

Zur zweiten Variation bei isoperimetrischen Problemen.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Herr Kneser hat im 55. Band dieser Annalen einen strengen Beweis für die *Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung bei der einfachsten Klasse isoperimetrischer Aufgaben* gegeben, wobei jedoch die Frage in einem gewissen Ausnahmefall*) unentschieden bleibt.

Der Zweck der folgenden Note ist, zu zeigen, daß sich auch dieser *Ausnahmefall* einfach erledigen läßt mit Hilfe einer Methode, welche Herr H. A. Schwarz in seinen Vorlesungen**) für den analogen Beweis im Fall der einfachsten Aufgabe ohne Nebenbedingungen entwickelt hat.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, läßt sich folgendermaßen formulieren:

Es seien H_1, H_2, U drei im Intervall (t_0, t_1) reguläre Funktionen von t ; überdies sei in diesem Intervall $H_1 > 0$ und U nicht identisch Null; ferner bezeichne

$$\Psi(w) \equiv H_2 w - \frac{d}{dt} \left(H_1 \frac{dw}{dt} \right)$$

und es seien u, v Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$(1) \quad \Psi(u) = 0, \quad \Psi(v) = U$$

welche beide in t_0 verschwinden***):

*) Vgl. auch die Dissertation von Herrn Hormann, *Untersuchungen über die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide etc.*, Göttingen 1887, in welcher über die entsprechenden Untersuchungen von Weierstraß berichtet wird, und derselbe Ausnahmefall als noch unerledigt bezeichnet wird.

**) Die Methode ist mir aus einer Nachschrift von Herrn Dr. J. C. Fields der Vorlesung über Variationsrechnung vom Wintersemester 1898/99 bekannt; es ist dieselbe Methode, die von Herrn Sommerfeld auf Doppelintegrale ausgedehnt worden ist, Jahresber. d. Deutschen M. V., VIII, pag. 188.

***) Es ist bekannt, wie man solche Lösungen herstellen kann, sobald das allgemeine Integral der Eulerschen Differentialgleichung gefunden ist; vgl. Hormann l. c. und Kneser l. c.; die Funktionen u, v sind lineare Kombinationen der von Kneser mit A, B bezeichneten Funktionen.

$$(2) \quad u(t_0) = 0, \quad v(t_0) = 0,$$

endlich bezeichne:

$$m = \int_{t_0}^t u U dt, \quad n = \int_{t_0}^t v U dt,$$

$$\Delta(t) = mv - nu.$$

Es ist dann $\Delta(t_0) = 0$; sei t_0' der zunächst auf t_0 folgende Nullpunkt von $\Delta(t)$ (der zu t_0 *konjugierte Punkt*) und es werde angenommen, daß

$$(3) \quad t_0' < t_1.$$

Alsdann soll gezeigt werden: Man kann stets Funktionen w von t finden, welche in t_0 und t_1 verschwinden:

$$(4) \quad w(t_0) = 0, \quad w(t_1) = 0,$$

für welche

$$(5) \quad \int_{t_0}^{t_1} w U dt = 0$$

und für welche das Integral*)

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left(H_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + H_2 w^2 \right) dt$$

einen negativen Wert annimmt.

Dabei soll w selbst stetig sein im ganzen Intervalle (t_0, t_1) , $\frac{dw}{dt}$ soll abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten existieren und stetig sein, und auch in den Ausnahmepunkten sollen vordere und hintere Derivierte existieren und endlich sein.

Für den Fall, daß u und v nicht beide in t_0' verschwinden, hat Herr Kneser in der angegebenen Abhandlung den Beweis geführt, indem er zeigt, daß dann $\Delta(t)$ in t_0' zu ungerader Ordnung verschwindet, woraus sich nach einer von Weierstraß herrührenden Schlußweise das gewünschte Resultat ergibt.

Es bleibt noch der Ausnahmefall

$$(6) \quad u(t_0') = 0, \quad v(t_0') = 0$$

zu untersuchen.

