A , ils y passeront l'un sur l'une branche, l'autre sur l'autre.

On voit donc, de la même manière que dans le précédent exemple, que la valeur de la première correspondance est égale à -1 , et celle de la seconde correspondance, à $+1$, ou bien, que *dans le cas où les $2r$ points A et B sont donnés à un point A et un point B près il n'existera en général aucune coïncidence de ces deux points, et que dans le cas où les $2r$ points sont donnés à deux points A près, il existe quatre coïncidences de ces deux points.*

On déduit du premier de ces résultats le théorème suivant:

Si l'on inscrit à une courbe plane du troisième ordre un polygone à un nombre pair de côtés dont deux qui sont séparés par des nombres impairs de sommets se rencontrent sur la courbe en un point qui n'est pas un sommet, la courbe sera le lieu des points d'intersection des côtés des mêmes n^0 s dans tous les polygones inscrits dont les autres côtés ont,

*) En particulier dans celle de M. Küpper, (Mathematische Annalen Bd. XXIV, p. 2), et plus directement dans celle de M. Juel (Nyt Tidsskrift for Mathematik 1891, p. 15). La démonstration par les fonctions elliptiques s'applique aussi bien à la généralisation qu'au théorème propre de Steiner.

dans le même ordre, les mêmes points d'intersection avec la courbe que ceux du premier polygone.

Ce théorème pourrait avoir l'air d'être en contradiction avec le fait qu'un point quelconque du plan C peut être le point d'intersection de deux côtés, séparés par des nombres impairs de sommets, d'un polygone inscrit dont les autres côtés passent encore par des points arbitrairement donnés de la courbe. On trouve en effet, au moyen d'une correspondance dont la valeur est égale à -1 , que le nombre des polygones déterminés par ces conditions est égal à 6. On en aura l'explication en remarquant que dans le cas particulier où le point C se trouve sur la courbe, ce point sera lui même, dans quatre des polygones qui satisfont aux conditions données, un sommet adjacent à un des côtés passant par C , et dans les deux autres, à la fois sommet adjacent à tous ces deux côtés. Dans le théorème énoncé, nous avons supposé, au contraire, que le point C où coïncide un des points fixes A avec un des points fixes B ne soit pas sommet du polygone, et alors nous avons prouvé qu'un point quelconque de la courbe jouit de la même propriété. Aussi dans ce cas il existera six polygones dont les deux côtés qui ne passent pas par des points donnés de la courbe passent par un point C pris arbitrairement dans le plan. Devant en même temps se rencontrer sur la courbe, ces deux côtés coïncideront entre eux; l'enveloppe des côtés déterminés ainsi sera de la sixième classe.

Il est évident, qu'entre les points fixes d'un polygone de Steiner, il peut exister à la fois plusieurs points d'intersection de côtés séparés par un nombre impair de sommets, et qu'alors on peut placer tous ces points arbitrairement sur la courbe. Les ayant choisis on peut en faire usage dans la détermination des autres points fixes. —

En nous tournant ensuite aux coïncidences de points A séparés par un nombre pair de sommets, nous avons vu que dans le cas où les points fixes d'une série de polygones de Steiner sont donnés à deux points A près, il existera quatre points de la courbe où peuvent coïncider ces deux points fixes. Nous supposons que cette coïncidence ait lieu entre les points A_1 et A_2 du premier et du troisième côté en un point X de la courbe, et que seulement les points $B_1, B_2, B_3, A_4, B_4 \dots A_r, B_r$ soient donnés. Alors à chaque point X correspondra un seul point A_3 , et à chaque point A_3 , quatre points X . On a donc pour cette correspondance de X et A_3

$$\alpha = 4, \quad \beta = 1.$$

Nous avons vu aussi que dans le cas d'une courbe unicursale, le premier de ces nombres se réduit à $\alpha' = 2$. Il faut donc, selon nos remarques à la fin du § III, avoir recours ici au théorème de Cayley

et Brill après avoir étudié, au moyen de ce qui se passe dans le voisinage du point double, D , la nature des courbes φ .

