ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 2503.

Ueber die allgemeine Form der Integrale des Dreikörperproblems.

Von Dr. *And. Lindstedt.*

In dem folgenden Aufsatze wage ich den Versuch, über die allgemeine Form der Integrale des Störungsproblems einen Schluss zu ziehen. In einem späteren Aufsatz werde ich, von dem hier gewonnenen Resultate ausgehend, eine Methode angeben, durch welche man im Stande sein wird, dieselben in bequemer Weise wirklich aufzustellen.

Zu dem Ende wird es zuvörderst nothwendig sein, über Integrale von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (m^2 - 2\psi_1)\,x = 0 \tag{1}$$

wo ψ_1 ein Aggregat rein periodischer Functionen von t vorstellt, sowie von simultanen Gleichungen derselben Gattung, einige Betrachtungen anzustellen.

Zunächst wollen wir den einfachen Fall

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [m^2 - 2\beta\cos(\lambda t + b)]\; x = 0 \tag{2}$$

behandeln; m, β, λ und b bedeuten in dieser Gleichung Constanten. Was die numerischen Werthe von m und β betrifft, so wollen wir uns weiter vorstellen, dass m mit der mittleren Bewegung und β mit der Excentricität eines Planeten vergleichbar sind. Ueber λ machen wir vorläufig keine Annahme.

Nach den früher (Astr. Nachr. Nr. 2465 und 2482) angedeuteten Principien schreiben wir nun, um die Form des Integrals zu erkennen, anstatt (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = 2\beta\cos(\lambda t + b)\,x$$

und setzen rechts $x = \eta_0\cos(mt + \pi)$, wo η_0 und π die beiden Integrationsconstanten bedeuten. Die Integration liefert darauf als erste Approximation

$$x_1 = \eta_0\cos w + \frac{\beta\eta_0}{m^2 - (m+\lambda)^2}\cdot\cos(w + \lambda t + b) + \\ + \frac{\beta\eta_0}{m^2 - (m-\lambda)^2}\cdot\cos(w - \lambda t - b)$$

Um eine zweite Approximation zu erlangen, schreiben wir die obige Gleichung, indem wir eine zur Verfügung stehende Constante ν einführen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2(1-\nu)\,x = -m^2\nu x + 2\beta\cos(\lambda t + b)\,x$$

und setzen rechts $x = x_1$. Darauf wird ν so gewählt, dass rechts kein Glied in $\cos w$ auftritt und integrirt. Die zweite Annäherung wird alsdann

$$\begin{aligned} x_2 = \eta_0\cos w &+ \frac{\beta\eta_0}{m^2 - (m+\lambda)^2}\cdot\cos[w + (\lambda t + b)] \\ &+ \frac{\beta\eta_0}{m^2 - (m-\lambda)^2}\cdot\cos[w - (\lambda t + b)] \\ &+ \frac{\beta^2\eta_0}{[m^2 - (m+\lambda)^2]\,[m^2 - (m+2\lambda)^2]}\cdot\cos(w + 2(\lambda t + b)] \\ &+ \frac{\beta^2\eta_0}{[m^2 - (m-\lambda)^2]\,[m^2 - (m-2\lambda)^2]}\cdot\cos(w - 2(\lambda t + b)] \end{aligned}$$

Es bedeutet hier

$$w = m(1-\sigma)\,t + \pi$$
$$1 - \sigma = \sqrt{1-\nu}$$
$$\sigma = {}^1\!/\!_2\,\nu = -\frac{\beta^2}{m^2(\lambda^2 - 4m^2)}$$

Man ersieht hieraus, dass wenn die Operationen fortgesetzt werden, so dass in σ sowohl als in den Coefficienten des Integrals immer höhere Potenzen von β berücksichtigt werden, das allgemeine Integral von (2) die Form

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i\cos[w + i(\lambda t + b)] \tag{3}$$

besitzt. Die Integrationsconstante η_0 ist hier offenbar μ_0; weiter sehen wir, dass η_0 (oder μ_0) in allen Coefficienten in der ersten Potenz als Factor auftritt. Wollte man die Coefficienten numerisch berechnen, so hat man am Bequemsten den Ausdruck (3) in die Gleichung (2) einzusetzen. Schreiben wir zu dem Ende der Kürze wegen

$$w = m(1-\sigma)t+\pi = nt+\pi$$

so bekommt man folgendes System von Gleichungen

$$\mu_i[m^2-(n+i\lambda)^2] = \beta(\mu_{i-1}+\mu_{i+1}) \tag{4}$$

worin n und die μ_i, mit Ausnahme von $\mu_0 = \eta_0 =$ Integrationsconstante, die Unbekannten sind.

Wie dieses System aufzulösen ist, werde ich an einer anderen Stelle zeigen. Es genügt hier zu sehen, dass keiner von den Coefficienten für μ_i Null werden kann, d. h. es kommt im Allgemeinen kein seculares Glied vor. Nur wenn n einen solchen Werth erlangt, dass für ein gewisses i $m^2-(n+i\lambda)^2 = 0$, wenn also λ mit m und n durch eine von den Gleichungen

$$\lambda = \frac{\sigma m}{i}$$
$$\lambda = \frac{(\sigma-2)m}{i}$$

verbunden ist, wird ein solches Glied entstehen, also jedenfalls nicht, wenn λ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von n gesetzt wird.

