

Über das Produkt zweier Zylinderfunktionen.

Von Niels Nielsen in Kopenhagen.

F. E. Neumann¹⁾ hat bekanntlich zuerst bewiesen, daß das Produkt zweier willkürlicher Kugelfunktionen einer homogenen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung Genüge leistet; ein ähnliches Resultat habe ich²⁾ für das Produkt zweier willkürlicher Zylinderfunktionen gefunden.

Es liegt auf der Hand, daß man die von mir gefundene Differentialgleichung auch durch eine mit der Neumannschen ähnliche Methode herleiten kann. Da dies Verfahren auf verschiedene neue Eigenschaften der Zylinderfunktionen führt, wollen wir dasselbe hier kurz auseinandersetzen.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit C und C_1 willkürliche Zylinderfunktionen³⁾ und setzen der Kürze halber

$$(1) \quad u = C^v(\alpha x), \quad v = C_1^v(\beta x) \quad y = u \cdot v,$$

wo α und β willkürliche von Null verschiedene endliche Größen bedeuten; die beiden zugehörigen Besselschen Differentialgleichungen

$$(2) \quad u^{(2)} + \frac{1}{x} u^{(1)} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) u = 0$$

$$(3) \quad v^{(2)} + \frac{1}{x} v^{(1)} + \left(\beta^2 - \frac{\rho^2}{x^2} \right) v = 0$$

ergeben dann ohne Mühe die folgende Identität:

$$(4) \quad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\nu^2 + \rho^2}{x^2} \right) y = 2 u^{(1)} \cdot v^{(1)}.$$

Differentiert man nun nach x die Formel (4), so ergibt sich vermöge (2), (3) und (4) die andere Identität

¹⁾ Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, p. 94; Leipzig 1878.

²⁾ Nouvelles Annales (4) Bd. 2, p. 396–410; 1902. Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 144, 1904.

³⁾ Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 1, 27.

$$(5) \quad \begin{cases} y^{(3)} + \frac{3}{x} y^{(2)} + \left(3\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1 - 3\nu^2 - \rho^2}{x^2} \right) y^{(1)} + \\ + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{x} y = 2 \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\rho^2 - \nu^2}{x^2} \right) u^{(1)} \cdot v, \end{cases}$$

woraus, indem man speziell $\alpha = \beta = 1$ und $\rho = \nu$ einführt, für die Funktion

$$(6) \quad y = C^\nu(x) \cdot C_1^\nu(x)$$

die homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(7) \quad y^{(3)} + \frac{3}{x} y^{(2)} + \left(4 + \frac{1 - 4\nu^2}{x^2} \right) y^{(1)} + \frac{4}{x} y = 0.$$

Differentiieren wir aber noch einmal nach x die Identität (5), so kommt wegen (2) rechter Hand eine homogene lineare Verbindung der beiden Produkte $u^{(1)} \cdot v$ und $u^{(1)} \cdot v^{(1)}$, welche vermöge (4) und (5) eliminiert werden kann, und somit haben wir den folgenden allgemeinen Satz bewiesen:

Das Produkt zweier willkürlicher Zylinderfunktionen:

$$y = C^\nu(\alpha x) \cdot C_1^\nu(\beta x)$$

genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung.

Diese Differentialgleichung wird indessen in dieser Allgemeinheit so kompliziert, daß sie ganz sicher nur ein theoretisches Interesse darbietet. Wir verzichten daher im allgemeinen Falle auf die detaillierte Durchführung der oben angedeuteten Rechnungen, sondern wollen vielmehr zwei Spezialfälle näher untersuchen.