Si l'on place le point X sur l'une des deux branches à une distance DX de ce point qui est infiniment petite du premier ordre, on verra en prenant un point P_1 de la courbe à une distance finie de D pour premier sommet du polygone de Steiner et en commençant la construction de ce polygone, que les distances DP_2 et DP_3 deviennent infiniment petites du premier ordre, DP_4 et DP_5 infiniment petites du second ordre, et que le point A_3 se trouvera, sur la branche différente de celle où se trouve X , à une distance de D qui est, elle aussi, infiniment petite du second ordre. Le point construit A_3 devant être, soit qu'on regarde la courbe comme unicursale, soit qu'on la regarde comme limite de courbes du genre 1, le seul point d'intersection mobile et différent de X de la courbe φ , il faut que ces courbes aient en X des contacts simples avec f . La valeur de la correspondance est donc égale à 2, et le nombre γ des coïncidences sera égal à

$$4 + 1 + 2 \cdot 2 = 9.$$

Les points fixes d'une série de polygones de Steiner étant donnés aux trois points A_1, A_2, A_3 près, il y aura, par conséquent, 9 points de la courbe où ces 3 points coïncident entre eux.

Si aussi le point A_4 est inconnu, il existera entre le point X où coïncident A_1, A_2, A_3 et le point A_4 une correspondance où

$$\alpha = 1, \quad \beta = 9.$$

Si l'on attribue à la courbe f un point double D , et si l'on place le point X à une distance de ce point qui est infiniment petite du premier ordre, le point A_4 se trouvera sur l'autre branche à une distance infiniment petite du troisième ordre de D . Il en résulte que les courbes φ de la correspondance auront en X des contacts du second ordre, ou bien que la valeur de la correspondance est égale à 3. Le nombre de coïncidences devient donc $1 + 9 + 2 \cdot 3$ ou 16.

En déterminant ensuite, successivement et de la même manière, les nombres de coïncidences de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 etc., les autres points fixes étant donnés, on trouve que dans le cas où tous les points fixes d'un n^0 pair, $B_1 B_2 \dots B_r$ d'une série de polygones de Steiner à $2r$ côtés sont donnés, il existera sur la courbe r^2 points où tous les points fixes d'un n^0 impair, A_1, A_2, \dots, A_r , coïncident entre eux.

Dans le cas où aussi les points fixes donnés, B , coïncident entre eux un des n^2 points cherchés coïncidera avec eux. Les décompositions ultérieures de la solution trouvée qui auront lieu dans ce cas si n n'est pas un nombre premier sont connues.

4. *Détermination des nombres de groupes spéciaux.* Un groupe spécial de points d'une courbe algébrique f est une collection de points

de la courbe qui comptent, dans la détermination des courbes φ qui appartiennent à un système linéaire donné et qui passent par eux, pour un nombre de conditions plus petit que celui des points. Les questions dont nous allons nous occuper auront pour objet les dénombrements des groupes spéciaux dont on connaît un nombre assez grand de points pour les déterminer.

Ces dénombrements ont été exécutés d'une manière générale par M. Castelnuovo*) dans les cas où les courbes du système linéaire sont des courbes «adjointes» d'ordre $n - 3$, n étant l'ordre de f . M. Brill**), qui attache sa solution à la détermination algébrique, ne s'occupe que des groupes où un seul point devient superflû à la détermination des courbes du système; en récompense il s'occupe de courbes «adjointes» d'un ordre quelconque.

N'ayant ici qu'à donner des exemples de notre méthode nous nous bornerons à la détermination des mêmes nombres qu'a trouvés M. Brill. En adoptant en partie ses notations, nous supposerons toutefois que le nombre des points donnés du groupe qu'il appelle, dans sa recherche générale, $k - i - 1$, est égal à zéro. Cela ne restreint pas la généralité des solutions; car il est permis de regarder tous les points fixes des courbes φ comme faisant partie des conditions données du système linéaire. Nous supposerons que les courbes du système linéaire (φ) dépendent de $2i$ paramètres variables***), et il s'agit de déterminer sur la courbe f un groupe de $i + 1$ points tel que les courbes φ qui passent par i de ces points passent d'elles-mêmes par le $(i + 1)^{\text{me}}$. Nous désignerons par $m + i + 1$ le nombre des points d'intersection mobiles des courbes φ avec la courbe donnée f ; m sera donc le nombre de ceux qui n'appartiendront pas au groupe cherché. Le nombre de ces groupes dépendra du genre p de la courbe fixe, f , et des nombres m et i . Nous l'appellerons $\xi(p, m, i)$, ou, dans les cas où il n'y a pas lieu de malentendus, simplement ξ . Qu'il a, en général, une valeur finie résulte de la détermination algébrique de M. Brill, mais il se montrera aussi par nos déterminations numériques.

De même que M. Brill, nous supposerons que les courbes du système donné soient *adjointes* à la courbe f , ou bien qu'elles passent $\mu - 1$ fois par tout point μ -tuple de f , et que, dans les cas où plusieurs branches de cette courbe sont tangentes l'une à l'autre, elles

*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vol V, 1889, p. 130.