Man kann sich nun in entsprechender Weise überzeugen, dass dasselbe von der allgemeineren Differentialgleichung (1) gilt. Schreiben wir

$$\psi_1 = \beta_1\cos(\lambda_1 t+b_1)+\beta_2\cos(\lambda_2 t+b_2)+\cdots$$

so sieht man sofort, dass das Integral, indem wir der Kürze wegen die Constanten b_1, b_2, $\cdots$ fortlassen, aus Gliedern besteht, von denen jedes einzelne die Form hat

$$\mu_{i_1,i_2\ldots}\cos[w+i_1\lambda_1 t+i_2\lambda_2 t+\cdots]$$

worin i_1 i_2 $\cdots$ alle ganzen Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ bedeuten können, und w ein neu hinzutretendes Argument, von derselben Natur wie oben, also $w = nt+\pi = m(1-\sigma)t+\pi$, bedeutet. Die zweite Integrationsconstante ist offenbar $\mu_{0,0\ldots}$ Man sieht weiter, dass alle die μ diese Integrationsconstante als Factor und zwar in der ersten Potenz enthalten, und dass kein seculares Glied auftreten kann, es sei denn für irgend ein System von ganzen Zahlen i_1, i_2, $\cdots$

$$m^2-[n+i_1\lambda_1+i_2\lambda_2+\cdots]^2 = 0$$

also immerhin nicht, wenn die λ gleich ganzzahligen Vielfachen von n sind.

Das hier in Bezug auf die Gleichung (2) und noch mehr die Gleichung (1) gewonnene Resultat war bisher nicht bekannt,*) und dies wird wohl der Grund gewesen sein, weshalb man früher nicht auf die unten folgenden Betrachtungen gekommen ist. Ich bemerke noch, dass die obigen Schlussfolgerungen nicht direct für die noch allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}+[m^2-2\psi_1]x = \psi_0+\psi_2x^2+\psi_3x^3+\cdots$$

gelten, aber sehr leicht dahin abgeändert werden können. Indessen hat dies für den gegenwärtigen Zweck keine Bedeutung.

Ich gehe jetzt zur Betrachtung eines simultanen Systems von Differentialgleichungen über, und zwar wird es ausreichend sein, das folgende

$$\frac{d^2x}{dt^2}+[m^2-2\beta\cos\lambda t]x = (\alpha'_0+2\alpha'\cos\mu' t)x'$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2}+[m'^2-2\beta'\cos\lambda' t]x' = (\alpha_0+2\alpha\cos\mu t)x$$

ins Auge zu fassen.

Setzen wir dem Früheren gemäss

$$w = m(1-\sigma)t+\pi$$
$$w' = m'(1-\sigma')t+\pi'$$

wo π und π' nebst η_0 und η_0' die vier Integrationsconstanten bedeuten, so ergiebt sich, wenn

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x = 2\beta\cos\lambda t.x+(\alpha'_0+2\alpha'\cos\mu' t)x'$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2}+m'^2x' = 2\beta'\cos\lambda' t.x'+(\alpha_0+2\alpha\cos\mu t)x$$

geschrieben und die rechten Seiten mit

$$x = \eta_0\cos w \quad x' = \eta'_0\cos w'$$

berechnet werden, wobei in der ersten Approximation

$$\sigma = 0 \quad \sigma' = 0$$

zu setzen ist, nach Integration die erste Annäherung

$$x_1 = \eta_0\cos w+\frac{\beta\eta_0}{m^2-(m+\lambda)^2}\cos(w+\lambda t)$$
$$+\frac{\beta\eta_0}{m^2-(m-\lambda)^2}\cos(w-\lambda t)$$
$$+\frac{\alpha'_0\eta'_0}{m^2-m'^2}\cos w'+\frac{\alpha'\eta'_0}{m^2-(m'+\mu')^2}\cos(w'+\mu' t)$$
$$+\frac{\alpha'\eta'_0}{m^2-(m'-\mu')^2}\cos(w'-\mu' t)$$

*) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Auflage, Bd. I, pag. 404 u. folg.

und ähnlich für x'_1, wenn die Buchstaben in passender Weise vertauscht werden. Für die zweite Annäherung haben wir zu schreiben

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + m^2(1-v)x &= -m^2vx + \\ &+ 2\beta\cos\lambda t . x + (\alpha'_0 + 2\alpha'\cos\mu' t)x' \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + m'^2(1-v')x' &= -m'^2v'x' + \\ &+ 2\beta'\cos\lambda' t . x' + (\alpha_0 + 2\alpha\cos\mu t)x\end{aligned}$$

