

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

1. *Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction*¹⁾; von *E. Hagenbach*.

Hr. Lecher²⁾ beschreibt einige Versuche, welche ihn veranlassen, die in den Lehrbüchern gewöhnlich gegebene Erklärung mancher Rotationsversuche für einen „theoretischen und experimentellen Trugschluss“ zu erklären. Da ich mit den Behauptungen des Hrn. Lecher nicht einverstanden bin, so habe ich in Verbindung mit Hrn. H. Veillon eine Anzahl Versuche angestellt, um Aufschluss zu erhalten über die so verschieden aufgefassten Vorgänge, die sich einerseits beziehen auf die elektromagnetischen Rotationsversuche, wie sie bald nach der Oersted'schen Entdeckung von Faraday³⁾ und Ampère⁴⁾ zuerst angestellt und untersucht und dann durch viele Forscher in mannigfacher Weise wiederholt und modificirt worden sind, und andererseits auf die damit zusammenhängenden Inductionerscheinungen, die von Wilh. Weber⁵⁾ mit dem vielleicht nicht ganz passenden Namen der unipolaren Induction bezeichnet worden sind. Die Beziehungen zwischen Strom und Magnetismus finden einen klaren, bestimmten Ausdruck im Biot-Savart'schen Gesetze; es entsteht somit in erster Linie die Frage, ob die beobachteten Erscheinungen aus diesem Gesetze erklärt werden können;

1) Programm der Rectoratsfeier der Universität Basel. 1900.

2) E. Lecher, Wied. Ann. **69**. p. 781. 1899.

3) M. Faraday, Exp. Research. **2**. p. 127. 1821.

4) A. M. Ampère, Ann. de chim. et de phys. **20**. p. 60. 1822; **37**. p. 113. 1828; Collection de mémoires relatifs à la physique, publiés par la société française de physique **2**. p. 192. 1835; **3**. p. 246 u. 275. 1837.

5) W. Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, herausgegeben von Gauss u. Weber p. 63. 1839; Pogg. Ann. **52**. p. 353. 1841.

soweit meine Versuche gehen, glaube ich dies behaupten zu können.

Der von mir gebrauchte Apparat war im wesentlichen mit dem in Fig. 1 der citirten Abhandlung des Hrn. Lecher dargestellten übereinstimmend; nur war die mit *a* bezeichnete axiale Zuleitung fest mit dem Magnet verbunden, und es war ferner die Einrichtung getroffen, dass man den Versuch auch nur mit *einem* Magnet anstellen, und diesen sowohl centrisc als excentrisc einstellen konnte.

1. Versuche mit einem centrisc gestellten, d. h. um seine eigene Axe drehbaren Magnet.

Ein cylindrischer Magnetstab (Fig. 1), der oben den Südpol *S* und unten den Nordpol *N* hat und bei 15 cm Länge einen Durchmesser von 1 cm besitzt, ist in Spitzenlagern *d* und *e*, die mit Quecksilber angefüllt sind, leicht drehbar. Man kann von oben oder unten den treibenden Strom zuleiten oder den inducirten Strom ableiten und zwar vollkommen axial, wenigstens so weit, als eine Einwirkung noch merklich sein kann. Ferner kann in der Mitte des Magnets bei *C* oder an einer beliebigen anderen Stelle der Strom zu- oder abgeleitet werden. Bei Zuleitung des treibenden Stromes, wobei die zu beobachtende Drehung durch die Reibung möglichst wenig gehindert werden darf, war der Schleifcontact durch eine unmittelbar am Magnet mit Hülfe eines Korkes angebrachte Quecksilberrinne gebildet; während bei der Ableitung des inducirten Stromes der Draht entweder unmittelbar

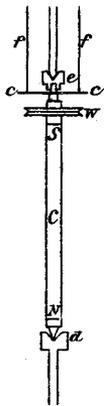


Fig. 1.

oder zur Verminderung der Thermostrome mittelst einer mit eingedrehter Rinne versehenen Kupferhülse angelegt wurde. Zur Erzeugung der Inductionsströme konnte dem Apparat mit einem kleinen Elektromotor durch die Rolle *w* eine möglichst gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit erteilt werden.

Wir wollen nun theoretisch bestimmen, was aus dem Biot-Savart'schen Gesetz für die Drehung des Apparates durch den Strom und für die Induction eines Stromes durch die Drehung folgt.

Wenn wir einen magnetischen Pol von der Stärke μ^1) und im Abstand ρ ein Leiterelement ds haben, durch welches ein Strom von der Intensität i geht, wenn ferner ϑ den Winkel bedeutet, den das Element ds mit der Verbindungslinie ρ bildet, so erhalten wir bekanntlich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze die Kraft: $i\mu \sin \vartheta ds / \rho^2$. Die Richtung der Kraft steht senkrecht auf der durch das Element ds und den Abstand ρ gehenden Ebene; sie wirkt in gleicher Grösse und Richtung auf μ und auf ds , nur ist der Sinn für μ und ds umgekehrt; er wird für μ durch die Ampère'sche und für ds durch die Fleming'sche Regel bestimmt.

Wenn Magnetelement und Stromelement zwei verschiedenen Körpern angehören, von welchen der eine fest und der andere drehbar ist, wie das bei den magnetoelektrischen Maschinen, bei den Dynamos, bei den Elektromotoren, bei den Messapparaten für elektrische Ströme und auch bei einigen Rotationsapparaten der Fall ist, so wird kaum bezweifelt werden, dass die Bewegungserscheinungen nach dem Biot-Savart'schen Gesetze und die Inductionserscheinungen nach dem Lenz'schen Gesetze erklärt werden können.

Wenn jedoch das Stromelement und das magnetische Element dem gleichen Körper angehören und fest miteinander verbunden sind, so entsteht die Frage, ob auch dann das Biot-Savart'sche Gesetz zur Geltung kommt, und ob hier durch innere Kräfte zwischen den Teilen eines starren Körpers eine Bewegung und umgekehrt durch die Bewegung desselben ein Inductionsstrom erzeugt werden kann.

In diesem Fall erhalten wir nämlich ein Drehungsmoment $i\mu \sin \vartheta ds / \rho$, das auf den Körper wirkt, dem ds und μ angehören. Wenn wir nur die Wirkung dieses aus inneren Kräften entstehenden Drehungsmomentes betrachten, so kommen wir auf ein Unding. Dasselbe kann fortwährend einen Widerstand überwinden oder Geschwindigkeit erzeugen und somit Arbeit leisten, ohne dass die potentielle Energie vermindert wird oder sonstwo eine entsprechende Energiemenge verloren geht. Allein

1) Wir bezeichnen nach dem Vorgang von Ampère und Gauss die Magnetismusmenge mit μ , da hier eine Verwechslung nicht möglich ist mit dem μ , das in neuerer Zeit für die magnetische Permeabilität gebraucht wird.

ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir in Betracht ziehen, dass das Stromelement nicht nur ein Massenteilchen ist, von dem eine Kraft ausgeht, sondern ein Bahnelement, dem fortwährend von aussen Strom zugeführt werden muss, und welches nur mit Aufwand von Energie durch das magnetische Feld bewegt werden kann. Der Widerspruch mit dem Satz der Erhaltung der Energie verschwindet, sobald wir zugleich die Induction in Rechnung ziehen.

Wenn der Leiter ds durch das magnetische Feld bewegt wird, so entsteht in demselben eine elektromotorische Kraft, und das Stromelement kann nur durch das magnetische Feld bewegt werden, wenn ihm fortwährend die zur Ueberwindung der inducirten elektromotorischen Gegenkraft nötige Energie zugeführt wird. Der Satz der Erhaltung der Energie stellt somit die Forderung, dass die überwundene elektromotorische Energie und die dafür aufgewandte mechanische Energie einander gleich seien.

Wenn wir mit de die im Element ds inducirte elektromotorische Kraft, mit f die Feldstärke, mit ϑ den Winkel, den die Richtung des Elementes mit der Feldstärke macht, mit dt die unendlich kleine Zeit und mit dx den unendlich kleinen nach der Richtung der Kraft in der Zeit dt zurückgelegten Weg bezeichnen, so giebt die Bedingung, dass die aufgewandte elektrische Energie gleich ist der geleisteten mechanischen Arbeit:

$$i d e d t = f i \sin \vartheta d s d x$$

oder

$$\frac{d e}{d s} = f \sin \vartheta \frac{d x}{d t} = f \sin \vartheta v,$$

wenn wir v die Geschwindigkeit nennen, mit welcher ds senkrecht zu der durch ds und die Feldrichtung gehende Ebene bewegt wird. Die in der Längeneinheit des bewegten Leiters erzeugte elektromotorische Kraft de/ds wirkt entgegen dem Sinne des Stromes i , oder, was dasselbe heisst, sie sucht einen Strom zu erzeugen, der in entgegengesetztem Sinne geht wie der Strom, welcher die Bewegung erzeugt.

Das bekannte Lenz'sche Inductionsgesetz folgt also naturnotwendig aus dem Biot-Savart'schen Gesetze, wenn man den Satz der Erhaltung der Energie damit verbindet und an-

nimmt, dass die Energie zur Leistung der mechanischen Arbeit vom Strome geliefert werden muss. Es kann somit ohne Widerspruch auch für den Fall, dass Magnetpol und Stromelement dem gleichen starren Körper angehören, das Biot-Savart'sche Gesetz Verwendung finden; und wir wollen nun sehen, was aus dieser Auffassung für die Bewegung unseres Magnets durch den Strom und für die durch Drehung des Magnets inducirte elektromotorische Kraft folgt.

Um die Rechnung zu vereinfachen, ersetzen wir den wirklichen Magnet durch einen ideellen Magnet, der in der Distanz $2l$ zwei gleich starke Pole hat, den Nordpol von der Stärke $+\mu$ unten, und den Südpol von der Stärke $-\mu$ oben. Wir denken uns also den ganzen freien Nordmagnetismus concentrirt in einem horizontalen Querschnitt beim Nordpol und den ganzen freien Südmagnetismus in einem horizontalen Querschnitt beim Südpol. Wenn schon diese Annahme den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht, so können dennoch die daraus abgeleiteten Folgerungen in Bezug auf die Grösse als eine erste Annäherung betrachtet werden. Für die Entscheidung der Hauptfrage, ob und wie durch innere Kräfte eine Drehung unseres Apparates zu stande kommt, ist es ganz gerechtfertigt, die für den ideellen Magnet berechneten Wirkungen auch für den wirklichen Magnet anzunehmen, da wir ja den wirklichen Magnet auffassen können als eine Uebereinanderlagerung von unendlich vielen gleichgerichteten ideellen Magneten, die mit den Indifferenzpunkten aufeinander liegen, deren Längen von Null bis zur Länge des wirklichen Magnets variiren und deren Polstärken der Intensität des freien Magnetismus an den entsprechenden Punkten proportional sind.

Wir nehmen nun an, dass ein Strom von der Intensität i in der Mitte des Magnetstabes durch einen horizontalen Draht zugeleitet und am oberen Ende des Magnets jenseits des Südpoles durch einen verticalen Draht abgeleitet wird, wie dies in Fig. 2 angedeutet ist; nur muss man sich denken, dass

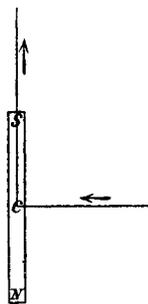


Fig. 2.

der elektrische Strom im Magnet nicht in einer Linie, sondern in der ganzen Breite des Magnets fliesst. Die Wirkung der äusseren horizontalen Zuleitung auf den Nordpol und den Süd-

pol bewirkt ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe, dessen Componente in der Richtung der verticalen Axe gleich Null ist; für die Erklärung der Drehung fällt also die äussere horizontale Zuleitung ausser Betracht. Die ganze Wirkung lässt sich nur erklären aus den Kräften, mit welchen der verticale Strom auf den freien Strom der Pole wirkt.