1. Die Annahme $\alpha = \beta = 1$ gibt in der oben angedeuteten Weise für das Produkt

$$y = C^\nu(x) C^\nu(x)$$

die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(8) \quad \begin{cases} y^{(4)} + \frac{6}{x} y^{(3)} + \left(4 + \frac{7 - 2\nu^2 - 2\rho^2}{x^2} \right) y^{(2)} + \\ + \left(\frac{16}{x} + \frac{1 - 2\nu^2 - 2\rho^2}{x^3} \right) y^{(1)} + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{(\nu^2 - \rho^2)^2}{x^4} \right) y = 0. \end{cases}$$

2. Setzt man noch $\nu = \rho$, so gibt dasselbe Verfahren für die Funktion

$$y = C^\nu(\alpha x) \cdot C_1^\nu(\beta x)$$

die Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(9) \quad \begin{cases} y^{(4)} + \frac{4}{x} y^{(3)} + \left(2(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1 - 4\nu^2}{x^2} \right) y^{(2)} + \\ + \left(\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)}{x} - \frac{1 - 4\nu^2}{x^3} \right) y^{(1)} + (\alpha^2 - \beta^2)^2 y = 0, \end{cases}$$

die ganz sicher in dieser Allgemeinheit neu ist. Bekannt ist, soviel ich weiß, nur der Fall $\alpha = 1, \beta = i$, d. h. die Gleichung

$$(10) \quad y^{(4)} + \frac{4}{x} y^{(3)} + \frac{1-4\nu^2}{x^2} y^{(2)} - \frac{1-4\nu^2}{x^3} y^{(1)} + 4y = 0,$$

die ich neuerdings in ganz anderer Weise gefunden habe.¹⁾

Führt man nun in (10) die Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k \cdot x^{c+4k}$$

ein, so findet man die Rekursionsformel

$$(\rho + 4k)(\rho + 4k - 2)(\rho + 4k - 2\nu)(\rho + 4k + 2\nu)c_k = -4c_{k-1}$$

und für den Exponent ρ die Werte

$$\rho = 0, \rho = 2, \rho = 2\nu, \rho = -2\nu,$$

woraus unmittelbar die Reihenentwicklungen

$$(11) \quad J^\nu(x) J^\nu(ix) = i^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+4s}}{s! \Gamma(\nu+s+1) \Gamma(\nu+2s+1)}$$

und

$$(11 \text{ bis}) \quad \begin{cases} i^\nu J^\nu(x) J^{-\nu}(ix) = \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)! \Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)} \\ - \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)! \Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)}, \end{cases}$$

die ich auch in der soeben zitierten Abhandlung in ganz anderer Weise hergeleitet habe (die alternierenden Zeichen sind dort irrthümlicherweise weggelassen).

Die Differentialgleichung (9) enthält indessen noch einen interessanten Spezialfall; setzt man in der Tat $\alpha = \beta = 1$, so entfließt für die Funktion

$$(12) \quad y = D_x (C^\nu(x) \cdot C_1^\nu(x))$$

die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(13) \quad y^{(3)} + \frac{4}{x} y^{(2)} + \left(4 + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\right) y^{(1)} + \left(\frac{8}{x} - \frac{1-4\nu^2}{x^3}\right) y = 0.$$

¹⁾ Rendiconti della Real. Accad. dei Lincei, Bd. 15, 6. Mai 1906.

Um die Funktion (12) in einfacherer Form darstellen zu können, gehen wir von der Fundamentalgleichung

$$2 D_x C^\nu(x) = C^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x)$$

aus und erhalten somit

$$(14) \left\{ \begin{aligned} 2 D_x (C^\nu(x) \cdot C_1^\nu(x)) &= C^\nu(x) (C_1^{\nu-1}(x) - C_1^{\nu+1}(x)) + \\ &+ C_1^\nu(x) (C^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x)); \end{aligned} \right.$$

nun ist aber vermöge der Lommelschen Fundamentalformel ¹⁾

$$C^\nu(x) C^{\nu-1}(x) - C^{\nu-1}(x) C_1^\nu(x) = \frac{f(\nu)}{x},$$

wo $f(\nu)$ eine in ν periodische Funktion mit der additiven Periode $+1$ bedeutet, also $f(\nu+1) = f(\nu)$, woraus

$$C^\nu(x) C_1^{\nu-1}(x) + C^{\nu-1}(x) C_1^\nu(x) = \frac{f(\nu)}{x} + 2 C^{\nu-1}(x) C_1^\nu(x).$$