Hierauf wird rechts

$$x = x_1 \text{ und } x' = x'_1$$

eingesetzt. Dabei werden in der untersten Gleichung Glieder in $\cos w$, in der zweiten Glieder in $\cos w'$ entstehen. Um dieselben zum Verschwinden zu bringen, bestimmt man v und v' aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{m^2}\Big[\beta^2\Big(\frac{1}{m^2-(m+\lambda)^2} + \frac{1}{m^2-(m-\lambda)^2}\Big) + \frac{\alpha_0\alpha'_0}{m'^2-m^2} + \\ &+ \alpha\alpha'\Big(\frac{1}{m'^2-(m+\mu)^2} + \frac{1}{m'^2-(m-\mu)^2}\Big)\Big] \\ v' &= \frac{1}{m'^2}\Big[\beta'^2\Big(\frac{1}{m'^2-(m'+\lambda')^2} + \frac{1}{m'^2-(m'-\lambda')^2}\Big) + \frac{\alpha'_0\alpha_0}{m^2-m'^2} + \\ &+ \alpha'\alpha\Big(\frac{1}{m^2-(m'+\mu')^2} + \frac{1}{m^2-(m'-\mu')^2}\Big)\Big]\end{aligned}$$

die sich leicht vereinfachen lassen. Hierauf werden σ und σ' mit Hülfe der Relationen:

$$\begin{aligned}1-\sigma &= \sqrt{1-v} \\ 1-\sigma' &= \sqrt{1-v'}\end{aligned}$$

also

$$\sigma = {}^1/_2 v \qquad \sigma' = {}^1/_2 v'$$

berechnet. Die darauf folgende Integration liefert die zweite Annäherung; es erscheint indessen überflüssig, dieselbe hier anzuführen.

Setzt man die Approximation in derselben Weise fort, so kommt man zu dem Resultate, dass die Integrale der beiden vorgelegten simultanen Differentialgleichungen folgendes Aussehen haben:

$$\begin{aligned}x &= \sum \mu_{ii'jj'}\cos[w + i\lambda t + i'\lambda' t + j\mu t + j'\mu' t] + \\ &+ \sum \mu'_{ii'jj'}\cos[w' + i\lambda t + i'\lambda' t + j\mu t + j'\mu' t] \\ x' &= \sum v'_{ii'jj'}\cos[w' + i\lambda t + i'\lambda' t + j\mu t + j'\mu' t] + \\ &+ \sum v_{ii'jj'}\cos[w + i\lambda t + i'\lambda' t + j\mu t + j'\mu' t]\end{aligned}$$

wo

$$\mu_{0,0,0,0} = \eta_0 \qquad v'_{0,0,0,0} = \eta'_0$$

und die in w und w' eingehenden π und π' die Integrationsconstanten sind. Die i, i', j und j' bedeuten alle ganzen Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$. Weiter ist hervorzuheben, dass die μ und v alle den Factor η_0 und die μ' und v' alle den Factor η'_0 und zwar nur in der ersten Potenz enthalten.

Offenbar lässt sich nun das hier Gesagte ohne Weiteres auf ein System beliebig vieler Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + m^2_i x_i = \sum \psi_i . x_i$$

wo die ψ_i ausser Constanten nur periodische Glieder enthalten, anwenden. Vor allen Dingen ist aber zu bemerken, dass wenn die Argumente in den ψ_i, den Perioden nach, mit den w_i zusammenfallen, keine secularen Glieder zum Vorschein kommen können. Am einfachsten überzeugt man sich hiervon durch directe Substitution in die gegebenen Differentialgleichungen. Es wird dabei ersichtlich, dass keiner von den Coefficienten unendlich gross werden kann.

Ehe ich weiter gehe, erlaube ich mir noch eine Bemerkung zu machen. Der Fall nämlich, dass in (2)

$$\lambda = i n = i m(1-\sigma)$$

gesetzt wird, kommt in der Theorie der Schwingungen von Membranen elliptischer Form vor, und ist — Vgl. Heine, a. a. O. — der einzige Fall, der bisher allgemein und zwar durch Substitution einer trigonometrischen Reihe von dem Argumente λt mit unbestimmten Coefficienten integrirt worden ist. In dem genannten Problem wird nun, allgemein zu reden, λ und also auch n als bekannt vorausgesetzt, und man sucht diejenigen Werthe von m, welche der Anforderung, dass $\lambda = 2n$ ist, genügen. Man erhält alsdann unendlich viele solche discret vertheilte Werthe von m. In den folgenden Problemen ist die Aufgabe gewissermaassen umgekehrt. Die Grösse m^2 soll als bekannt angenommen werden, und man sucht eine Lösung, für welche $n = \lambda$ sein wird. Scheinbar treten dabei ebenfalls unendlich viele Lösungen auf. Zufolge der Natur des Problems reduciren dieselben sich jedoch, wie es sein soll, auf eine einzige. Im vorigen Falle sucht man alle die Differentialgleichungen, welchen eine gewisse Form des Integrals genügt, im zweiten Fall soll die Differentialgleichung als gegeben angesehen werden.

Ich gehe nun zu einigen Betrachtungen des Zweikörperproblems über.

Schreiben wir der Kürze wegen

$$\frac{\mu}{r^3} = \frac{k^2(M+m)}{r^3} = \Psi$$

so sind die Gleichungen für die relative Bewegung der Masse m um M

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Psi . x = 0$$

und ähnliche, wenn x gegen y und z vertauscht sind. Die Integrale dieser Differentialgleichungen sind bekannt und lassen sich als trigonometrische Reihen eines einzigen Arguments nt darstellen.