Fig. 3 stellt einen Horizontalschnitt durch den Magnet beim Südpol vor. Wir zerlegen den Strom i in ein Bündel paralleler Stromfäden von der Stärke di und den freien Magnetismus des Südpoles μ in magnetische Elemente von der Stärke $d\mu$. Wir bezeichnen mit ρ den Abstand von di und $d\mu$; der grösstmögliche Wert von ρ ist der Durchmesser des Magnets. Im vorliegenden Fall, wo wir einen im

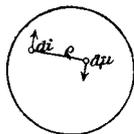


Fig. 3.

Vergleich zum Durchmesser langen Magnet haben und der Strom nach oben noch weit in verticaler Richtung fortgeführt wird, ist ρ stets klein im Vergleich zu den Längen des Stromfadens zu beiden Seiten des Südpoles. Wir bekommen somit einen nur um wenig zu grossen Wert, wenn wir bei der Berechnung der Wirkung den Stromfaden nach beiden Seiten ins Unendliche verlängern. Die Kraft, mit der ein Stromfaden di auf ein magnetisches Element $d\mu$ wirkt, ist dann $2 di d\mu / \rho$ in der Richtung des Pfeiles; mit einer gleich grossen Kraft, aber in entgegengesetztem Sinn, wie der Pfeil bei di andeutet, wird der Stromfaden vom magnetischen Element getrieben; die beiden Kräfte geben zusammen das Drehungsmoment $2 di d\mu$, mit dem di und $d\mu$ aufeinander wirken. Die Wirkung des Stromfadens auf den ganzen Magnetismus des Südpoles ist $2 di \mu$, und für das Drehungsmoment D , mit welchem der ganze Strom i auf den Südpol wirkt, erhalten wir

$$D = - 2 i \mu;$$

wir setzen das negative Zeichen, da bei unserer Voraussetzung, dass der Nordpol unten ist und der Strom von unten nach oben geht, die hervorgebrachte Drehung eine negative ist, d. h. im Sinne des Uhrzeigers geht. Die Wirkung zwischen Nordpol und Strom ist bei den oben angenommenen Verhältnissen zwischen Länge und Durchmesser des Magnets zu vernachlässigen.

Wenn der Strom i das Drehungsmoment D giebt, so muss, wie wir oben schon gezeigt haben, infolge des Satzes der Erhaltung der Energie durch Induction eine dem Strom i entgegenwirkende elektromotorische Kraft e erzeugt werden, deren elektrische Arbeit für jede Zeit und somit auch für die Zeiteinheit gleich und entgegengesetzt ist der mechanischen Arbeit des Drehungsmomentes; wenn wir also die Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnen, so haben wir:

$$D \omega = - e i,$$

oder

$$\frac{D}{i} = - \frac{e}{\omega};$$

wir bezeichnen D/i , das heisst das von dem Strom *eins* erzeugte Drehungsmoment mit D_1 und e/ω , das heisst die bei der Winkelgeschwindigkeit *eins* erzeugte elektromotorische Kraft mit e_1 und haben dann ganz allgemein bei jedem drehbaren starren Körper, der freien Magnetismus enthält und von einem Strome durchflossen wird, die einfache Beziehung

$$D_1 = - e_1.$$

Das umgekehrte Zeichen von D_1 und e_1 besagt, dass bei gleichsinniger Drehung der treibende Strom und die inducirte elektromotorische Kraft in entgegengesetztem Sinne gehen.

Im vorliegenden Fall ist

$$D_1 = - e_1 = - 2 \mu.$$

Um das Ergebnis der Versuche mit dem Resultate der Theorie zu vergleichen, war es vor allem nötig, die Grösse μ zu bestimmen. Wir haben dieselbe aus dem magnetischen Momente abgeleitet, indem wir die Poldistanz gleich $\frac{5}{8}$ der Magnetlänge, also im vorliegenden Fall gleich 12,5 cm annahmen.

Die magnetischen Momente der von uns angewandten Magnete bestimmten wir aus den Ablenkungen in der ersten Hauptlage unter Annahme der von Hrn. H. Veillon für unser Laboratorium bestimmten Horizontalcomponente des Erdmagnetismus. Es ergab sich für den einfachen Magnet von 15 cm

$$\mu = 148 \text{ C}^2 / \text{G}^{1/2} \text{ S}^{-1}.$$

Wiederholte Bestimmungen während der Versuchszeit haben bei diesem Magnet eine so geringe Abnahme des Momentes ergeben, dass wir dieselbe nicht zu berücksichtigen brauchen. Somit ergibt sich bei dem vorliegenden Apparate für das Drehungsmoment bei der Einheit der Stromstärke und für die inducirte elektromotorische Kraft bei der Einheit der Winkelgeschwindigkeit

$$- D_1 = e_1 = 296 \text{ C}^{9/2} \text{ G}^{1/2} \text{ S}^{-1}.$$

Es handelt sich nun darum, dieses durch die theoretische Rechnung gefundene Resultat durch die Versuche zu prüfen, und zwar an dem gleichen Apparate für das Drehungsmoment und für die inducirte elektromotorische Kraft.

Beim Durchleiten des Stromes wurde der Apparat in sehr kräftige Drehung versetzt¹⁾ und zwar in dem durch die Rechnung angegebenen Sinne. Da eine nicht unbedeutende Reibung in den Lagern und an der Zuleitungsstelle des Stromes zu überwinden war, so musste ein Strom von 10—20 Ampère angewandt werden. Es wäre nun ziemlich schwierig gewesen, während der Rotation des Apparates durch einen Versuch die Grösse des Drehungsmomentes zu bestimmen. Wir haben deshalb diese Messung im ruhenden Zustande des Gleichgewichtes vorgenommen, indem wir den unten in einem Quecksilbernapf tauchenden Magnet vermittelst eines kleinen Querbalkens *cc* (Fig. 1) an zwei Coconfäden *f* bifilar aufhängten und mit Spiegelablesung den Winkel der Drehung bestimmten, den ein Strom von bestimmter Stärke hervorbrachte. Die Stromstärke wurde mit einem Präcisionsampèremeter von Siemens & Halske ermittelt.

Das Drehungsmoment *D* wird bestimmt nach der Formel

$$D = \frac{P a b \sin \varphi}{h},$$

wenn *P* das Gewicht des aufgehängten Apparates, *a* die halbe Fadendistanz oben, *b* die halbe Fadendistanz unten, *h* die Länge der Fäden und φ den Drehungswinkel bedeutet.

1) Diese Rotation eines Magnets um seine eigene Axe wurde zuerst von Ampère gezeigt, während Faraday dieselbe anfänglich für nicht möglich hielt. Collect. de mém. 2. p. 163 und p. 201. 1885; 3. p. 258 und p. 275. 1887; M. Faraday, Exp. Res. 2. p. 131. 1844.

Es wurde nun vorerst das im Grunde selbstverständliche Resultat, dass das Drehungsmoment der Stromstärke proportional ist, durch den Versuch bestätigt und dann der numerische Wert des Drehungsmomentes ermittelt.

Die Messung ergab für $2a$ 3,725 cm, für $2b$ 3,70 cm, für h 128,3 cm, für die Masse des Apparates durch Wägung 190,755 G, für die Ablesung an der Scala bei zwei Meter Abstand 568 mm, woraus sich für $\sin \varphi$ der Wert $\frac{552}{4000}$ ergibt; wir nehmen ferner für die Beschleunigung der Schwerkraft den für unser Laboratorium ermittelten Wert 980,8 C/S², also für das Gewicht P 190,755 · 980,8. Die Stromstärke wurde zu 21,5 Ampère oder 2,15 C^{1/2} G^{1/2} S⁻¹ ermittelt. Mit diesen Zahlen finden wir für das Drehungsmoment bei der Stromstärke *eins*:

$$- D_1 = 322 \text{ C}^{3/2} \text{ G}^{1/2} \text{ S}^{-1}.$$

Diese Uebereinstimmung des beobachteten Drehungsmomentes 322 mit dem berechneten 296 halten wir für befriedigend, wenn wir in Betracht ziehen, dass die Berechnung für einen ideellen Magnet gemacht ist. Da bei dem wirklichen Magnet nicht der gesamte freie Magnetismus in einem Abstand von der Mitte sich befindet, welcher $\frac{5}{6}$ der halben Poldistanz beträgt, sondern zu grossem Teil in einem kleineren Abstand, so hat μ jedenfalls einen grösseren Wert als den von uns berechneten.

Wir gehen nun über zur Ermittlung der beim Drehen unseres Apparates durch Induction erzeugten elektromotorischen Kraft. Mit Hülfe eines kleinen Elektromotors wurde der Apparat in möglichst gleichförmige Rotation versetzt und die erzeugte elektromotorische Kraft mit einem empfindlichen Galvanometer nach Deprez-d'Arsonval von Edelman bestimmt. Der Wert eines an der Scala abgelesenen Teilstriches wurde für jede Versuchsreihe durch Aichung ermittelt. Bei diesen Messungen wirken die Thermoströme störend, doch kann man deren Einfluss grösstenteils eliminiren, wenn man den Magnet nacheinander in entgegengesetztem Sinne rotiren lässt und die dazu gehörigen Ablenkungen abliest.

Auch hier wurde zuerst durch den Versuch das im Grunde selbstverständliche Resultat bestätigt, dass die erzeugte elektromotorische Kraft der Winkelgeschwindigkeit proportional ist;

auch ergab sich, dass der Sinn der Ablenkung vollkommen mit der Theorie stimmte.

Die Bestimmung des numerischen Wertes ergab für die elektromotorische Kraft $14\,510\text{ C}^{3/2}\text{ G}^{1/2}\text{ S}^{-2}$ bei 177 Umdrehungen in 24,52 Secunden oder einer Winkelgeschwindigkeit ω von $45,36\text{ S}^{-1}$. Daraus folgt für die elektromotorische Kraft bei der Winkelgeschwindigkeit *eins*

$$e_1 = 320\text{ C}^{3/2}\text{ G}^{1/2}\text{ S}^{-1},$$

was mit dem beobachteten D_1 und auch mit dem berechneten e_1 in befriedigender Weise übereinstimmt.

Hr. Ebert¹⁾ berichtet von einem ganz gleich angeordneten Versuche, wo auch in der Mitte des Magnets und am Ende ausserhalb des Poles der inducirte Strom abgeleitet wurde, dass er mit einem empfindlichen Galvanometer selbst bei raschem Drehen keinen merklichen Ausschlag erhalten habe. Es muss hier wohl ein Missverständnis vorliegen, da bei meinen Versuchen, wenn ich etwas schnell laufen liess, die Ablenkung über 500 Teilstriche betrug, also nahezu über die Scala hinausging.

Wir haben bei unserer theoretischen Berechnung des Drehungsmomentes angenommen, dass die Ableitung in der Mitte des Magnets stattfindet. Wenn wir den Ableitungsdraht nach der Seite des Südpoles verschieben, so muss schon bei dem von uns vorausgesetzten ideellen Magnet, wo die freien Magnetismen in den Querschnitten des Nordpols und Südpols concentrirt gedacht sind, die inducirte elektromotorische Kraft etwas abnehmen, da die gemachte Voraussetzung, dass ρ klein sei im Verhältnis zu den Längen des Stromes auf beiden Seiten des Südpoles, um so weniger zutrifft, als wir uns dem Südpol nähern. Allein diese Abnahme muss noch viel bedeutender werden durch den Umstand, dass bei dem wirklichen Magnet ein wesentlicher Teil des freien Magnetismus näher bei dem Centrum des Magnets liegt als der angenommene Pol. Es ist also zu erwarten, dass bei der Verschiebung des Schleifcontactes nach dem Südpol zu, und in ganz gleicher Weise bei einer entsprechenden Verschiebung nach der Seite des Nordpols, die inducirte elektromotorische Kraft erst langsam und

1) H. Ebert, Magnetische Kraftfelder. Versuch 91, p. 250. 1897.

in der Nähe des Poles schnell abnehme, wie die folgenden Zahlen zeigen; es sind dieselben durch graphische Interpolation aus den Ablenkungen erhalten, die beim Anlegen des Drahtes in verschiedenen Abständen von der Mitte des Magnets erhalten worden sind.