Nach diesen Erörterungen ergibt sich dann aus (14) der gesuchte Ausdruck

$$(15) \left\{ \begin{aligned} D_x (C^\nu(x) \cdot C_1^\nu(x)) &= C^\nu(x) C_1^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x) C_1^\nu(x) = \\ &= C^{\nu-1}(x) C_1^\nu(x) - C^\nu(x) C_1^{\nu+1}(x), \end{aligned} \right.$$

welcher ja mit dem folgenden

$$D_x (C^\nu(x))^2 = C^\nu(x) C^{\nu-1}(x) - C^\nu(x) C^{\nu+1}(x)$$

ganz analog ist.

Setzt man noch in (13)

$$z = x^{-\alpha} y,$$

und führt man endlich px statt x als unabhängige Variable ein, so kommt der folgende Satz, der ganz sicher neu ist:

Die Funktion

$$(16) \quad y = x^\alpha (C_1^{\nu-1}(px) C^\nu(px) - C_1^\nu(px) C^{\nu+1}(px)),$$

wo C und C_1 willkürliche Zylinderfunktionen bezeichnen, liefert immer drei voneinander linear unabhängigen partikulären Integrale der Differentialgleichung

$$(17) \left\{ \begin{aligned} y^{(3)} + \frac{4-3\alpha}{x} y^{(2)} + \left(4p^2 + \frac{1-4\nu^2+\alpha(3\alpha-5)}{x^2} \right) y^{(1)} + \\ + \left(\frac{(8-4\alpha)p^2}{x} - \frac{(\alpha+1)((\alpha-1)^2-\nu^2)}{x^3} \right) y = 0. \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 22, 42.

Die Differentialgleichung (17) fordert zur Vergleichung mit derjenigen für das bestimmte Integral

$$x^{-\omega} \mathfrak{S}(xy) = \int_0^{\infty} J^{\nu}(tx) t^{\rho} (t^2 + y^2)^{\sigma} dt, \quad \omega = 1 + \rho + 2\sigma$$

gefundenen Differentialgleichung ¹⁾

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}^{(3)}(x) + \frac{3-2\omega}{x} \mathfrak{S}^{(2)}(x) + \\ + \frac{\omega-1)^2 - \nu^2}{x^2} \mathfrak{S}^{(1)}(x) + \frac{2\sigma}{x} \mathfrak{S}(x) = 0 \end{array} \right.$$

auf; setzt man in der Tat in (17) a statt ν , so werden die beiden Gleichungen (17) und (18) unter den folgenden Bedingungen

$$p = \frac{i}{2}, \quad 4 - 3\sigma = 3 - 2\omega, \quad (\omega - 1)^2 - \nu^2 = 1 - 4a^2 + \alpha(3\alpha - 5)$$

$$\alpha - 2 = 2\sigma, \quad (\alpha + 1)((\alpha - 1)^2 - 4a^2) = 0$$

identisch.

Aus der letzten dieser Gleichungen findet man

$$(19) \quad \alpha = -1, \quad \omega = -2, \quad \sigma = -\frac{3}{2}, \quad \rho = 0, \quad \nu = 2a,$$

während die Annahmen $\alpha - 1 = \pm 2a$ kein besonderes Interesse darbieten.

Mit den Wertbestimmungen (19) findet man dann eine Identität von dieser Form

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{J^{2\nu}(tx) dt}{(t^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ & = \frac{x}{y} \cdot D_{\xi} \left(c_1 (J^{\nu}(\xi))^2 + c_2 (J^{-\nu}(\xi))^2 + c_3 J^{\nu}(\xi) J^{-\nu}(\xi) \right)_{\xi = \frac{xy}{2}} \end{aligned}$$

wo das Integral linker Hand einen Sinn hat, falls $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ und x reell und nicht negativ angenommen wird, während die drei Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 sowohl von x als von y unabhängig sind.