Wir wollen nun, um das Folgende recht zu verstehen, annehmen, dass man nicht im Stande wäre, auf einem directen Wege zu den Integralen zu gelangen. Man hat dann, um das Princip der indirecten Methoden allgemein anzugeben, über die Form der Integrale eine Voraussetzung zu machen, die aus der Natur des Problems gefolgert werden kann. Wenn dann bei der Substitution einer solchen Form in die gegebenen Differentialgleichungen und bei der folgenden Bestimmung der Coefficienten ein wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Integrationsconstanten beständig convergirendes Integral mit der erforderlichen Anzahl der Integrationsconstanten herauskommt, so kann man sicher sein, das Ziel erreicht zu haben.

Die Differentialgleichungen des Problems der zwei Körper zeigen nun, dass in Bezug auf x, y und z eine vollständige Symmetrie herrscht, und da wir weiter durch Beobachtungen überzeugt sind, dass die Bewegung periodischer Natur ist, so wird es klar, dass wenn wir für die eine Coordinate z. B. x eine trigonometrische Reihe aus Sinus und Cosinus eines einzigen Arguments annehmen, dasselbe auch für y und z gelten muss, und zwar, dass das Argument in allen drei Variablen dasselbe sein wird. Es folgt hieraus, dass auch für r, das gleich $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist, eine ebensolche Entwickelung erhalten werden muss, wenigstens, wie gesagt, innerhalb gewisser Grenzen der Werthe der Integrationsconstanten. Setzen wir demgemäss

$$\frac{\mu}{r^3} = a_0 + a_1 \cos nt + a_2 \cos 2nt + \cdots$$
$$+ b_1 \sin nt + b_2 \sin 2nt + \cdots$$

wo die a_i, b_i und n noch unbekannte Functionen der Integrationsconstanten sind, so folgt sofort aus den obigen Betrachtungen, dass z. B. für x ein Ausdruck folgender Form

$$x = A_0 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \lambda_i \cos[\alpha_0 + (i+1)nt] +$$
$$+ A_0 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \lambda'_i \sin[\alpha_0 + (i+1)nt]$$

wo A_0 und α_0 zwei Integrationsconstanten bedeuten, herauskommen muss. Eben solche Ausdrücke werden wir für y und z erhalten, indem wir A_0 mit B_0 und C_0 sowie α_0 mit β_0 und γ_0 resp. zu vertauschen haben. Die Coefficienten λ_i und λ'_i werden aber dieselben sowohl in x als in y und z bleiben müssen, und zwar sind sie symmetrische Functionen von den A_0, B_0, C_0 und α_0, β_0, γ_0. Es folgt weiter hieraus, dass wir zur Bestimmung dieser Coefficienten nebst n nur die einzige Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Psi\, x = 0$$

zu gebrauchen haben, indem nämlich die entsprechenden Differentialgleichungen für y und z genau dieselben Bestimmungsgleichungen liefern. Schliesslich ist zu bemerken, dass $\lambda_0 = 1$ ist. Setzt man diese Werthe von x, y und z in r ein und berechnet die Entwickelung von $\frac{\mu}{r^3}$, so kann man nachher durch Substitution in die zuletzt angeführte Differentialgleichung die Coefficienten λ_i und λ'_i nebst n sich durch die Integrationsconstanten ausgedrückt denken. Und dass solches sich ohne Widerspruch theoretisch bewerkstelligen lässt, ist klar. Denn wenn wir, was sich nach Auflösung der Bestimmungsgleichungen bestätigt finden wird, annehmen, dass die λ_i und λ'_i eine mit steigendem Index abnehmende Reihe bilden, und zwar so, dass λ_i von der i^{ten} Ordnung in Bezug auf eine gewisse hinreichend kleine Grösse — die Excentricität — ist, u. s. w., und wenn wir bei der Bestimmung von Grössen einer beliebigen Ordnung halten, so werden wir finden, dass ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte erhalten werden.

Was die Integrationsconstanten A_0, B_0, C_0 und α_0, β_0, γ_0 betrifft, so stehen dieselben in nahem Zusammenhange mit den gleichbezeichneten Grössen z. B. bei Leverrier, Annales de l'Observatoire de Paris, Tome I pag. 197. Behalten wir für einen Augenblick, um dies zu finden, die dortigen Bezeichnungen, so ergiebt sich, wenn nach der mittleren Anomalie entwickelt wird, für x z. B.

$$x = -\frac{3}{2} Ae \sin\alpha + A \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \mathcal{J}_{i-1}(ie)\sin(i\zeta+\alpha)$$
$$+ A \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \mathcal{J}_{i+1}(ie)\sin(i\zeta-\alpha)$$

wo $\mathcal{J}_r$, wie gewöhnlich, die Bessel'sche Function bedeutet. Vergleichen wir nun diesen Ausdruck mit dem oben für x gegebenen, so finden wir, dass die bei mir mit A_0 bezeichnete Integrationsconstante sich von A um einen Factor $\sin(\varepsilon-\omega)$ — a. a. O. pag. 191 — abgesehen vom Gliede zweiter Ordnung in der Excentricität unterscheidet.