Abstand der Ableitungsstelle des Drahtes von der Mitte des Magnets in Centimetern	}	0	1	2	3	4	5	6	7
Beobachtete elektromotorische Kraft für die Winkelgeschwin- digkeit eins	}	322	317	307	284	254	215	163	90

Solche Beobachtungen sind wohl sehr gut geeignet, die Verteilung des freien Magnetismus in einem Magnetstab zu untersuchen; es hat darauf schon Wilh. Weber¹⁾ in seiner Abhandlung über die unipolare Induction aufmerksam gemacht.

Man kann auch mit der Vorstellung der Kraftlinien über die Entstehung der elektromotorischen Kraft bei einem ideellen und bei einem wirklichen Magnet in der folgenden Weise sich Rechenschaft geben.

Wenn S und N in Fig. 4a die Pole eines linearen ideellen Magnets sind, d. h. eines solchen, bei welchem der ganze Nordmagnetismus $+\mu$ in einem Punkte N und der ganze Südmagnetismus $-\mu$ in einem Punkte S concentrirt ist, so gehen alle Curven der Kraftlinien von dem einen Pole aus und verlaufen, ohne sich zu schneiden, nach dem anderen Pole, in welchem sie wieder alle zusammentreffen; die Zahl dieser Kraftlinien ist $4\pi\mu$. Nun sei ABD eine beliebige mit dem Magnet fest verbundene Strombahn, die zwei auf der Axe liegende Punkte miteinander verbindet, von welchen D ausserhalb des Poles S und A zwischen den beiden Polen

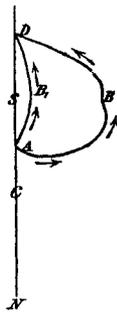


Fig. 4a.

liegt. Magnet und Strombahn werden um die Axe SCN gleichförmig gedreht. Wenn in der Secunde eine ganze Umdrehung stattfände, so würden alle $4\pi\mu$ Kraftlinien von der Strombahn ABD einmal oder eine ungerade Anzahl mal geschnitten, und es wäre die erzeugte elektromotorische Kraft $4\pi\mu$;

1) W. Weber, Pogg. Ann. 52. p. 382. 1841.

da aber in der Secunde der Winkel ω beschrieben wird, so haben wir für die elektromotorische Kraft e , welche gleich ist der Zahl der in einer Secunde durchschnittenen Kraftlinien, das Verhältnis:

$$\frac{e}{4\pi\mu} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ oder } \frac{e}{\omega} = e_1 = 2\mu.$$

Dies gilt bei dem linearen ideellen Magnet, auch wenn ABD wie AB_1D ganz nah an die Axe sich anschliesst. Auch kann an die Stelle der einen Strombahn ein ganzes Bündel von Stromfäden treten; das Resultat bleibt genau dasselbe, wenn sie alle von A ausgehen und sich in D wieder treffen; auch kann der Punkt A ganz beliebig auf dem Magnet verschoben werden, nur muss der Pol stets zwischen den Punkten D und A sein. Es stimmt dies genau mit dem oben in anderer Weise abgeleiteten Resultate.

Bei einem wirklichen Magnet gehen nicht alle Kraftlinien von *einem* Punkte aus, manche verlaufen, wie in Fig. 4b durch die punktirte Linie angedeutet ist, vom Ende des Magnets aus noch einige Zeit nahe der Axe im Magnet selbst und treten erst später aus. Es zeigt sich das schon deutlich bei den magnetischen Figuren, die Faraday¹⁾ im Jahr 1851 abgebildet hat. Die mit dem drehbaren Magnet fest verbundene Strombahn ABD wird also bei der Drehung die Kraftlinien nicht schneiden, welche erst zwischen A und C aus dem Magnet austreten; es gilt das auch, wenn die Strombahn so nah an die Axe rückt, dass sie im Magnet selbst verläuft, wie das bei den Stromfäden unseres Apparates der Fall ist. Es wird also e_1 um so kleiner werden, je weiter A von C nach dem Ende hin vorrückt, wie das auch die Beobachtungen ergeben haben.

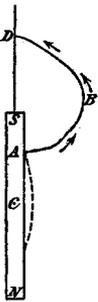


Fig. 4b.

Wenn der Strom nicht seitlich sondern axial von unten zugeleitet und oben axial abgeleitet wird, so ist nach obiger Betrachtung das Drehungsmoment, das durch die Wirkung des Stromes auf den Südpol S entsteht, genau gleich und entgegengesetzt dem Drehungsmomente, das durch die Wir-

1) M. Faraday, Exp. Research. 3. p. 399. 1855.

kung des Stromes auf den Nordpol N entsteht; die drehende Wirkung ist also Null und ebenso auch die durch Rotation erzeugte elektromotorische Kraft. Der Versuch hat diese selbstverständlichen Folgerungen bestätigt.

Es wurden nun ganz gleiche Versuche mit einem halb so langen Magnet gemacht, der nach beiden Seiten durch messingene Fortsätze verlängert war und somit in den gleichen Rahmen eingesetzt werden konnte.

Die Magnetismmenge μ wurde zu 91,8 bestimmt zu der Zeit der Versuche über Induction und zu 76,5 zu der Zeit der Versuche über das Drehungsmoment.

Das berechnete Drehungsmoment für den Strom *eins* ist somit 153, der Versuch mit Bifilarsuspension ergab 162.

Die Versuche über Induction ergaben für e_1 die Grösse 180 bei der Magnetismmenge 91,8, oder 150, wenn wir e_1 auf die Magnetismmenge 76,5 reduciren.

Wir stellen nochmals die Zahlen der Berechnung und der Versuche für die beiden centrisc eingesetzten Magnete mit directer Zuleitung des Stromes in der Mitte zusammen:

	μ	2μ	D_1	e_1
Magnet von 15 cm	148	296	322	320
Magnet von 7,5 cm	76,5	153	162	150

Die für D_1 und e_1 gefundenen Zahlen sollten, ganz abgesehen von der Auffassung, die wir über die Wirkungsweise haben, genau miteinander übereinstimmen, sobald das Lenz'sche Reciprocitätsgesetz zwischen ponderomotorischer und elektromotorischer Wirkung seine Geltung hat; die Unterschiede rühren offenbar daher, dass die vorhandenen Umstände des etwas primitiv ausgeführten Apparates und die verschiedenen störenden Einflüsse nicht eine hinlänglich genaue Bestimmung der zu messenden Grössen zuliessen. Aus dem Ergebnis, dass die durch Beobachtung gefundenen Werte von D_1 und e_1 nur um weniges grösser sind als 2μ , darf auf die Richtigkeit unserer Auffassung geschlossen werden, besonders wenn man auch den schon besprochenen Unterschied des ideellen und wirklichen Magnets in Betracht zieht.

Wir haben nun weitere Versuche angestellt mit dem gleichen centrisc eingesetzten Magnet; nur haben wir den

Strom nicht direct dem Magnet zugeleitet, sondern durch Vermittelung einer mit Quecksilber gefüllten Rinne, in welche ein oder zwei horizontale mit dem Magnet fest verbundene und mit ihm sich drehende 5,35 cm lange Leitungsdrähte tauchten, wie dies Fig. 5 verdeutlicht.

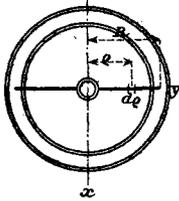
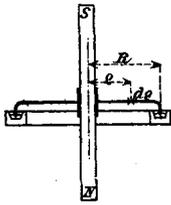


Fig. 5.

Die Wirkung der äusseren festen Zuleitung zur Rinne auf den Magnet ist auch hier offenbar Null, da sie nur ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe giebt; das Gleiche gilt von dem Strom in der Rinne. Das Drehungsmoment bleibt deshalb gleich, wenn an verschiedenen Stellen, z. B. bei x oder bei y der Strom der Rinne zugeführt wird; was auch die Beobachtung bestätigt hat. Hingegen findet eine Wechselwirkung statt zwischen dem Magnet und dem mit ihm beweglichen Leiter; dieselbe liefert ein Drehungsmoment um die verticale Axe, wie folgende Rechnung zeigt:

Wenn wir die Länge des beweglichen Leiters mit R und den Abstand des Elementes $d\rho$ von der Axe mit ρ bezeichnen, so erzeugen die beiden Pole an der Stelle des Elementes $d\rho$ eine nach oben gerichtete Feldstärke $2l\mu/(\rho^2 + l^2)^{3/2}$; somit wird das Element $d\rho$ nach hinten oder der Magnet nach vorn getrieben, und wir erhalten um die verticale Axe das Drehungsmoment $2il\mu\rho d\rho/(\rho^2 + l^2)^{3/2}$, und wenn wir in Bezug auf ρ von Null bis R integrieren, so bekommen wir:

$$D = 2i\mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} \right) \quad \text{und} \quad D_1 = 2\mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} \right).$$

Die Wechselwirkung zwischen dem Magnet und dem mit ihm fest verbundenen Zuleitungsstrom giebt somit ein Drehungsmoment, das in umgekehrtem Sinne wirkt als die Wechselwirkung zwischen dem Magnet und dem durch ihn selbst geleiteten Strom; das Drehungsmoment bei Zuleitung aus der Rinne ist somit die Differenz der beiden Wirkungen, und wir erhalten für diesen Fall:

$$D_1 = -e_1 = -2\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}.$$

Es mussten deshalb sowohl bei dem grösseren als bei dem kleineren Magnet die Drehungsmomente, wenn der Strom aus der Rinne zugeleitet wurde, um

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}$$

kleiner werden; die Versuche haben das vollkommen bestätigt, sowohl in betreff der Drehungsmomente als der inducirten elektromotorischen Kräfte, wie die folgenden Zahlen zeigen:

	μ	$2\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}$	D_1	e_1
Magnet von 15 cm	148	225	229	240
Magnet von 7,5 cm	76,5	77	85	76

Auch hier weichen D_1 und e_1 von dem durch die Theorie bestimmten Wert nicht mehr ab als unter sich. Wir dürfen also annehmen, dass die nicht sehr bedeutenden Abweichungen aus den mit der Unvollkommenheit des Apparates zusammenhängenden Störungen sich rechtfertigen lassen.

Wenn wir in der obigen Formel R unendlich werden lassen, so wird das Drehungsmoment D_1 gleich Null. Das muss so sein, da in diesem Fall der Strom im Unendlichen geschlossen ist und nach dem weiter unten bewiesenen Satze die drehende Einwirkung eines geschlossenen mit dem Magnet fest verbundenen Leiters Null ist.

Wir betrachten nun ferner den Fall, dass der in einem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter fließende Strom nicht nur aus einer horizontalen Strecke besteht, sondern aus horizontalen und verticalen Strecken zusammengesetzt ist oder auch eine ganz beliebige Gestalt hat.

In Fig. 6 sei NS ein linearer ideeller Magnet, N der Nordpol, S der Südpol und C die Mitte. B ist ein Punkt auf der Axe ausserhalb S im Abstände a . Der Strom geht in

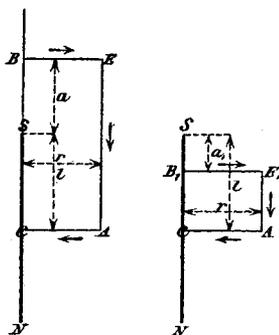


Fig. 6.

einer mit dem Magnet fest verbundenen Leitung horizontal von B nach dem um r abstehenden Punkte E und von A nach C und vertical von E nach A . Die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetze giebt uns für die Drehungsmomente D_1 folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und AC :

$$2\mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und EA :

$$\mu \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und BE :

$$\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right),$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und $BEAC$: 2μ .

Wir haben früher gesehen, dass wenn der Strom im Magnet von C nach B geht, D_1 gleich -2μ ist; es folgt also daraus, dass die Wirkung die gleiche ist, wenn der Strom im Magnet von B nach C geht, als wenn er in dem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter von B über E und A nach C geht.