**) Ueber algebraische Correspondenzen. Zweite Abhandlung, Mathematische Annalen Bd. 36, p. 321—360, voir en particulier la partie VII^{me}.

***) Il suffit de supposer que les points d'intersection avec f dépendent de $2i$ paramètres; mais en ajoutant, s'il en est besoin, aux conditions du système celle de passer par un nombre convenable de points qui ne se trouvent pas sur f , on peut réduire alors à $2i$ le nombre des conditions du système, sans altérer rien par rapport aux groupes des points d'intersection.

satisfassent encore aux conditions nécessaires pour empêcher que la détermination mutuelle des points des groupes ne se réduise, pour une partie des groupes, à celle des points coïncidant avec le même point multiple. Nos procédés seront toutefois applicables à déterminer aussi, dans le cas de courbes φ non adjointes, les solutions indépendentes des points multiples. Dans le cours de notre recherche nous aurons même besoin de déterminations de cette espèce.

Nous commencerons par nous occuper du cas où $i = 1$. Alors les courbes du système auront $m + 2$ points d'intersection mobiles dont on peut choisir arbitrairement les deux. Ceux-ci déterminent, en général, tous les autres, à l'exception du cas où l'un des deux points en détermine l'autre. Le système étant linéaire, ce cas d'exception aura lieu, s'il passe par les deux points deux courbes différentes du système. *)

Afin de trouver le nombre de ces cas d'exception, nous considérerons les courbes φ_A du système qui passent par un point fixe A de la courbe et les courbes φ_B qui passent par un point fixe B , et nous ferons correspondre à une courbe φ_A les courbes φ_B qui passent par un point d'intersection mobile, Z , de φ_A . Il existera alors une correspondance entre les autres points d'intersection mobiles, X et Y , de ces courbes avec f . A un point X (ou Y) correspondront m points Z , et m^2 points Y (ou X). La correspondance sera donc caractérisée par les nombres

$$\alpha = \beta = m^2.$$

Pour en trouver la «valeur» il faut rendre la courbe f unicursale en lui attribuant p nouveaux points doubles. Alors les nombres α et β resteront inaltérés; mais, les courbes φ n'étant plus adjointes à la nouvelle courbe, une partie des coïncidences auront lieu aux nouveaux points doubles. Si l'on place le point X sur une des deux branches d'un de ces points, D , un des points correspondants Z se trouvera sur l'autre, et un des points Y sur la même branche que X , ce qui donnera une coïncidence. Les $2p$ coïncidences qu'on obtient ainsi allant être perdues en même temps que les p points doubles, la valeur de la correspondance donnée sera égale à -1 , et le nombre γ de ses coïncidences sera égal à

$$\gamma = \alpha + \beta - 2p.$$

$m - 1$ de ces coïncidences ont lieu en chacun des m points où la courbe φ qui passe et par A et par B rencontre encore la courbe fixe f , chacun des autres points d'intersection pouvant être regardée

*) Selon la supposition faite dans la note précédente les courbes passant par les deux points formeront alors un faisceau.

comme le point correspondant Z . Les autres points de coïncidence seront les 2ξ points des ξ couples cherchés, car par chacun d'eux et par le point correspondant Z passent deux courbes différentes du système. On voit donc que $\gamma = m(m-1) + 2\xi$ ou bien que

$$m(m-1) + 2\xi = m^2 + m^2 - 2p,$$

d'où

$$(1) \quad \xi(p, m, 1) = \xi = \frac{(m+1)m}{2} - p = \left(m + \frac{1}{2}\right) - p.$$

Il est bon de remarquer que le résultat qu'on obtient immédiatement par notre procédé, c'est le nombre des solutions qui appartiennent à la courbe rendue unicursale par l'introduction des p points doubles et qui sont indépendantes de ces points. C'est parce que les solutions qui en dépendent vont être perdues en même temps que ces points doubles, que les nombres trouvés sont applicables aussi à la courbe donnée du genre p . La même chose ayant lieu pour les questions suivantes, nous pourrions simplifier notre manière d'en exprimer les solutions, *en ne parlant, dans ce qui suit, que d'une courbe unicursale f , et en supposant que les courbes φ ne soient pas adjointes par rapport à p de ses points doubles, mais bien par rapport à ses autres points singuliers. En ne cherchant alors que le nombre des solutions indépendantes de ces p points doubles, on trouvera celui qui a égard à une courbe du genre p .*

Afin de trouver la valeur générale du nombre $\xi(p, m, i)$, nous allons chercher, par le principe de correspondance, une formule de réduction servant à l'exprimer par des nombres qui correspondent à des valeurs plus petites de i .