Die vorstehenden Betrachtungen haben offenbar keinen anderen Zweck gehabt, als einen Weg anzuzeigen, auf welchem man zu einer Einsicht von den wahren Formen der Integrale des Dreikörperproblems gelangen kann.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\Phi = \frac{k^2(M+m)}{r^3} + \frac{k^2 m'}{\Delta^3}$$
$$\Phi' = \frac{k^2(M+m')}{r'^3} + \frac{k^2 m}{\Delta^3}$$
$$\Psi = k^2 m \left[\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3}\right]$$
$$\Psi' = k^2 m' \left[\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right]$$

so sind die sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die relativen Bewegungen der Massen m und m' um M

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \Phi . x &= \Psi' . x' \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \Phi . y &= \Psi' . y' \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \Phi . z &= \Psi' . z' \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} + \Phi' . x' &= \Psi . x \\ \frac{d^2y'}{dt^2} + \Phi' . y' &= \Psi . y \\ \frac{d^2z'}{dt^2} + \Phi' . z' &= \Psi . z \end{aligned}\right.$$

Was durch die Wahl dieser Form der Bewegungsgleichungen gewonnen wird, wird sich gleich unten zeigen.

Von diesen Gleichungen besitzt man, wie bekannt, keine directe Integrationsmethode, und auch die indirecten, die bis jetzt versucht worden sind, scheinen nicht zweckentsprechend zu sein. Vor allen Dingen stellt sich hier die Frage über die Anzahl und Form der Argumente, vorausgesetzt nämlich, dass sich die Integrale durch beständig convergirende trigonometrische Reihen darstellen lassen. Diese Voraussetzung ist auch thatsächlich von allen Astronomen angenommen worden und ist für die Stabilität unseres Planetensystems unerlässlich.

Die früheren Versuche gingen nun darauf hinaus, die Integrale nach zwei Argumenten, die den mittleren Anomalien der beiden Planeten m und m' in der »ungestörten« Bewegung entsprechen, zu entwickeln. Indessen gelangte man in dieser Weise nicht zu einer befriedigenden Lösung, indem noch Glieder auftraten, welche die Zeit t und Potenzen derselben ausserhalb der trigonometrischen Functionen als Factoren besitzen. Es lag nun nahe, zu denken, dass diese Glieder, welche alle mit m' oder Potenzen desselben multiplicirt sind, blos die Potenzreihen gewisser, durch die Benutzung der vorhandenen unvollständigen Integrationsmethoden, nicht zum Vorschein gekommenen periodischen Glieder sind. Die Argumente derselben mussten alsdann selbst die Masse m' als Factor enthalten. Auf diesen Gedanken gründen sich die bekannten Bestrebungen von Laplace und Lagrange, die secularen Glieder durch periodische von sehr langer Periode zu ersetzen. In der neuesten Zeit ist auch Gyldén zu ähnlichen Resultaten gelangt.

In der That scheint auch beim ersten Anblick die Symmetrie des Problems so etwas zu fordern. Denn wenn die Einführung von Argumenten, welche der Bewegung von m um M und m' um M in der ungestörten Bewegung naturgemäss erscheint, so ist es wohl anzunehmen, dass ein drittes Argument, das der Bewegung von m um m, wenn $M = 0$ gesetzt wird, entsprechen soll, vorkommen muss. Und zwar müssen alsdann die bezüglichen Glieder eine sehr lange Periode haben, weil dieses dritte Argument der Analogie gemäss etwa die Form

$$\frac{k\sqrt{m+m'}}{\Delta_0^{3/2}} . t$$

wo Δ_0 eine gewisse Constante bedeuten soll, haben müsste. Die Resultate von Lagrange und Laplace widersprechen indessen einer solchen Annahme, indem bei ihren Untersuchungen m' und nicht $\sqrt{m'}$ als Factor in dem Argumente erscheint. Dagegen konnte man in der Gyldén'schen Theorie Anhaltspunkte dafür finden. Seine Glieder sehr langer Periode, welche die eine Klasse seiner »elementaren« Glieder ausmachen, kommen wesentlich von der Integration der Variationsgleichung her. Die Bestimmung der Variation wird nämlich von einer Reihe von Differentialgleichungen abhängig gemacht, von denen es genügt, die folgende

$$\frac{d^2V}{dv^2} + \alpha^2 \sin V \cos V = 0$$

anzuführen. V steht hier als Bezeichnung eines Arguments von der Form

$$\lambda v + s\chi + a$$

wo λ eine Constante bedeutet, die in unserm Fall als sehr klein angenommen werden soll; s ist eine ganze Zahl, χ ein gewisser Theil der zu bestimmenden Variation und a ein constanter Winkel. Das Integral jener Gleichung ist

$$V = \operatorname{am} \xi, \quad \operatorname{mod.} k = \frac{\alpha}{\gamma}$$

wo $\xi = \gamma v + f$ und γ und f die zwei Integrationsconstanten bedeuten. Im Falle eines von den älteren Planeten kann man nun annehmen, dass der Modulus k ein echter Bruch ist. Da aber α^2 mit m' und also α mit $\sqrt{m'}$ multiplicirt ist, so kann γ ebenfalls mit keiner höheren Potenz von m' als $\sqrt{m'}$ multiplicirt sein. Die später erfolgte Identificirung

$$\frac{k}{\pi} \cdot \lambda = \gamma$$

scheint dann anzuzeigen, dass λ ebenfalls von der Ordnung $\sqrt{m'}$ ist, und dass also in den vollständigen Ausdrücken für die Integrale Glieder der oben erwähnten Natur wenigstens nicht undenkbar sind.