Wir nehmen nun einen Punkt auf der Axe innerhalb S im Abstand a_1 und bezeichnen ihn mit B_1 und nehmen an, der Strom gehe horizontal von B_1 nach E_1 und von A nach C und vertical von E_1 nach A ; dann erhalten wir für die Drehungsmomente D_1 folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und AC :

$$2\mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und E_1A :

$$\mu \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l-a_1}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und $B_1 E_1$:

$$\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l - a_1}\right)^2}} - 2 \right)$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und $B_1 E_1 AC$: Null.

Aus diesen Resultaten können wir den folgenden Satz ableiten:

Wenn ein beliebiger auf der Axe zwischen den Polen liegender Punkt G durch horizontale und verticale vom Einheitsstrom durchflossene Bahnstrecken mit einem zweiten auf der Axe liegenden Punkte B fest verbunden ist, so ist das Drehungsmoment gleich 2μ , wenn B ausserhalb der Pole, und gleich Null, wenn B innerhalb der Pole liegt. Der Satz gilt auch, wenn wir durch mehrere sich aneinander anschliessende horizontale und verticale Linien von G nach B gelangen, und da wir ferner eine beliebige Curve aus unendlich kleinen horizontalen und verticalen Linienelementen uns zusammengesetzt denken können, so kann unser Satz folgende Form annehmen:

Das aus der Wechselwirkung eines Magnets und eines Einheitsstromes, der in einer beliebigen mit dem Magnet fest verbundenen Bahn zwei Punkte der Axe miteinander verbindet, entstehende Drehungsmoment ist gleich 2μ , wenn der eine Punkt zwischen den beiden Polen und der andere ausserhalb derselben liegt, und gleich Null, wenn die beiden Punkte innerhalb oder ausserhalb der Pole liegen.

Es folgt daraus weiter:

Wenn eine ganz beliebige vom Einheitsstrom durchflossene und fest mit dem um seine Axe drehbaren Magnet verbundene Strombahn zwei willkürlich gewählte Punkte H und K miteinander verbindet, so hängt das aus der Wechselwirkung von Magnet und Strom entstehende Drehungsmoment nur ab von der Lage der Punkte H und K , keineswegs aber von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Es ergibt sich das aus Fig. 6. Wir verbinden E_1 mit E durch eine ganz beliebige Strombahn. Die Wirkung von S auf $B_1 E_1 EB$ ist gleich 2μ und somit die Wirkung auf die

Strombahn $E_1 E$ gleich 2μ vermindert um die Wirkung auf $B_1 E_1$ und EB ; und diese Differenz ist unabhängig von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Das aus der Wechselwirkung von einem drehbaren Magnet und einer damit fest verbundenen geschlossenen Strombahn entstehende Drehmoment ist Null, da ein geschlossener Strom stets aufgefasst werden kann als ein solcher, der zwischen zwei beliebigen Punkten auf verschiedenen Wegen hin und her geht.

Diese allgemeinen Sätze lassen sich auch sehr leicht ohne weitere Rechnung aus der Anschauung der Kraftlinien in folgender Weise ableiten:



Fig. 7.

Bei einem linearen ideellen Magnet (Fig. 7) gehen von jedem Pol $4\pi\mu$ Kraftlinien aus. Wenn von einem Punkte B auf der Achse ausserhalb S eine mit dem Magnet fest verbundene Strombahn auf beliebigem Weg nach dem Punkte G geht, der zwischen den Polen auf der Achse liegt, so werden bei einer Umdrehung alle Kraftlinien *ein* oder eine

ungerade Anzahl mal geschnitten. Die in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien verhalten sich zu $4\pi\mu$ wie ω zu 2π , und daraus folgt:

$$D_1 = -e_1 = -2\mu.$$

Wenn jedoch B innerhalb S liegt, so werden bei einer Umdrehung nur eine beschränkte von der Gestalt der Curve abhängige Zahl von Kraftlinien geschnitten, und zwar jede zwei oder eine gerade Anzahl mal; somit ist in diesem Fall e_1 und auch D_1 gleich Null.

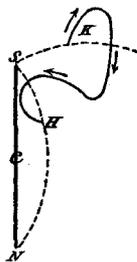


Fig. 8.

In Fig. 8 verbindet die willkürlich gezogene mit dem Magnet fest verbundene Strombahn zwei beliebige Punkte H und K . Die beiden punktierten Linien bedeuten die beiden durch H und durch K gehenden Kraftlinien. Nun schneidet die willkürlich gezogene Curve KH alle Kraftlinien, die zwischen den beiden punktierten

Linien liegen, *einmal* oder eine ungerade Anzahl mal, alle Kraftlinien aber, die ausserhalb der beiden punktierten Linien liegen, gar nicht oder eine gerade Anzahl mal. Wenn nun die Curve um die Magnetaxe gedreht

wird, so sind die *ein* mal oder eine ungerade Anzahl mal durchschnittenen Kraftlinien proportional den Kraftlinien, die in der Ebene zwischen den punktierten Linien liegen. Da diese nur abhängen von der Lage der Punkte *H* und *K*, so gilt das Gleiche von D_1 und e_1 . Die gleiche Betrachtung kann angestellt werden, wenn *H* und *K* nicht mit dem Magnet in einer Ebene liegen.

Dieser letzte Satz gilt, wie leicht ersichtlich ist, nicht nur für einen ideellen, sondern auch für einen ganz beliebigen wirklichen Magnet; wir haben denselben durch folgende Versuche bestätigt gefunden.

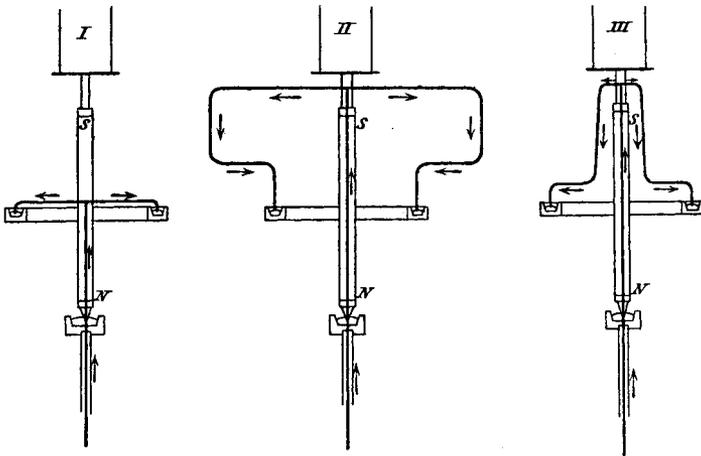


Fig. 9.

In Fig. 9 wird durch die stark ausgezogenen Linien angedeutet, wie bei dem gleichen bifilar aufgehängten Magnet auf den drei sehr verschiedenen Wegen *I*, *II* und *III* der Strom vom Quecksilbernapf unten, in welchen die verlängerte Axe eintauchte, zu den gleichen Stellen der Quecksilberrinne geleitet wurde. In allen drei Fällen zeigte sich eine sehr starke Ablenkung nach der gleichen Seite, und in den drei Fällen verhielten sich die gemessenen Drehungsmomente wie:

$$\begin{array}{ccc} I & II & III \\ 100 & : 99,2 & : 100,3. \end{array}$$

Diese Gleichheit der Wirkung zeigte sich auch bei der Bestimmung der elektromotorischen Kraft durch Induction mit

den Apparaten *A*, *B* und *C* in Fig. 10, wo die Drähte des Galvanometers in den drei Fällen ganz gleich einerseits an einen Punkt der Axe ausserhalb des Poles und andererseits an die Rinne anschliessen, während die durch stark ausgezogene Linien angedeuteten Strombahnen ganz verschieden sind; es verhielten sich die bei gleicher Winkelgeschwindigkeit erhaltenen elektromotorischen Kräfte wie:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 100 & : 100,9 & : 99,8. \end{array}$$

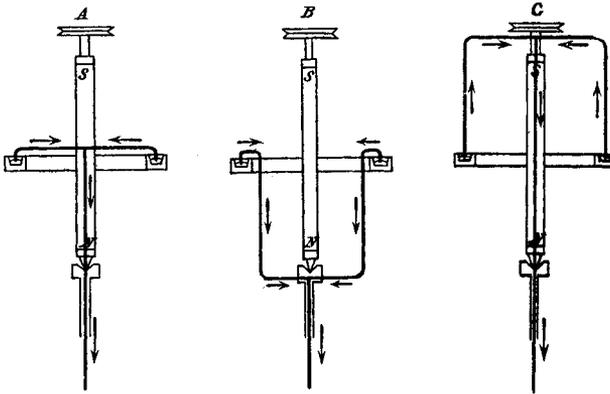


Fig. 10.

Dass auch hier in beiden Fällen keine Spur von Drehung oder Induction wahrgenommen werden konnte, wenn die beiden Zuleitungen des Stromes oder Ableitungen der Galvanometerdrähte an die Axe ausserhalb der Pole angelegt wurden, ist selbstverständlich.

II. Versuche mit einem oder zwei excentrisch eingesetzten Magneten.

Wir gehen nun über zu den Versuchen mit zwei parallelen, fest miteinander verbundenen gleichgerichteten und möglichst gleich starken Magneten, deren sich auch Hr. Lecher bei seinen Versuchen bediente. Fig. 11 zeigt in Aufriß und Grundriss den Apparat.

Die beiden Magnete sind durch messingene Querstücke *pp* und *nn* fest mit der Axe verbunden, die bei *d* und *e* in

Spitzenlagern läuft; der ganze Apparat ist somit leicht drehbar, und es kann ihm mittelst der Rolle *w* eine Winkelgeschwindigkeit erteilt werden; um die elektrische Leitung herzustellen, wird Quecksilber in die Stahllager gethan. Das messingene Querstück *cc* dient zur Bifilaraufhängung; zur Ermittlung der Drehung wird auf die Axe ein Spiegel aufgesetzt. Was schief schraffirt ist, besteht aus einer isolirenden Substanz. Die Magnete sind etwas verchiebbar; es kann dadurch die leitende Verbindung der Magnete mit dem oberen Querstück *pp* hergestellt oder gelöst werden. Ferner können die Magnete herausgezogen und durch Messingstäbe von gleichem Gewicht ersetzt werden, und auch diese können so verschoben werden, dass die leitende Verbindung mit dem Querstück *pp* hergestellt oder gelöst wird. In *m* gehen senkrecht zum Querstück *nn* zwei Drähte ab, die vorn nach unten umgebogen sind und in die mit Quecksilber gefüllte Rinne *q* tauchen; je nach Belieben kann man nur einen oder beide Drähte eintauchen lassen. Der Anschluss der äusseren Leitungsdrähte kann einerseits in der Axe ausserhalb der Pole bei *g* oder bei *h* und andererseits an irgend einem Punkte der Rinne stattfinden. Wenn der Strom bei *g* oder *h* zugeleitet wird, so werden die äusseren Drähte bis auf grössere Distanz vom Apparat vertical weiter geführt, während für die Zuleitung zur Rinne horizontale Drähte benutzt werden.

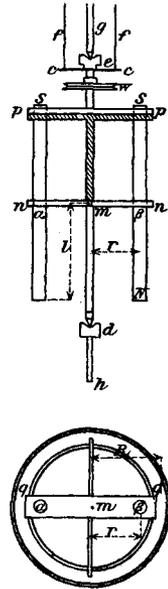


Fig. 11.

Mit diesem Apparat kann man nun wie mit dem einfachen centrisch eingesetzten Magnet dreierlei Versuche anstellen, nämlich:

1. den Apparat in die Spitzenlager einsetzen und durch den zugeleiteten Strom drehen;
2. den in die Spitzenlager eingesetzten Apparat mittelst der Rolle in gleichförmige Rotation versetzen und dann die Rotationsgeschwindigkeit und die durch Induction erzeugte elektromotorische Kraft bestimmen;
3. den Apparat mittelst des Querstückes *cc* bifilar auf-

hängen, einen Strom von bestimmter Stärke durchleiten und die Ablenkung messen.