Si l'on ajoute aux conditions données du système celles de passer par deux nouveaux points de la courbe f , A et X , il existera sur cette courbe $\xi(p, m-1, i-1)$ groupes de i points Z_1, Z_2, \dots, Z_i qui ne comptent que pour $i-1$ conditions à la détermination ultérieure des courbes φ , ainsi que celles qui passent par $A, X, Z_1, Z_2, \dots, Z_i$ forment un système d'une infinité $(i-1)^{\text{uple}}$. Une courbe φ passant par $Z_1 Z_2 \dots Z_i$ et par i autres points de f , B_1, B_2, \dots, B_i rencontrera encore cette courbe en $m-i+1$ points Y . Si nous regardons les points A, B_1, B_2, \dots, B_i comme fixes, à chaque point X correspondront

$$\beta = (m-i+1) \cdot \xi(p, m-1, i-1)$$

points Y .

On pourrait déterminer par une suite d'applications successives du principe de correspondance le nombre α des points X qui correspondent à un point Y , ou bien, des courbes φ qui passent par les $i+1$ points donnés B_1, B_2, \dots, B_i et Y et par i points $Z_1 Z_2 \dots Z_i$ d'un groupe formé du point donné A et de $i+1$ points inconnus (les

points Z et X) qui ne compte que pour $i + 1$ conditions à la détermination des courbes φ passant par tous ses points; mais nous n'aurons pas besoin de déterminer ce nombre. En effet une partie des α courbes qu'on obtient en substituant, dans cette détermination des courbes φ , le point fixe A à Y donnent lieu à une espèce particulière de coïncidences de points X et Y . Les courbes φ qu'on trouve alors appartiendront elles-mêmes à l'infinité $(i - 1)^{\text{tuple}}$ de celles qui passent par A, Z_1, Z_2, \dots, Z_i , et un $(i + 2)^{\text{me}}$ point X , et ce dernier point pourra donc aussi bien que A être regardé comme le point, Y , à moins qu'il ne coïncide avec un des i points B_1, B_2, \dots, B_i . A l'exception des i . $\xi(p, m - 1, i - 1)$ cas où le groupe est déterminé par A et un des points B , on aura donc une coïncidence de X et Y . On obtient de cette façon

$$\alpha - i \cdot \xi(p, m - 1, i - 1)$$

coïncidences.

Nous chercherons ensuite les coïncidences dues aux p points doubles, par rapport auxquels les courbes φ ne sont pas adjointes. Si l'on place le point X sur l'une des deux branches d'un de ces points, D , le nombre $\xi(p, m - 1, i - 1)$ des groupes de points $Z_1 Z_2 \dots Z_i$ qui ne comptent avec A et X que pour $i + 1$ points donnés de φ se décomposera de la manière suivante:

1^o Les points $Z_1 \dots Z_i$ peuvent se trouver tous en des points différents de D . Alors les courbes φ qui passent par X auront aussi un point d'intersection fixe avec l'autre branche de ce point double, et elles satisferont à la condition d'être adjointes par rapport à ce point. Il en résulte que le nombre des groupes de cette nature est égal à $\xi(p - 1, m - 2, i - 1)$.

2^o Un des points Z peut coïncider avec le point double D sur l'autre branche, l'infinité $(i - 1)^{\text{tuple}}$ de courbes qui passent par $A, X, Z_1, Z_2, \dots, Z_i$ ayant une tangente fixe en D .

Il ne sera que les derniers groupes, au nombre de

$$\xi(p, m - 1, i - 1) - \xi(p - 1, m - 2, i - 1)$$

qui donneront lieu à des coïncidences de X et Y , les courbes φ qui passent par les points $Z_1 Z_2 \dots Z_i$ et $B_1 B_2 \dots B_i$ devant, dans ce cas, rencontrer aussi la branche où se trouve X en un point Y . On obtient ainsi

$$2p [\xi(p, m - 1, i - 1) - \xi(p - 1, m - 2, i - 1)]$$

coïncidences.