Indessen sprechen andere Verhältnisse gegen das Vorkommen eines dritten Arguments in den Integralen der Störungsgleichungen. Ich werde an dieser Stelle nur einen solchen Umstand anführen.

Untersucht man nämlich z. B. das simultane System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dt^2} + au + bv + cw = 0 \\
&\frac{d^2v}{dt^2} + a'u + b'v + c'w = 0 \\
&\frac{d^2w}{dt^2} + a''u + b''v + c''w = 0
\end{aligned}$$

wo a, b, c gewisse Constanten bedeuten, so lassen sich dieselben bekanntlich auf drei Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2(\lambda u + \mu v + \nu w)}{dt^2} + r(\lambda u + \mu v + \nu w) = 0$$

reduciren, wobei die drei Werthe von r durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a - r, & a', & a'' \\ b, & b' - r, & b'' \\ c, & c', & c'' - r \end{vmatrix} = 0$$

gegeben sind. Demnach setzen sich die u, v und w im allgemeinen Fall linear aus drei Gliedern von der Form

$$\eta_0 \mathop{}_{\sin}^{\cos} \sqrt{r_1}\, t, \qquad \eta'_0 \mathop{}_{\sin}^{\cos} \sqrt{r_2}\, t, \qquad \eta''_0 \mathop{}_{\sin}^{\cos} \sqrt{r_3}\, t$$

zusammen, wo r_1, r_2, r_3 die drei Wurzeln der Gleichung in r sind. Es treten also in den Integralen im Allgemeinen drei Argumente auf. Soll nun das eine von diesen Argumenten verschwinden, was also nicht etwa dadurch, dass die Gleichung zwei gleiche Wurzeln erhält, was die Symmetrie verletzen würde, geschehen soll, so muss die obige Determinante für $r = 0$ identisch Null sein. Dies letztere ist aber zugleich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich die Constanten λ, μ und ν so bestimmen lassen, dass

$$\lambda \frac{d^2u}{dt^2} + \mu \frac{d^2v}{dt^2} + \nu \frac{d^2w}{dt^2}$$

identisch verschwindet.

In den Differentialgleichungen für die absoluten Bewegungen eines Systems von drei Körpern haben wir nun in dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes einen ähnlichen Umstand. Denn derselbe sagt, dass

$$\sum m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$$

Es scheint also, mit anderen Worten, die Gültigkeit des Satzes vom Schwerpunkt in dem Dreikörperproblem darauf hinzuweisen, dass nur zwei Argumente in den richtigen Ausdrücken für die Integrale auftreten können. Allerdings ist dieser Schluss nicht streng, da wir oben mit linearen Differentialgleichungen zu thun hatten, was hier nicht mehr der Fall ist. Es gilt ja aber auch nur zu einer Vermuthung in Betreff der wahren Verhältnisse zu gelangen, um darauf eine indirecte, zu dem richtigen Resultate führende, Methode zu begründen.

Ich könnte noch andere Indicien anführen, die dafür sprechen, dass die Zahl der Argumente nur zwei sein könne; so z. B. scheint von Lagrange — vergleiche Jacobi, Vorlesungen über Dynamik pag. 23, Formel (4) — darauf hinzuweisen. Indessen halte ich mich für den Augenblick damit nicht auf.

Wir wollen deshalb jetzt die Annahme machen, dass in den wahren Ausdrücken für die gesuchten Integrale des Systems (5) und (6), wenn wir für dieselben beständig convergirende trigonometrische Reihen suchen, nur zwei Argumente vorkommen, die wir, der »ungestörten« Bewegung analog mit nt und $n't$ bezeichnen. Wenn diese Annahme auf keinen Widerspruch führt, und wenn wir ausserdem 12 Integrationsconstanten erhalten, so sind wir überzeugt, dass sie zum Ziele leiten wird.

Wir führen nun ein Raisonnement, das dem beim Zweikörperproblem geführten vollständig entspricht.

Wenn nämlich x, y, z, x', y' und z' sich nach Vielfachen von nt und $n't$ entwickeln lassen, so muss dieses, innerhalb gewisser Grenzen der Integrationsconstanten, auch für die Functionen:

$$\frac{1}{r^3}, \quad \frac{1}{r'^3} \text{ und } \frac{1}{\Delta^3}$$

gelten. Wir können demnach in (5) und (6) die Functionen Φ, Φ', Ψ und Ψ' — wenn das Problem gelöst wäre — als ebensolche Ausdrücke auffassen. Den früheren Bemerkungen über simultane Differentialgleichungen solcher Beschaffenheit gemäss, können wir alsdann sofort den Schluss ziehen, dass sich x und x' in folgender Weise darstellen lassen:

$$\left.\begin{array}{l} x = A_0\left[\sum_{i,i'} \lambda^{(c)}_{i,i'} \cos[\alpha_0 + (in+i'n')t] + \sum_{i,i'} \lambda^{(s)}_{i,i'} \sin[\alpha_0 + (in+i'n')t]\right] \\ \quad + A'_0\left[\sum_{i,i'} \mu'^{(c)}_{i,i'} \cos[\alpha'_0 + (in+i'n')t] + \sum_{i,i'} \mu'^{(s)}_{i,i'} \sin[\alpha'_0 + (in+i'n')t]\right] \\ x' = A'_0\left[\sum_{i,i'} \lambda'^{(c)}_{i,i'} \cos[\alpha'_0 + (in+i'n')t] + \sum_{i,i'} \lambda'^{(s)}_{i,i'} \sin[\alpha'_0 + (in+i'n')t]\right] \\ \quad + A_0\left[\sum_{i,i'} \mu^{(c)}_{i,i'} \cos[\alpha_0 + (in+i'n')t] + \sum_{i,i'} \mu^{(s)}_{i,i'} \sin[\alpha_0 + (in+i'n')t]\right] \end{array}\right\} \begin{array}{c} i \text{ und } i' \\ \text{alle ganzen Zahlen} \\ \text{zwischen } -\infty \text{ und} \\ \text{und } +\infty. \end{array}$$

worin A_0, A'_0 α_0 und α'_0 Integrationsconstanten sind. Bezeichnen wir mit B_0, B'_0, C_0, C'_0, β_0, β'_0, γ_0 und γ'_0 die 8 übrigen Integrationsconstanten des Problems, so ergeben sich für y, y', z und z' genau dieselben Ausdrücke, indem wir nur für y z. B. in dem Ausdrucke für x A_0, A'_0, α_0 α'_0 durch B_0, B'_0, β_0 und β'_0 zu ersetzen haben, u. s. w. Die λ- und μ-Coefficienten bleiben dagegen unverändert. Es ist weiter ersichtlich, dass diese Coefficienten sowie n und n', welche noch unbekannte Functionen jener Integrationsconstanten sind, insofern symmetrische Functionen derselben sind, als eine gleichzeitige Vertauschung zweier Elemente in den vier Reihen

$$\begin{array}{ccc} A_0, & B_0, & C_0 \\ A'_0, & B'_0, & C'_0 \\ \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \\ \alpha'_0, & \beta'_0, & \gamma'_0 \end{array}$$

keine Veränderung derselben hervorbringt. Schliesslich haben wir

$$\lambda^{(c)}_{10} = \lambda'^{(c)}_{01} = 1$$

zu setzen.

Der Vortheil davon, dass wir die Bewegungsgleichungen in der Form (5) und (6) geschrieben haben, besteht also hauptsächlich darin, dass wir im Stande waren, die allgemeine Form der Integrale anzugeben und zwar in einer solchen Weise, dass die eigentlichen Integrationsconstanten des Problems, getrennt von den symmetrisch in denselben zusammengesetzten Coefficienten, zum Vorschein kommen. Die nächste Folge hiervon wird, dass wir zur Bestimmung der Unbekannten nur der zwei Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi\,.\,x = \Psi'\,.\,x'$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \Phi'\,.\,x' = \Psi\,.\,x$$

uns zu bedienen haben

Um nun einen vollständig strengen Schluss ziehen zu dürfen, wäre es eigentlich nothwendig, die Substitution der gewonnenen Ausdrücke für die Coordinaten einzusetzen, um somit die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten zu erlangen. Zu diesem Zweck ist es nothwendig, die Entwickelungen von

$$\frac{1}{r^3},\ \frac{1}{r'^3} \text{ und } \frac{1}{\Delta^3}$$

zu haben. Die Möglichkeit dieser Entwickelungen hängt nun von den Werthen der Integrationsconstanten ab. Mit Hülfe der vorhin angegebenen Bedeutung und des Zusammenhangs derselben mit den gewöhnlichen elliptischen Elementen des Zweikörperproblems, sieht man sofort ein, dass hierfür folgende Bedingungen unerlässlich sind:

1) Es muss das Verhältniss $\frac{r}{r'}$ bis auf Grössen von der Ordnung der Excentricitäten und gegenseitigen Neigung der Bahnen entweder beständig < 1 oder > 1 bleiben.
2) Es dürfen die Excentricitäten und die gegenseitige Neigung der Bahnen eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Für die Excentricitäten ist diese obere Grenze nicht zu sehr von Eins verschieden. Dagegen darf die Neigung nicht gar zu gross werden. Indessen sind die genauen Grenzen selbstverständlich sehr schwer anzugeben. Immerhin sind diese Bedingungen für die älteren Planeten und die meisten der kleineren erfüllt.

Es folgt hieraus, dass unsere Schlüsse nur in den letztgenannten Fällen Gültigkeit haben können. Ob man wegen dieser Umstände darauf verzichten muss, z. B. die periodischen Cometen als zu einem stabilen System gehörig zu betrachten, kann erst durch eine tiefere Untersuchung entschieden werden.