Die für den einfachen centrischen Magnet aus der Theorie abgeleiteten Sätze, dass das Drehungsmoment und somit auch die inducirte elektromotorische Kraft nur von den Anschlussstellen des Stromes, nicht aber von der Strombahn abhängen, gelten auch für die excentrisch eingesetzten Magnete, da ja die Axe eines Drehungsmomentes ganz beliebig parallel verschoben werden darf.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass beide Magnete, die wir mit α und β bezeichnen, eingesetzt sind; in der Fig. 12

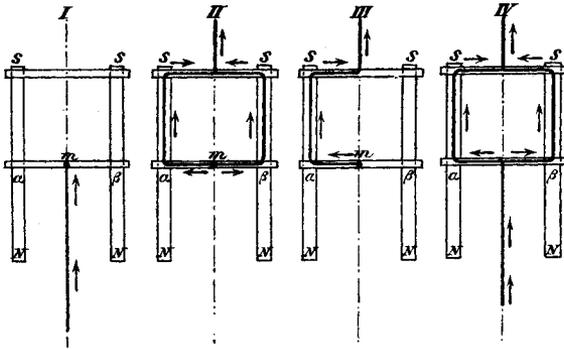


Fig. 12.

sind vier Combinationen für verschiedene Stromdurchleitung gegeben; der Weg des Stromes ist durch die stark ausgezogenen Linien angegeben. Bei *I* ist die Zuleitung von unten und die Ableitung durch die Rinne, bei *II* und *III* ist die Zuleitung durch die Rinne und die Ableitung oben, bei *IV* ist die Zuleitung von unten und die Ableitung oben. Nach der Theorie müssen wir für *I*, *II* und *III* gleich grosse Drehungsmomente bekommen, nur findet bei *I* eine Drehung im positiven, bei *II* und *III* aber eine Drehung im negativen Sinne statt. Bei *IV* hingegen erhalten wir ein Drehungsmoment Null, da die Wirkung des Stromes in der unteren Hälfte durch die Wirkung des Stromes in der oberen Hälfte genau aufgehoben wird.

Diese theoretischen Folgerungen sind durch die folgenden Versuche vollkommen bestätigt worden.

Die kräftige Drehung des Apparates durch einen Strom von 10—20 Ampère bei den Combinationen *I*, *II* und *III* und das vollkommene Stillstehen bei der Combination *IV* ist leicht zu zeigen. Diese vollständige Wirkungslosigkeit in der Combination *IV* hat sich auch bei den Versuchen des Hrn. Lecher¹⁾ gezeigt. Nur in der Erklärung der Wirkungslosigkeit gehen Hr. Lecher und ich weit auseinander; nach Hrn. Lecher soll die Wirkungslosigkeit der axialen Zuleitung in der unteren Hälfte dargethan werden, während nach meiner Auffassung die Wirkung des durchgeleiteten Stromes in der unteren Hälfte aufgehoben wird durch die genau gleiche aber entgegengesetzte Wirkung in der oberen Hälfte.

Bei den Versuchen über Inductionswirkung wurden die Combinationen *I* und *II* in der Art miteinander verglichen, dass der eine Draht an die Rinne angeschlossen und der andere abwechselungsweise oben und unten mit Punkten der Axe verbunden wurde. Das Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung oben verhielt sich zum Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung unten wie 100 zu 100,7, ein Unterschied, der aus den Beobachtungsfehlern sich vollauf erklärt. Auch wurde der Versuch so angestellt, dass man durch Umschalten einer Wippe, während der Apparat gleichförmig weiter rotirte, den Galvanometerdraht bald oben bald unten anschloss, dabei zeigte sich bei einer Ablenkung von mehr als 400 Teilstrichen eine nur ganz minime Aenderung, die offenbar von dem verschiedenen Widerstand oder störenden Thermostromen herührte.

Der Vergleich der Induction bei den Combinationen *II* und *III* gab das der Gleichheit sehr nahe Verhältnis 100 : 101,5.

Bei der Combination *IV* erhielt man selbstverständlich keine Inductionswirkung.

Die folgenden Versuche über die Bestimmung des Drehungsmomentes mit Bifilarsuspension gaben ganz entsprechende Resultate.

Das Verhältnis des Mittels aus acht Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wurde wie 100 zu 101,6, und bei einer anderen Versuchs-

1) E. Lecher, Wied. Ann. **54**, p. 283. Fig. 4. 1895; **69**, p. 781. Fig. 1. 1899.

reihe das Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wie 100 : 99,6 gefunden.

Es sei hier noch erwähnt, dass stets bei den miteinander verglichenen Combinationen die Stromzuleitungen an der gleichen Stelle der Rinne stattfanden.

Bei der Combination *IV* ergab auch das Durchleiten eines Stromes von 21 Ampère keine Spur von Ablenkung.

Wir gehen nun über zu dem Fall, wo nur der Magnet α excentrisch eingesetzt und der Magnet β durch einen Messing-

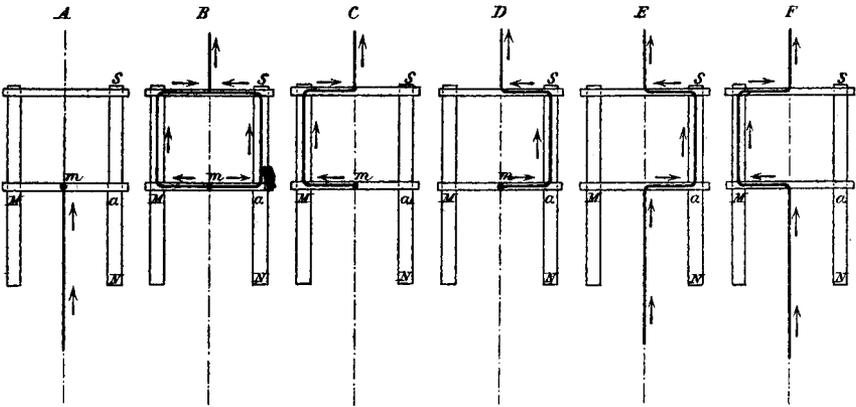


Fig. 13.

stab *M* ersetzt ist. In Fig. 13 sind sechs verschiedene Combinationen für die Durchleitung des Stromes gezeichnet.

Nach den oben entwickelten theoretischen Sätzen müssen die Combinationen *B*, *C* und *D* die gleiche Wirkung geben wie *A*, nur in entgegengesetztem Sinne, während bei *E* und *F* die Wirkung in der unteren Hälfte die gleich grosse Wirkung in der oberen Hälfte aufheben muss.

Die folgenden Versuche haben dies vollständig bestätigt.

Beim Durchleiten des Stromes tritt bei *A*, *B*, *C* und *D* Drehung ein, und zwar bei *A* eine positive, bei *B*, *C* und *D* eine negative. Auch bemerkt man sehr deutlich, dass hier bei der Anwendung von nur *einem* Magnet die drehende Kraft nur halb so gross ist; man muss 20–40 Ampère durch-

leiten, wenn man eine kräftige Drehung haben will. Bei den Combinationen E und F tritt absolut keine Wirkung ein.

Die Versuche über Induction ergaben für A , B , C , D Werte, die sich verhielten wie

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 100 & : 99,7 & : 101,8 & : 102,9, \end{array}$$

und die Versuche über Ablenkungen bei Bifilarsuspension Werte, die sich verhielten wie

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 100 & : 102,3 & : 102,4 & : 96,4. \end{array}$$

Aus diesen Zahlen darf auf Gleichheit der Wirkung geschlossen werden, da die verhältnismässig kleinen Abweichungen den durch die verschiedenen Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden dürfen. Auch machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Abweichungen bei den durch Induction und bei den durch Bifilarsuspension gefundenen Zahlen durchaus nicht parallel gehen. Dass in Bezug auf den Sinn der elektromotorischen Kräfte und der Drehungsmomente der Versuch mit der Theorie stimmte, ist selbstverständlich.

Für die Combinationen E und F war sowohl die Induction bei der Rotation des Apparates als die Drehung beim Leiten des Stromes durch den bifilar aufgehängten Apparat vollkommen Null.

Wir haben noch für den Apparat mit Doppelmagnet zu zeigen, inwiefern die aus der Theorie berechneten Drehungsmomente mit den durch den Versuch durch Bifilarsuspension ermittelten stimmten. Wir müssen also aus dem Biot-Savart'schen Gesetze ableiten, wie gross in diesem Fall das aus den inneren Kräften entstehende Drehungsmoment D_1 ist, und ferner untersuchen, ob hier der Strom in den äusseren, fest bleibenden Zuleitungsdrähten und in der Rinne einen Einfluss auf die Drehung der Magnete ausübt und wie gross derselbe ist.

Wir bezeichnen mit R (Fig. 11) den Radius der Rinne oder die Länge des fest mit den Magneten verbundenen Zuleitungsdrahtes, mit r den halben Abstand der Magnete, mit

l den halben Polabstand, mit μ_α und μ_β die Polstärken der Magnete α und β .

Der mit den Magneten verbundene verticale Zuleitungsdraht setzt sich fort in einem festen verticalen Zuleitungsdraht, den wir als unendlich betrachten können; das Drehungsmoment, das aus der Wirkung zwischen dem Magnet α und dem aus dem Unendlichen bis m gehenden Mitteldraht entsteht, erhalten wir, wenn das E in Fig. 6 ins Unendliche versetzt und somit a gleich ∞ gesetzt wird, es giebt das:

$$D_1 = \frac{2 \mu_\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}};$$

für die Wirkung zwischen dem Magnet α und der horizontalen mit dem Magnet drehbaren Zuleitung R ergiebt die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:

$$D_1 = -2 \mu_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}} \right),$$

und somit erhalten wir für das Drehungsmoment, das durch die Wirkung entsteht, welche der Magnet und der durch den verticalen und beweglichen horizontalen Draht geleitete Strom aufeinander ausüben, folgenden Wert:

$$D_1 = \frac{2 \mu_\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

und, wenn beide Magnete eingesetzt sind:

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

Nun kommt aber noch dazu die Wirkung des fest bleibenden horizontalen Zuleitungsdrahtes und des Stromes in der Rinne, weil diese Wirkung hier, wo die Magnete excentrisch eingesetzt sind, nicht Null ist. Wir bezeichnen das durch die äusseren Kräfte verursachte Drehungsmoment, mit welchem der Einheitsstrom in dem festen horizontalen Zuleitungsdrahte und in der Rinne auf unsere Magnete einwirkt, mit \mathfrak{D}_1 .

Dasselbe hängt von der gegenseitigen Lage der Magnete zu diesen Zuleitungen ab. Für die drei in Fig. 14 skizzierten Stellungen, wo nur ein Magnet eingesetzt ist, der Strom im axialen Mitteldraht von unten zugeleitet und in verschiedener

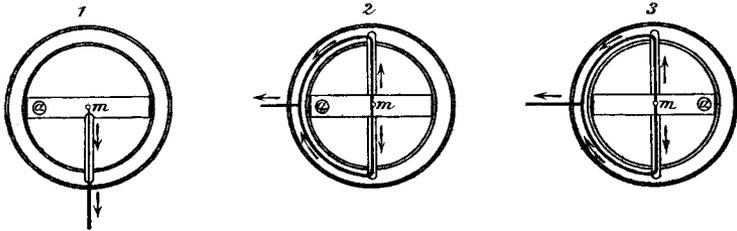


Fig. 14.

Weise aus der Rinne abgeleitet wird, finden wir für die Drehungsmomente durch eine leicht auszuführende Rechnung folgende Werte:

Bei Stellung 1.: herrührend von der horizontalen Zuleitung: Null, und herrührend von der Rinne, da kein Strom darin ist: Null, somit

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung 2.: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$-\frac{2r\mu_\alpha}{l} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-r}\right)^2}} \right),$$

herrührend von der Rinne:

$$2\mu_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2+r^2}{l^2}}} \right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = 2\mu_\alpha \left(\frac{r}{l} - \frac{r}{l\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-r}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2+r^2}{l^2}}} \right).$$

Bei Stellung 3.: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$-\frac{2r\mu_\alpha}{l} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R+r}\right)^2}} \right),$$

herrührend von der Rinne:

$$- 2 \mu_{\alpha} \left(- \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R+r}{l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = - 2 \mu_{\alpha} \left(\frac{r}{l} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left(\frac{l}{R+r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R+r}{l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right).$$

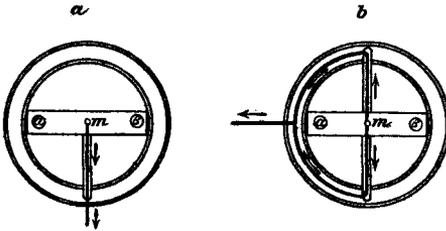


Fig. 15.