Da

$$(7) \quad v \Psi(u) - u \Psi(v) = \frac{d}{dt} H_1(uv' - u'v),$$

*) Auf diese Form kann man bekanntlich, nach Weierstraß, im vorliegenden Fall die zweite Variation transformieren.

so folgt*) aus (1) und (2)

$$(8) \quad H_1(uv' - u'v) = -m.$$

Daraus folgt aber, daß unter der gegenwärtigen Annahme (6) auch:

$$(9) \quad m(t_0') = \int_{t_0}^{t_0'} u U dt = 0.$$

Wählt man daher

$$\begin{aligned} w &= u & \text{in } (t_0, t_0'), \\ w &= 0 & \text{in } (t_0', t_1), \end{aligned}$$

so genügt w den Bedingungen (4) und (5) und macht $J_2 = 0$; denn bezeichnen allgemein $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ die Unstetigkeitsstellen von $\frac{dw}{dt}$, so läßt sich J_2 durch partielle Integration auf die Form bringen:

$$(10) \quad J_2 = \sum_{v=1}^n \left[H_1 w \frac{dw}{dt} \right]_{\tau_v+0}^{\tau_v-0} + \int_{t_0}^{t_1} w \Psi(w) dt,$$

was im vorliegenden Fall $J_2 = 0$ liefert.

Um nun eine Funktion zu erhalten, welche J_2 negativ macht, wählen wir nach dem Vorgang von Herrn Schwarz für w eine nur wenig von der obigen abweichende Funktion, nämlich:

$$(11) \quad \begin{aligned} w &= u + \kappa \omega & \text{in } (t_0, t_0'), \\ w &= \kappa \omega & \text{in } (t_0', t_1), \end{aligned}$$

wobei κ eine kleine Konstante ist, und ω eine Funktion von t , welche den folgenden Bedingungen genügt:

1) ω ist stetig mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen in (t_0, t_1) ;

2) $\omega(t_0) = 0, \quad \omega(t_1) = 0$;

3) $\omega(t_0') \neq 0$;

$$4) \quad \int_{t_0}^{t_1} \omega U dt = 0.$$

Die so definierte Funktion w erfüllt die Bedingungen (4) und (5); sie ist selbst stetig, ihre erste Ableitung dagegen erleidet einen Sprung an der Stelle t_0' . Man hat daher bei Anwendung der Formel (10) das von der Unstetigkeit herrührende Glied zu berücksichtigen**) und erhält nach einer einfachen Rechnung, bei der von der Identität

*) Vgl. Kneser, l. c. Gleichung (22); die Accente bezeichnen Ableitung nach t .

**) Es ist dabei noch zu beachten, daß eine Unstetigkeit der betrachteten Art auf die erste Variation und auf die Umformung der zweiten Variation in die Weierstraßsche Form wegen der Stetigkeit von w ohne Einfluß ist.

$$u\Psi(\omega) - \omega\Psi(u) = \frac{d}{dt} H_1(\omega u' - \omega' u)$$

Gebrauch zu machen ist, ganz wie in dem von Herrn Schwarz behandelten Fall, das Resultat:

$$(12) \quad J_2 = 2u H_1 \omega \left. \frac{du}{dt} \right|_{t_0'} + u^2 V,$$

wo V eine endliche Größe ist.

Nun sind aber H_1 und ω nach Annahme in t_0' von Null verschieden, ebenso $\frac{du}{dt}$, weil $u(t_0') = 0$ und t_0' eine nichtsinguläre Stelle für die Differentialgleichung $\Psi(u) = 0$ ist. Daraus folgt aber, daß man durch passende Wahl von u das Integral J_2 negativ machen kann.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß man stets eine den vier obigen Bedingungen genügende Funktion ω bestimmen kann. Es sei ω_1 irgend eine den drei ersten Bedingungen genügende Funktion, z. B. $\omega_1 = (t-t_0)(t-t_1)$; sollte dieselbe zufällig auch der vierten genügen, so ist $\omega = \omega_1$ eine brauchbare Funktion. Im allgemeinen wird aber das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega_1 U dt = C_1$$

von Null verschieden sein; in diesem Fall wähle man eine zweite Funktion ω_2 folgendermaßen: Nach den über U gemachten Annahmen kann man stets ein Teilintervall (τ', τ'') von (t_0, t_1) finden, in welchem $U \neq 0$; alsdann setze man

$$\omega_2 = (t-\tau')^3 (\tau''-t)^3 (t-t_0')^2$$

in (τ', τ'') und $\omega_2 \equiv 0$ außerhalb (τ', τ'') ; dann ist sicher das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega_2 U dt = C_2$$

von Null verschieden. Daraus folgt aber, daß die Funktion

$$\omega = C_2 \omega_1 - C_1 \omega_2$$

allen oben aufgestellten Bedingungen genügt.

Somit kann auch in dem hier betrachteten Ausnahmefall ein Minimum über den zu t_0 konjugierten Punkt hinaus nicht bestehen.

University of Chicago, den 27. Februar 1902.