Selbstverständlich kann es nicht meine Absicht sein, hier die geforderte Substitution wirklich auszuführen. Ich will nur Folgendes hinzufügen, was geeignet sein wird, die Möglichkeit der Bestimmung der Unbekannten nach dieser Methode einleuchten zu lassen.

Indem wir nämlich die Entwickelungen von $\Phi, \cdots$ vornehmen, haben wir dieselben so zu schreiben, dass jedes Glied die Form

$$\alpha\,.\,\beta \cos(in+i'n')\,t$$

bekommt, wo α eine bekannte Function der Integrationsconstanten und β die zu bestimmenden Grössen enthält. Wir bemerken weiter, dass, wenn wir die oben gegebenen Werthe für x und x' in der Form

$$x = A_0\,\xi + A'_0\xi'_1$$
$$x' = A'_0\xi' + A_0\,\xi_1$$

schreiben, so können wir anstatt der obigen zwei Differentialgleichungen in x und x' die folgenden vier benutzen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \Phi\,.\,\xi = \Psi'\,.\,\xi_1$$
$$\frac{d^2\xi'_1}{dt^2} + \Phi\,.\,\xi'_1 = \Psi'\,.\,\xi'$$
$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} + \Phi'\,.\,\xi' = \Psi\,.\,\xi'_1$$
$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \Phi'\,.\,\xi_1 = \Psi\,.\,\xi$$

woraus leicht ersichtlich ist, dass wir die nöthige Anzahl von Gleichungen, und zwar weder mehr noch weniger, zur Bestimmung der Coefficienten λ, λ', μ, μ' und n, n' erhalten. —

Ich schliesse jetzt das Thema für diesmal, und will nur noch einige Sätze hinzufügen, die wohl an und für sich Interesse zu haben scheinen.

1) Die Integrale des Dreikörperproblems lassen sich, abgesehen von dem von der Bewegung des Schwerpunktes herrührenden Theil, als trigonometrische Reihen von zwei Argumenten nt und $n't$ darstellen. In diesen Ausdrücken kommen weder seculare noch andere Glieder sehr langer Periode vor, als solche, die von einem nahezu rationalen Verhältnisse der beiden Grössen n und n' herrühren. Wenn n und n' in einem exact rationalen Verhältnisse stehen, so wird dadurch die Stabilität nicht gefährdet. Die Gültigkeit jener Entwickelungen hängt von den numerischen Werthen der Integrationsconstanten ab. Im Falle der acht älteren Planeten convergiren dieselben unbedingt, woraus zu schliessen ist, dass das System der Sonne und dieser Planeten, wenn keine anderen Kräfte, als die Newton'sche Gravitation, einwirken, stabil ist.

2) Es giebt unendlich viele Keppler'sche Ellipsen, die so beschaffen sind, dass sie die Bewegung eines einzelnen Planeten um die Sonne bis auf Grössen der »störenden« Massen repräsentiren. Die Elemente dieser Ellipsen sind entweder die wahren Integrationsconstanten A_0, B_0, C_0, α_0, β_0, γ_0 oder solche, die von diesen um Grössen von der Ordnung der störenden Massen abweichen. Indessen muss in allen diesen Ellipsen die mittlere Bewegung den wahren Werth n haben; derselbe kann also nicht aus den sechs Elementen und der Masse des Planeten in gewöhnlicher Weise berechnet werden. Wenn für die mittlere Bewegung ein anderer, noch so wenig von der wahren, verschiedener Werth gesetzt wird, so wachsen die Abweichungen einer solchen Bahn von der wahren im Laufe der Zeit zu Beträgen an, die von derselben Ordnung wie die Coordinaten selbst sind.*)

In einer späteren Abhandlung werde ich die hier zur Sprache gekommenen Fragen ausführlicher und zum Theil in anderer Weise behandeln.

Dorpat 1883 Februar 20.

And. Lindstedt.

*) Um dies einzusehen, fassen wir die Hauptglieder in x in die Form $x_0 \cos(nt+a)$ zusammen. Wenn nun n_0 ein von n etwas verschiedener Werth ist, so wird die Differenz $x_0\cos(nt+a) - x_0\cos(n_0t+a)$ nach einer Zeit $= \frac{\pi}{n-n_0}$ den Betrag $2x_0$ erreichen können.

Vermischte Nachrichten.

In Nr. 25 des »Copernicus« theilt Herr William E. Plummer in Oxford eine Berechnung der Elemente des Cometen 1881 V (Denning) mit. Aus der nur sehr kurzen Reihe der wenig zahlreichen Beobachtungen dieses Cometen, von 1881 Oct 5 bis Nov. 19, ergab sich:

T	=	1881 Sept. 28.5	mittl. Zeit Greenw.
M	=	1°40′ 35″39	
π	=	18 36 12.78	mittl. Aeq. 1881.0.
☊	=	65 52 2.04	mittl. Aeq. 1881.0.
i	=	6 50 22 61	mittl. Aeq. 1881.0.
φ	=	56 8 28.42	
log a	=	0 6315148	
Periode	=	3235 Tage.	

Inhalt:

Geschlossen 1883 April 5. Herausgeber: A. Krueger. Druck von C. F. Mohr. Expedition: Sternwarte in Kiel.