Für den Fall, dass die beiden Magnete eingesetzt sind, haben wir die beiden Stellungen *a* und *b* der Fig. 15 und folgende Formeln.

Bei Stellung *a*:

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung *b*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & 2(\mu_{\alpha} - \mu_{\beta}) \frac{r}{l} + 2 \mu_{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{l}\right)^2}} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-r}\right)^2}} \right) \\ & + 2 \mu_{\beta} \left(\frac{r}{l \sqrt{1 + \left(\frac{l}{R+l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R+r}{l}\right)^2}} \right) \\ & - \frac{2(\mu'_{\alpha} + \mu_{\beta})}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}}. \end{aligned}$$

Wenn $\mu_{\alpha} = \mu_{\beta} = \mu$, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & 2 \mu \left(\frac{r}{l \sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R+r}{l}\right)^2}} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-r}\right)^2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{l}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right) \end{aligned}$$

Wenn $r = 0$, so wird

$$\mathfrak{D}_1 = 0,$$

was das direct gefundene Resultat bestätigt, dass bei einem centrisch eingesetzten Magnet die Einwirkung der äusseren Zuleitungen gleich Null ist.

Diese Resultate der Rechnung wurden durch die folgenden Versuche bestätigt:

Bei der Stellung a ist die Wirkung der äusseren Zuleitung Null. Das Drehungsmoment entspricht in diesem Fall nur der Wirkung der inneren Kräfte; es wurde mittelst Bifilaraufhängung bestimmt zu

$$D_1 = 551,$$

während aus der theoretischen Formel

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}$$

bei Einsetzung der Werte $\mu_\alpha = 194$, $\mu_\beta = 179$, $r = 3$, $R = 5,45$ und $l = 6,25$ sich ergibt:

$$D_1 = 529;$$

auch hier ist, wie das zu erwarten war, das für den ideellen Magnet berechnete Drehungsmoment etwas kleiner als das für den wirklichen Magnet beobachtete.

Es wurde nun die horizontale Zuleitung in der Rinne um 90° verschoben, wodurch das Schema b entstand; nun kam, wie die Rechnung zeigte, zu dem obigen Drehungsmoment der inneren Kräfte noch die Einwirkung der äusseren Zuleitung und der Rinne. Es zeigte sich das auch deutlich bei der Beobachtung, indem das Drehungsmoment auf 716 stieg. Wir dürfen also annehmen, dass der Unterschied der beiden beobachteten Drehungsmomente, somit die Zahl 165, der von uns berechneten Einwirkung \mathfrak{D}_1 der äusseren Zuleitung und der Rinne entspricht. Wenn wir in unserer Formel die obigen durch Beobachtung gefundenen Werte einführen, so finden wir

$$\mathfrak{D}_1 = 130.$$

Auch hier erklärt sich der Unterschied des beobachteten und des berechneten \mathfrak{D}_1 aus den verschiedenen Bedingungen des wirklichen und des ideellen Magnets.

Bei einem zweiten Versuche wurde der Strom auf der Seite des schwächeren Magnets μ_β in die Rinne geführt, das Drehungsmoment war dann, wie es auch die Theorie verlangt, etwas schwächer.

Aus dem Vergleich des Apparates mit *einem* centrischen Magnet und des Apparates mit *zwei* excentrischen Magneten geht hervor, dass in dem ersten Falle die Drehung nur durch innere Kräfte erzeugt wird, während im zweiten Falle noch die Einwirkung der äusseren, von der fest bleibenden Zuleitung herrührenden Kräfte dazukommt; die letztere ist nicht constant, sie hängt ab von der Stellung zum Magnet und variirt in jedem Quadranten von Null zu dem von uns berechneten und beobachteten Maximalwerte.

Im Folgenden stellen wir die wesentlichen Resultate unserer Untersuchung zusammen.

1. *Die sämtlichen Erscheinungen, die unser Rotationsapparat, und zwar sowohl bei Anwendung von einem centrisch eingesetzten, als bei Anwendung von einem oder zwei excentrisch eingesetzten Magneten zeigte, entsprechen unter allen Umständen der Reversibilität zwischen Drehung durch den Strom und Induction durch die Drehung.*

2. *Die aus dem Biot-Savart'schen Gesetze berechneten Drehungsmomente und die daraus mit Hilfe des Satzes der Erhaltung der Energie abgeleiteten inducirten elektromotorischen Kräfte stimmen bei den sehr mannigfach abgeänderten Versuchen mit den beobachteten Grössen zu voller Befriedigung überein; man ist somit zu der Annahme berechtigt, dass diese Rotationen und Inductionerscheinungen sich vollkommen aus der bekannten, nach dem Biot-Savart'schen Gesetze wirkenden elektromagnetischen Kraft erklären lassen.*

3. *Die Abweichungen in den numerischen Werten der beobachteten und berechneten Grössen lassen sich, soweit sie nicht den durch verschiedene Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können, aus dem Unterschiede des ideellen und wirklichen Magnets erklären. Es können deshalb die mit einem drehbaren Magnet angestellten Bestimmungen des durch einen durchgeleiteten Strom erzeugten Drehungsmomentes oder des durch Drehung erzeugten Inductionsstromes dazu dienen, das Kraft-*

feld eines wirklichen Magnets und die Verteilung des freien Magnetismus im Magnet zu studiren.

4. Der von Hrn. Lecher erwähnte Fundamentalversuch ist also für uns ein Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes und verdient keineswegs die Bezeichnung eines theoretischen und experimentellen Trugschlusses.

III. Der König'sche Rotationsapparat.¹⁾

Hr. Lecher bespricht auch den Rotationsapparat der Herren Fleischmann und Walter König.²⁾ Es besteht derselbe, wie Fig. 16 andeutet, aus einem vom Strom durchflossenen Hohlcyylinder vom Radius R und einer Anzahl Hufeisenmagnete, die so miteinander verbunden sind, dass die Nordpole ausserhalb des Cylinders auf einem Kreise liegen und die Südpole in der Axe des Cylinders vereinigt sind. Der Hohlcyylinder und das Magnetbündel sind um die gleiche Axe drehbar. Wenn Hr. Lecher diesen Apparat als eine neue Form des alten Barlow'schen Rädchens bezeichnet, so habe ich insofern nichts dagegen, als bei demselben die Drehung nur durch die von aussen einwirkenden Kräfte zu stande kommt, nicht aber wie bei den von Hrn. Lecher und von mir untersuchten Rotationsapparaten auch durch die inneren Kräfte, die zwischen den fest miteinander verbundenen Teilen des drehbaren Körpers wirken. Immerhin hat der König'sche Apparat den sehr wichtigen Vorteil, dass man damit die vier Fälle zeigen kann: 1. nur der Magnet ist drehbar; 2. nur der Strom ist drehbar; 3. Magnet und Strom sind jeder für

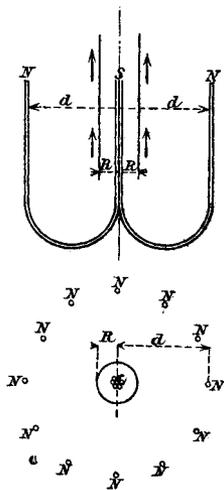


Fig. 16.

1) Diese Abhandlung war schon druckfertig, als ich das Heft Nr. 8 der Annalen der Physik, Bd. 2 erhielt, wo Hr. König auf p. 854 die Abhandlung des Hrn. Lecher bespricht; es gereicht mir zur grossen Befriedigung, zu sehen, dass Hr. König und ich in der Auffassung der verschiedenen Rotationsapparate vollkommen einig gehen.

2) L. Fleischmann, Zeitschr. f. physik. und chem. Unterricht 8. p. 361. 1895; W. König, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.

sich drehbar; 4. Magnet und Strom sind fest miteinander verbunden drehbar; während beim Barlow'schen Rad nur der Strom durch das magnetische Feld sich bewegt.

Die Theorie dieses hübschen Demonstrationsapparates lässt sich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze in folgender Weise ableiten:

In der Fig. 17 bedeutet der Kreis den Durchschnitt des vom Strom durchflossenen Cylinders, den wir uns nach oben

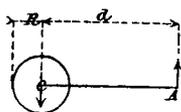


Fig. 17.

und unten ins Unendliche verlängert denken; der Sinn der Bewegung des Stromes gehe von unten nach oben, und seine Stärke sei i . Die Rechnung ergibt, dass, wenn ein Pol von der Stärke $+\mu$ in der centralen Axe C sich befindet, die Resultante der Wirkung des Stromes auf diesen Pol gleich Null ist. Liegt jedoch μ in einem äusseren Punkte A in der Distanz d von der Centralaxe, so wird μ senkrecht zu der Ebene, welche durch die Axe und den Pol geht, in der Richtung des Pfeiles gerade so getrieben, wie wenn der ganze Strom in der Centralaxe verlaufen würde, also mit einer Kraft $2i\mu/d$.

Um andererseits die Wirkung eines Poles in der Centralaxe C auf den Strom im Cylinder zu erhalten, denken wir uns den letzteren in lauter senkrechte Partialströme von der Stärke di zerlegt. Auf jeden wirkt der Strom tangential zum Cylinder mit einer Kraft $2di\mu/R$, und das giebt für die Gesamtwirkung das Drehungsmoment $2i\mu$. Befindet sich der Pol in A , so wirkt er auf den vom Strom durchflossenen Cylinder senkrecht zu der Ebene, in der Richtung des Pfeiles mit der Kraft $2i\mu/d$.

Wenn wir nun annehmen, dass alle Südpole von der Stärke $-\mu$ in dem Centrum C , alle Nordpole von der Stärke $+\mu$ auf einem Kreis vom Radius d sich befinden, wie das in Fig. 16 angedeutet ist, so haben wir folgendes:

1. Der vom Strom durchflossene Cylinder steht fest und die Magnete sind drehbar.

Die Wirkung des Stromes auf sämtliche Südpole ist Null; auf jeden Nordpol wirkt der Strom tangential zum Kreis vom Radius d mit einer Kraft $2i\mu/d$; somit ist das Dre-

hungsmoment, mit welchem der Strom auf die drehbaren Magnete wirkt:

$$2i \sum \mu.$$

2. Die Magnete stehen fest und der vom Strom durchflossene Cylinder ist drehbar. Je zwei einander gegenüberstehende Nordpole wirken auf den vom Strom durchflossenen Cylinder mit gleich grossen in entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräften; die Gesamtwirkung aller Nordpole auf den beweglichen Cylinder ist also Null. Die in *C* vereinigten Südpole hingegen wirken auf den Cylinder mit einem Drehungsmoment

$$- 2i \sum \mu.$$

3. Die Magnete und der Strom sind beide für sich drehbar. Auf die Magnete wirkt ein positives und auf den vom Strom durchflossenen Cylinder ein gleiches negatives Drehungsmoment; es drehen sich also beide in entgegengesetztem Sinne.

4. Die Magnete und der vom Strom durchflossene Cylinder sind fest miteinander verbunden und nur zusammen drehbar. Auf das feste System wirken zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Drehungsmomente; die Gesamtwirkung der inneren Kräfte ist also Null.

Diese aus der Theorie abgeleiteten Resultate stimmen vollkommen mit den Versuchen der Herren Fleischmann und König.