Um die Koeffizienten c zu bestimmen, bemerken wir zuerst, daß die Punktformel²⁾

$$J^{\nu}(x) J^{\rho}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\rho+2s}}{\Gamma(\nu+s+1) \Gamma(\rho+s+1)} \cdot \binom{\nu+\rho+2s}{s}$$

ohne weiteres die beiden Reihenentwicklungen

¹⁾ ²⁾ Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 211, 20.

$$D_x(J^\nu(x))^2 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2s-1}}{\Gamma(\nu+s)\Gamma(\nu+s+1)} \cdot \binom{2\nu+2s}{s}$$

$$D_x(J^\nu(x)J^{-\nu}(x)) = - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s+\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma(s+2+\nu)\Gamma(s+2-\nu)} \cdot \binom{2s+2}{s+1}$$

liefert.

Setzt man demnach in (20) $y=0$, so findet man ein bestimmtes Resultat, falls $\Re(\nu) > 1$ angenommen wird; es ergibt sich dann unmittelbar $c_2 = 0$ und für $x = 1^1$)

$$= \frac{i c_3}{2\Gamma(2+\nu)\Gamma(2-\nu)} = \int_0^\infty J^{2\nu}(t) t^{-3} dt = \frac{\Gamma(\nu-1)}{8\Gamma(2+\nu)},$$

woraus nach einer leichten Reduktion

$$c_3 = - \frac{\pi i}{4 \sin \nu \pi}.$$

Multipliziert man weiter durch $x^{-2\nu}$ die beiden Seiten von (20), so gibt die Annahme $x=0$ ein bestimmtes Resultat, falls $1 > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ angenommen wird; setzt man noch $y=1$, so kommt ²⁾

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{i}{4}\right)^{2\nu-1} c_1}{2\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} = \\ & = \frac{2^{-2\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \cdot \int_0^\infty \frac{t^{2\nu} dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{-2\nu-1} \Gamma(1-\nu) \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu+1) \Gamma(3)}, \end{aligned}$$

woraus

$$c_1 = \frac{\pi \cdot i^{1-2\nu}}{4 \sin \nu \pi},$$

und somit ergibt sich endlich die gesuchte Integraldarstellung

$$(21) \quad \int_0^\infty \frac{J^{2\nu}(tx) dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi x i}{4 y \sin \nu \pi} \cdot D_\xi \left(e^{-\nu \pi i} (J^\nu(\xi))^2 - J^\nu(\xi) J^{-\nu}(\xi) \right)_\xi = \frac{x y i}{2}$$

Will man noch den Ausdruck rechter Hand etwas einfacher schreiben, so kann dies unter Zuhilfenahme der Hankelschen Funktion ³⁾

^{1) 2) 3)} Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 188, 374, 16.

$$H_1^\nu(x) = \frac{i}{\sin \nu \pi} \left(e^{-\nu \pi i} J^\nu(x) - J^{-\nu}(x) \right)$$

geschehen; man findet in der That

$$(22) \quad \int_0^\infty \frac{J^{2\nu}(tx) dt}{(t^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi x}{4y} \cdot D_\xi \left(J^\nu(\xi) H_1^\nu(\xi) \right)_{\xi = \frac{xyi}{2}},$$

woraus unter Anwendung der Differentialformel (15):

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{J^{2\nu}(tx) dt}{(t^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \\ & = \frac{\pi x}{4y} \left(J^{\nu-1} \left(\frac{xyi}{2} \right) H_1^\nu \left(\frac{xyi}{2} \right) - J^\nu \left(\frac{xyi}{2} \right) H_1^{\nu+1} \left(\frac{xyi}{2} \right) \right). \end{aligned} \right.$$