Les coïncidences qui restent encore auront lieu aux points des

$$\xi(p, m, i)$$

groupes de $i + 1$ points qui ne comptent que pour i à la détermination de l'infinité $2i^{\text{tuple}}$ des courbes φ . Par chacun des groupes

formés d'un point de coïncidence et des i points correspondants z passe, en effet, 1° un système $(i - 1)^{\text{tuple}}$ de courbes qui passent encore par le point fixe A , 2° une courbe passant par B_1, B_2, \dots, B_i qui n'appartient pas à ce système — car nous avons excepté déjà les cas où cette dernière courbe passe encore par A . — Les courbes passant par un des groupes trouvés de $i + 1$ points formeront donc un système linéaire i^{tuple} .

Le nombre de ces dernières coïncidences étant égal à

$$(i + 1) \xi(p, m, i),$$

on trouve, en exprimant que le nombre total des coïncidences est égal à $\alpha + \beta$, l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \alpha + (m - i + 1) \cdot \xi(p, m - 1, i - 1) \\ = & \alpha - i \xi(p, m - 1, i - 1) + 2p [\xi(p, m - 1, i - 1) - \xi(p - 1, m - 2, i - 1)] \\ & + (i + 1) \xi(p, m, i), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (2) \quad & (i + 1) \xi(p, m, i) \\ = & (m + 1 - 2p) \xi(p, m - 1, i - 1) + 2p \cdot \xi(p - 1, m - 2, i - 1). \end{aligned}$$

Sachant déjà (1) que

$$\xi(p, m, 1) = \binom{m + 1}{2} - p,$$

on peut en déduire successivement les expressions de

$$\xi(p, m, 2), \quad \xi(p, m, 3) \text{ etc.}$$

On trouve ensuite par induction l'expression de M. Brill*)

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi(p, m, i) &= \binom{m + 1}{i + 1} - \binom{p}{1} \binom{m - 1}{i - 1} + \binom{p}{2} \binom{m - 3}{i - 3} \cdots \\ &\dots \begin{cases} \pm \binom{\frac{p}{2}}{\frac{i - 1}{2}} \binom{m - i + 2}{2} \mp \binom{\frac{p}{2}}{\frac{i + 1}{2}} & (\text{pour } i \text{ impair}) \\ \pm \binom{\frac{p}{2}}{\frac{i}{2}} \binom{m - i + 1}{1} & (\text{pour } i \text{ pair}). \end{cases} \end{aligned} \right.$$

La formule (2) montre que (3) est juste pour une valeur quelconque de i si elle est juste pour $i - 1$. Il suffit, en effet, pour voir qu'identiquement

$$\begin{aligned} (i + 1) \sum (-1)^\lambda \binom{p}{\lambda} \binom{m - 2\lambda + 1}{i - 2\lambda + 1} &= (m + 1) \sum (-1)^\lambda \binom{p}{\lambda} \binom{m - 2\lambda}{i - 2\lambda} \\ &- 2p \sum (-1)^\lambda \binom{p}{\lambda} \binom{m - 2\lambda}{i - 2\lambda} + 2p \sum (-1)^\lambda \binom{p - 1}{\lambda} \binom{m - 2\lambda - 1}{i - 2\lambda}, \end{aligned}$$

de remarquer que dans les deux derniers termes

*) Mathematische Annalen Bd. XXXVI, p. 355.

$$p \binom{p}{\lambda} = (\lambda + 1) \binom{p}{\lambda + 1} + \lambda \binom{p}{\lambda},$$

et

$$p \binom{p-1}{\lambda} = (\lambda + 1) \binom{p}{\lambda + 1}.$$

On pourra donc écrire le dernier membre de la manière suivante

$$\sum (-1)^i \binom{p}{\lambda} \left[(m+1) \binom{m-2\lambda}{i-2\lambda} + 2\lambda \binom{m-2\lambda+2}{i-2\lambda+2} - 2\lambda \binom{m-2\lambda}{i-2\lambda} - 2\lambda \binom{m-2\lambda+1}{i-2\lambda+2} \right].$$

Il est donc égal à

$$\sum (-1)^i \binom{p}{\lambda} \binom{m-2\lambda}{i-2\lambda} \left[m+1 + 2\lambda \frac{(m-2\lambda+1)(m-2\lambda+2)}{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda+2)} - 2\lambda - 2\lambda \frac{(m-2\lambda+1)(m-i)}{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda+2)} \right],$$

qui se réduit sans difficulté à

$$(i+1) \sum (-1)^i \binom{p}{\lambda} \binom{m-2\lambda+1}{i-2\lambda+1}.$$

Or l'équation (3) est juste pour $i = 1$. Donc elle est juste pour toutes les valeurs de i .

Copenhague, 31. août 1891.