IV. Das Biot-Savart'sche Gesetz.

In einer gemeinsam ausgeführten Arbeit haben Biot und Savart durch Versuche festgestellt, dass ein unendlich langer geradliniger Strom auf einen Magnetpol mit einer Kraft wirkt, die der Stromstärke und der Polstärke proportional und der Distanz umgekehrt proportional ist. Für die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol oder ein magnetisches Element folgerte daraus Laplace, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Entfernung, und infolge weiterer Versuche zeigte Biot, dass sie proportional ist dem Sinus des Winkels, den die Stromrichtung mit der Verbindungslinie der beiden Elemente macht. Dies führte zu dem Ausdruck $i \mu \sin \vartheta ds / \rho^2$, welcher bald mit dem Namen der

Biot-Savart'schen, bald mit dem Namen der Laplace'schen Formel bezeichnet wird.¹⁾

Wie der folgende Gedankengang zeigen soll, führen Erfahrung und Logik notwendigerweise dazu, dass nur dieses Gesetz die Kraftbeziehung zwischen einem vom Strom i durchflossenen Leiterelement ds und einer Magnetismussmenge μ darstellen kann.

Die Wirkung des Stromelementes ds auf das magnetische Element μ lässt sich zerlegen in die Wirkung von $ds \sin \vartheta$ und $ds \cos \vartheta$. Zu dieser Zerlegung ist man einerseits berechtigt aus der Vorstellung der fließenden Elektrizität, auf die sich wie auf eine strömende Flüssigkeit der Satz des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten anwenden lässt, andererseits durch die Versuche, welche bekanntlich schon Ampère angestellt hat.²⁾

Was die Wirkung von $ds \cos \vartheta$ auf μ betrifft, so liegt hier μ in der Richtung des Stromelementes. Bestimmt ist in diesem Fall nur *eine* Richtung, nämlich die der Verbindungslinie, und es kann somit nur in dieser eine Kraftwirkung stattfinden. Es wäre denkbar, dass das Element μ abgestossen

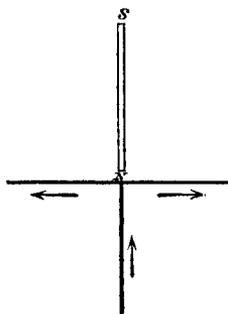


Fig. 18.

wird, wenn der Strom gegen dasselbe gerichtet ist, und angezogen, wenn der Strom von ihm herkommt; oder auch umgekehrt. Dass jedoch eine solche Wirkung nicht stattfindet, zeigt bekanntlich die Erfahrung. Zum Ueberfluss habe ich noch den Versuch angestellt, der in Fig. 18 angedeutet ist; wenn der gegen den Pol eines sehr leicht beweglichen längeren Magnets gerichtete Strom ca. 20 Ampère betrug, so war bei Stromschluss, Stromunterbrechung oder Stromumkehrung nicht die geringste Wirkung zu beobachten.

Die andere Komponente $ds \sin \vartheta$ steht senkrecht auf der Verbindungslinie von ds und μ ; in diesem Falle sind drei zu

1) J. B. Biot et F. Savart, Collection de mémoires relatifs à la physique publiés par la société française de physique 2. p. 80. 1885.

2) A. M. Ampère, Collection de mémoires 3. p. 12. 1887.

einander senkrechte Richtungen bestimmt, nämlich die Verbindungslinie, die Parallele zum Stromelement und die Normale zu der Ebene (ds, μ).

In der Richtung der Verbindungslinie kann aus logischen Gründen keine Kraft wirken, da der Sinn, in welchem die Kraft wirken soll, das heisst der Entscheid, ob μ in der Richtung der Verbindungslinie angezogen oder abgestossen wird, nicht aus der gegenseitigen Lage von $ds \sin \vartheta$ und μ bestimmt werden kann.

Eine Kraftwirkung nach der zum Stromelement $ds \sin \vartheta$ Parallelen wäre zwar logisch denkbar; allein die Versuche haben von einer solchen Kraftwirkung noch nie etwas nachweisen lassen.

Es bleibt somit für die Wirkung zwischen ds und μ nichts möglich, als die durch $ds \sin \vartheta$ bewirkte Kraftwirkung in der Richtung der Normalen zur Ebene (ds, μ). Diese muss aus logischen Gründen proportional sein der Stromstärke i und der Magnetismenmenge μ , da ja diese Grössen aus der Intensität der Kraftwirkung definirt sind, und ferner proportional der Länge $ds \sin \vartheta$, da die Wirkung die Summe ist der Wirkungen der einzelnen Teile, in die wir dieselbe zerlegen können. Da ferner die von Biot und Savart angestellten Versuche und die Rechnung von Laplace ergeben haben, dass die Wirkung dem Quadrate der Entfernung ρ umgekehrt proportional ist, was auch mit der von Coulomb ermittelten Abnahme der Fernwirkung übereinstimmt, so kann in der Richtung der Normalen nur eine Kraft wirken von der Grösse $i \mu \sin \vartheta ds / \rho^2$, die infolge der obigen Betrachtung als die einzig mögliche Kraftwirkung übrig bleibt. Dies ist aber nichts anderes als das Biot-Savart'sche Gesetz.

Der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, muss durch die Erfahrung bestimmt werden; er geht nach der Ampère'schen Regel, das heisst so, dass der Nordpol nach links getrieben wird, wenn man mit dem Strome schwimmt und den Pol ansieht.

Es handelt sich nun noch darum, die reciproke Wirkung von μ auf ds zu bestimmen.

Bekanntlich lautet der dritte von Newton in seinen Prinzipien aufgestellte Grundsatz:

Actioni contrariam semper aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Bei den zwischen zwei Punkten A und B in der Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kräften folgt aus dem obigen Grundsatz, dass, wenn A festgehalten wird, B nach A hin- oder von A weggetrieben wird, je nachdem wir eine anziehende oder eine abstossende Kraft haben; dass ebenso, wenn B festgehalten wird, mit der gleichen Kraft A nach B hin- oder von B weggetrieben wird; sind die beiden Punkte frei beweglich, so werden sie beiderseits mit der gleichen Kraft zu einander oder voneinander getrieben; sind die beiden Punkte fest miteinander verbunden, so ist Annäherung oder Entfernung unmöglich, also ist die Wirkung der Kraft Null.

Im vorliegenden Falle des Biot-Savart'schen Gesetzes haben wir nicht die obige Bedingung einer in der Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kraft; die Anwendung des Newton'schen Grundsatzes muss sich deshalb auch etwas anders gestalten. Wenn ds fest ist, wirkt auf μ eine zur Ebene (ds, μ) senkrecht wirkende Kraft, was einem statischen Moment entspricht, dessen Axe in der Ebene (ds, μ) durch ds geht und senkrecht auf der Verbindungslinie steht; es wird also durch dieses Moment μ um das feste ds herumgetrieben. Wenn man nun den Newton'schen Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung anwenden will, so muss man in Betracht ziehen, dass an die Stelle der Kraft, die eine lineare Beschleunigung erteilt, in unserem Falle ein Moment tritt, das eine Winkelbeschleunigung liefert. Im vorigen Falle schlossen wir auf eine gleiche Kraft, mit der B nach A oder A nach B getrieben wird, je nachdem A oder B fest ist; in unserem Falle schliessen wir ganz analog auf ein gleiches Moment, mit dem μ um ds oder ds um μ getrieben wird, je nachdem ds oder μ fest ist. Wir sind also berechtigt anzunehmen, dass, wenn μ festgehalten wird, das gleiche aus der gegenseitigen Wirkung entstehende Moment die Bewegung von ds um μ bewirkt; oder dass das Element ds mit der Kraft $i\mu \sin \vartheta ds/\rho^2$ senkrecht zu der Ebene (ds, μ) oder senkrecht zu der durch Stromrichtung und Feldrichtung gehenden Ebene getrieben wird. Der Sinn der Bewegung wird in diesem

Falle durch die Fleming'sche Regel bestimmt, nach welcher der Sinn der Bewegung des Elementes zum Sinn der Feldrichtung und der Stromrichtung die gleiche Stellung hat wie der Daumen zum Zeigefinger und zum Mittelfinger an der linken Hand.

Sind ds und μ fest miteinander verbunden, so heben sich in diesem Falle die Kräfte nicht auf, sondern es entsteht ein Kräftepaar, das dem Körper eine Drehung erteilt. Wie schon Ampère¹⁾ bemerkt hat, widerspricht es den ersten Grundsätzen der Dynamik, dass aus der gegenseitigen Kraftwirkung verschiedener Teile des gleichen festen Körpers eine Bewegung entstehe. Allein dieser Widerspruch fällt, wie wir oben gezeigt haben, weg, sobald man in Betracht zieht, dass die Elektrizität an fest bleibenden Punkten zu- und abgeleitet wird, und dass die bei der Bewegung des Leiters durch das magnetische Feld erzeugte Induction den Widerspruch mit dem Satze von der Erhaltung der Energie beseitigt. So bildet die erst mehrere Jahre nach den Arbeiten von Oersted, Biot und Ampère durch Faraday entdeckte Induction eine notwendige Ergänzung zu dem Gesetze der elektromagnetischen Wirkung.

Wenn man der aus dem Newton'schen Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gefolgerten Reciprocität Ausdruck geben will, so kann man unter Voraussetzung des Coulomb'schen Gesetzes für die Wirkung zweier magnetischer Elemente aufeinander, die durch das Biot-Savart'sche Gesetz gegebenen Beziehungen zwischen dem Stromelement ds und dem magnetischen Element μ noch deutlicher durch die folgenden zwei Gesetze ausdrücken:

1. Ein von dem Strom i durchflossenes Leiterelement ds erzeugt in einem beliebigen Punkte des Raumes, der um ρ von ds absteht, ein Kraftfeld von der Stärke $i \sin \vartheta ds / \rho^2$, dessen Richtung senkrecht steht auf der Ebene (ds, μ) und dessen Sinn bestimmt wird durch die Ampère'sche Regel.

2. In einem magnetischen Feld von der Stärke f wird ein vom Strom i durchflossenes Leiterelement ds getrieben mit einer Kraft $f i ds$, deren Richtung senkrecht steht zu der durch Feld-

1) A. M. Ampère, Collect. de mém. 3. p. 226. 1887.

richtung und ds gehenden Ebene, und deren Sinn durch die Fleming'sche Regel bestimmt wird.

V. Die Formeln von Ampère und Grassmann.

Bekanntlich hat Ampère die Kraft, mit welcher zwei Stromelemente aufeinander wirken, als elektrodynamische Action bezeichnet und das Gesetz für dieselbe aufgestellt. Er ging dabei von der Voraussetzung aus, dass diese Kraftwirkung gerade so gut wie die zweier Massen, zweier Magnetismusk mengen oder zweier Elektrizitätsmengen in der Richtung der Verbindungslinie stattfinden müsse, und gelangte durch die aus einigen Versuchen gezogenen Folgerungen auf höchst genialem Wege zu der bekannten Formel, welche bei Zugrundelegung der (C. G. S.)-Einheiten folgendermaassen lautet:

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 (-2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}{\rho^2},$$

dabei bedeuten i_1 und i_2 die beiderseitigen Stromstärken in den Leiterelementen ds_1 und ds_2 , ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, die ds_1 und ds_2 mit der Verbindungslinie ρ bilden und φ den Neigungswinkel der Ebene (ds_1, ρ) zur Ebene (ds_2, ρ).

Man kann die Formel auch schreiben:

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 (-2 \cos \varepsilon + 3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}{\rho^2},$$

wenn ε den Winkel bedeutet, den die Richtungen von ds_1 und ds_2 miteinander bilden.

Ferner zeigte Ampère, dass man einen Elementarmagnet in seiner Wirkung ersetzen kann durch einen Elementarmagnet, dessen Ebene senkrecht steht zur Axe des Elementarmagnets, und für welchen das Product der Stromstärke mit der umflossenen Fläche gleich ist dem Momente des Elementarmagnets; dadurch konnten die magnetischen und elektromagnetischen Wirkungen aus der elektrodynamischen Kraft erklärt werden.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass die Drehungswirkungen, die nach unserer Ansicht durch innere, das heisst von den einzelnen Teilen des starren Körpers ausgehende Kräfte erzeugt werden, unmöglich aus der in der Verbindungslinie der Elemente wirkenden elektrodynamischen Kraft erklärt

werden können. Es existirt also hier ein Widerspruch zwischen dem Biot-Savart'schen Gesetze und der Ampère'schen Formel, der noch aufgeklärt werden muss.

Zu dem Satze, dass zwei Elemente nur in der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken können, wird man aus logischen Gründen gezwungen, wenn die Elemente Punkte sind, die weder Richtung noch Sinn haben, da in diesem Falle nur die Richtung bestimmt ist, welche durch die beiden Elemente geht. Es gilt dies für Massenpunkte, für magnetische Pole und für in einem Punkte concentrirte elektrische Mengen. Bei Stromelementen, wo beiderseits Richtung und Sinn der Elektrizitätsbewegung gegeben sind, liegen die Verhältnisse anders. Ausser der Verbindungslinie sind auch andere Richtungen bestimmt, und die Logik verlangt nur, dass für beide Elemente Richtung und Sinn der Kraftwirkung aus den vorliegenden Grössen sicher und eindeutig bestimmt sind.

Wir verzichten also auf die Bedingung, dass die elektrodynamische Kraft in der Richtung der Verbindungslinie wirken müsse und leiten unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze in der folgenden einfachen Weise die Formel für die elektrodynamische Kraft ab.

Das Element ds_1 bewirkt bei ds_2 ein magnetisches Kraftfeld von der Stärke $i_1 ds_1 \sin \vartheta_1 / \rho^2$, dessen Richtung senkrecht steht zu der Ebene (ds_1, ρ), und dessen Sinn durch die Ampère'sche Regel gegeben ist. Infolge dessen wird das Element ds_2 mit der Kraft

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \sin \vartheta_1 \sin \psi_2}{\rho^2}$$

in der Richtung getrieben, die normal steht zu der Ebene (Feldrichtung, ds_2); der Sinn der Kraft ist durch die Fleming'sche Regel bestimmt. ψ_2 ist der Winkel, den das Element ds_2 mit der Feldrichtung am Orte von ds_2 macht, und ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin^2 \psi_2 = 1 - \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \varphi;$$

$ds_2 \sin \psi_2$ ist die Projection von ds_2 auf die Ebene (ds_1, ρ).

In ganz gleicher Weise wird das Element ds_1 mit der Kraft

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_1}{\rho^2}$$

senkrecht zu der Ebene (Feldrichtung, ds_1) getrieben; auch hier ist der Sinn der Kraftwirkung durch die Fleming'sche Regel bestimmt. ψ_1 ist der Winkel, den das Element ds_1 mit der Feldrichtung am Orte von ds_1 macht.

Der hier unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitete Ausdruck stimmt genau überein mit der Formel, die auf ganz anderem Wege schon im Jahre 1845 Grassmann und im Jahre 1877 unabhängig davon wieder auf anderem Wege Clausius abgeleitet hat.¹⁾

Wenn $\varphi = 0$ und $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 90^\circ$, so giebt die Grassmann'sche Formel:

Wirkung von ds_1 auf ds_2 : $i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \rho^2$ nach ds_1 hin,

Wirkung von ds_2 auf ds_1 : $i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \rho^2$ nach ds_2 hin,

folglich

Anziehung zwischen ds_1 und ds_2 : $-2 i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \rho^2$;

setzen wir $\vartheta_1 = 90^\circ$ und $\vartheta_2 = -90^\circ$, so bekommen wir:

Abstossung zwischen ds_1 und ds_2 : $+2 i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \rho^2$;

für die Wirkung zweier Stromelemente, die in *einer* Ebene liegen und auf der Verbindungslinie senkrecht stehen, geben also die Ampère'sche und die Grassmann'sche Formel gleiche Werte.

Die Wirkung eines *geschlossenen Stromes* auf einen Elementarmagnet ist sowohl nach der Ampère'schen als nach der Grassmann'schen Formel stets gleich der Wirkung auf einen unendlich kleinen Kreisstrom.²⁾ Wenn man jedoch die Wirkung eines *Stromelementes* betrachtet, so macht sich der folgende Unterschied geltend.

Wenn wir ein Stromelement und einen Elementarmagnet haben, die beide in *einer* Ebene liegen und zu der Verbindungslinie senkrecht stehen, so wirkt nach dem Biot-Savart'schen Gesetze das Stromelement auf den Elementarmagnet mit einem Drehungsmomente $i M ds / \rho^2$, wenn M das Moment des Elementarmagnets bedeutet.

1) H. Grassmann, Pogg. Ann. 64. p. 1. 1845; R. Clausius, Crelle's Journ. 82. p. 85. 1877; H. Grassmann, l. c. 83. p. 57. 1877; R. Clausius, l. c. 83. p. 262. 1877.

2) F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von K. VonderMühlh. p. 107. Leipzig 1884.

Die Wirkung des Stromelementes auf einen den Elementarmagnet ersetzenden Kreisstrom ist nach der Ampère'schen Formel Null, da für alle Elemente des Kreisstromes \mathcal{P}_1 und φ gleich 90° ist, nach der Grassmann'schen Formel $i F i_1 ds/\rho^2$, wenn F die umflossene Fläche und i_1 die Intensität des Kreisstromes bedeutet.

Die Ampère'sche Theorie der Ersetzung des Elementarmagnets durch den Kreisstrom gilt also bei Anwendung der Grassmann'schen Formel auch für die Wirkung zwischen Stromelement und Elementarmagnet. Es kann ferner ganz allgemein gezeigt werden, dass bei Annahme des Biot-Savart'schen Gesetzes einerseits der Elementarmagnet und der unendlich kleine Kreisstrom genau das gleiche magnetische Feld im Raume erzeugen, und dass andererseits der Elementarmagnet und der unendlich kleine Kreisstrom im gegebenen magnetischen Feld von dem gleichen Kräftepaare gedreht werden, dass somit in allen denkbaren Fällen Elementarmagnet und unendlich kleiner Kreisstrom sich ersetzen können.

Aus den angestellten Betrachtungen ergibt sich also:

Auch die Rotationen, welche wir als Wirkung der inneren Kräfte auffassen, wenn ein elektrischer Strom durch eine starre um eine Axe drehbare Verbindung von Magneten und Leitern hindurchgetrieben wird, lassen sich nach der Ampère'schen Theorie aus den zwischen den einzelnen Teilen des Körpers wirkenden elektrodynamischen Kräften erklären, wenn man die Ampère'sche Formel durch die Grassmann'sche ersetzt.

Es entsteht nun noch die Frage, ob die von uns als Wirkung der inneren Kräfte aufgefassten Rotationen nicht auch aus der von Ampère für die elektrodynamische Kraft aufgestellten Formel erklärt werden können.

Dass die inneren Kräfte die Drehung nicht erklären können, wenn die Stromelemente nach der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken, ist selbstverständlich; es bleibt also nur die Möglichkeit, die Rotation aus der Wirkung des festen Zuleitungsdrahtes zu erklären.

Wir halten uns an den Apparat Fig. 5 (p. 246). Dass hier der feste Zuleitungsdraht, der horizontal von der Distanz R bis ins Unendliche geht, nach dem Biot-Savart'schen Gesetze keine Drehung des Magnets um seine verticale

Axe bewirken kann, haben wir weiter oben gesehen. Ebenso leicht ist zu beweisen, dass der feste Zuleitungsdraht bei Anwendung der Grassmann'schen Formel kein Drehungsmoment um die verticale Axe liefern kann, wenn wir den Magnet durch ein Solenoid ersetzen, das heisst durch eine Walze von der Länge $2l$ und dem im Vergleich zu l und R kleinen Radius r , welche von einem der Bedingung $2l\mu = \pi i_1 r^2$ entsprechenden Strome i_1 umflossen ist. Nach Grassmann wirkt nämlich die von ds_2 oder einem Elemente des Zuleitungsdrahtes ausgehende elektrodynamische Kraft stets senkrecht auf die Ebene (Feldrichtung, ds_1) und also auch senkrecht auf ds_1 ; die Componente in der Richtung von ds_1 , das heisst in der zum Drehen um die verticale Axe notwendigen Richtung des Solenoidumfanges, ist also Null.

Anders verhält sich die Sache, wenn man von der Ampère'schen Formel ausgeht; die Ausführung dieser nicht schwierigen Rechnung ergibt für das Drehungsmoment, mit welchem ein äusserer horizontaler aus dem Unendlichen bis zur Rinne vom Radius R führender Zuleitungsdraht auf das Solenoid wirkt, den Wert

$$- 2 \mu i_2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

wir haben also für das von *äusseren* Kräften herrührende Drehungsmoment bei der Stromstärke *eins*:

$$\mathfrak{D}_1 = - 2 \mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

also genau den gleichen Wert, den wir bei Annahme des Biot-Savart'schen Gesetzes oder der Grassmann'schen Formel für das aus den *inneren* Kräften sich ergebende Drehungsmoment gefunden haben.

Es ergibt sich also für die Beziehungen zwischen den Formeln von Biot-Savart, Ampère und Grassmann folgendes:

Die Drehung eines um seine Axe drehbaren Magnets nach dem Schema der Fig. 5 kann einerseits aus dem Biot-Savart'schen Gesetz oder aus der Grassmann'schen Formel, andererseits aber auch aus der Ampère'schen Formel abgeleitet werden.

Bei der Erklärung nach Biot-Savart oder Grassmann wird die Wirkung erzeugt durch die *inneren* Kräfte, das heisst durch solche, die zwischen Teilen des drehbaren starren Körpers wirken, während die Einwirkung des äusseren festen zur Rinne führenden horizontalen Drahtes Null ist.

Bei der Erklärung aus der Ampère'schen Formel heben sich die inneren Kräfte in ihrer Wirkung auf, während die Einwirkung des festen *äusseren* Drahtes das Drehungsmoment liefert.

In beiden Fällen wird der Widerspruch mit dem Satze der Erhaltung der Energie nur durch Herbeiziehung der Induction aufgehoben, da ohne dieselbe das Drehungsmoment bei Beseitigung des Reibungswiderstandes eine bis ins Unendliche zunehmende Winkelgeschwindigkeit erzeugen würde.

Bei Annahme der Grassmann'schen Formel gestaltet sich alles bei der Erklärung der Rotation und der Induction viel einfacher und übersichtlicher, weil die *gleiche* Auffassung für die Ableitung der Erscheinung aus der *elektromagnetischen* und aus der *elektrodynamischen* Kraft gilt, und weil auch die Vorstellung der magnetischen Kraftlinien bei der Erklärung verwendbar ist, indem das gleiche magnetische Kraftfeld aus dem Biot-Savart'schen Gesetze und aus der Grassmann'schen Formel sich ableiten lässt.

Bei Anwendung der Ampère'schen Formel gelangt man zwar auch zum richtigen durch die Erfahrung bestätigten Resultat; aber es bleibt der Widerspruch, dass der gleiche Wert des Drehungsmomentes, welcher *elektromagnetisch* aus der Wirkung der *inneren* Kräfte sich ergibt, *elektrodynamisch* der Wirkung der *äusseren* Kräfte zugeschrieben werden muss.

Wir fügen noch die historische Notiz bei, dass Ampère, der zuerst mit einem unten mit Platin beschwerten, in Quecksilber senkrecht schwimmenden Magnet den Versuch nach dem Schema der Fig. 5 angestellt hat, die drehende Wirkung von der festen Zuleitung ausgehen liess und annahm, dass die inneren Kräfte sich aufheben.¹⁾ Für die Grösse des Drehungsmomentes gab er schon den richtigen Wert.²⁾

1) A. M. Ampère, Collection de mémoires 2. p. 387. 1885; 3. p. 258. 1887.

2) l. c. 3. p. 262. 1887.

Als diese Arbeit schon abgeschlossen war, fand ich, dass Hr. E. Wiechert¹⁾ schon vor mir die Grassmann'sche Formel unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitet hat.

Schliesslich möchte ich noch den Dank aussprechen an meinen Collegen, Hrn. Prof. VonderMühlh, der mich auf manche wichtige mathematische Beziehungen und Sätze aufmerksam gemacht, und an Hrn. Dr. H. Veillon, der bei der Ausführung und Berechnung der Versuche mich wesentlich unterstützt hat.

1) E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik p. 25, in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal. Leipzig 1899.

(Eingegangen 5. November 1900.)
