

Über definite Polynome.

Von

A. HURWITZ in Zürich.

In einer Arbeit über die Nullstellen der Besselschen Funktion*) habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Wenn das reelle, nicht identisch verschwindende Polynom

$$(1) \quad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{2n} x^{2n}$$

für jeden reellen Wert von x positiv oder Null ist, so ist das Polynom

$$(2) \quad f_1(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(2n)}(x)$$

für jeden reellen Wert von x positiv.

Ein Satz von demselben Charakter tritt in den an Herrn Hilberts Beweis des Waringschen Theorems anknüpfenden Untersuchungen der Herren Hausdorff, Stridsberg und Remak**) auf; nämlich der Satz:

Wenn das reelle, nicht identisch verschwindende Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{2n} x^{2n}$$

für jeden reellen Wert von x positiv oder Null ist, so ist das Polynom

$$(3) \quad f_2(x) = f(x) + \frac{1}{1!} f''(x) + \frac{1}{2!} f^{(4)}(x) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(2n)}(x)$$

für jeden reellen Wert von x positiv.

Die beiden Sätze ergeben sich unmittelbar aus den nachstehenden Darstellungen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ durch Integrale:

$$(4) \quad f_1(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} f(x+u) du, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} f(x+u) du.$$

*) Math. Ann. 33, S. 259.

**) Hausdorff, Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems, Math. Ann. 67, S. 301.

Stridsberg, Sur la démonstration de M. Hilbert du théorème de Waring, Math. Ann. 72, S. 145.

Remak, Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems, ib. S. 153.

Da indessen die Sätze rein algebraischer Natur sind, so wird man fordern dürfen, daß auch ihre Beweise nur algebraische Hilfsmittel benutzen sollen. Für den zweiten Satz hat Herr Remak a. a. O. dieser Forderung genügt. Seine Betrachtungen haben mich auf die in den folgenden Zeilen dargestellten sehr einfachen und übersichtlichen Beweise geführt.

Die Polynome $f_1(x)$ und $f_2(x)$ fasse ich in der Form

$$(5) \quad F(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_{2n} f^{(2n)}(x)$$

zusammen, wobei a_0, a_1, a_2, \dots Zahlenkoeffizienten bezeichnen. Die Annahme

$$(6) \quad a_i = 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

führt auf die Funktion $f_1(x)$, die Annahme

$$(7) \quad a_i = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\right)!} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

auf die Funktion $f_2(x)$, wobei hinzuzufügen ist, daß für $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}i\right)!}$ der Wert Null einzutreten hat, wenn $\frac{1}{2}i$ keine ganze Zahl ist.

Mit Herrn Remak bemerke ich zunächst, daß es genügt, den Fall zu betrachten, wo

$$(8) \quad f(x) = \varphi^2(x),$$

d. h. $f(x)$ das Quadrat eines reellen Polynoms $\varphi(x)$ ist. In der Tat läßt sich ein Polynom $f(x)$, welches für jeden reellen Wert von x positiv oder Null ist, stets als Summe von Quadraten reeller Polynome darstellen, wie das aus der Zerlegung von $f(x)$ in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades unmittelbar hervorgeht.

Nun ist die k^{te} Ableitung von $\varphi^2(x)$ gleich

$$k_0 \varphi^{(0)}(x) \varphi^{(k)}(x) + k_1 \varphi'(x) \varphi^{(k-1)}(x) + k_2 \varphi''(x) \varphi^{(k-2)}(x) + \cdots + k_k \varphi^{(k)}(x) \varphi^{(0)}(x),$$

$$(\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)),$$

unter k_0, k_1, k_2, \dots die Binomialkoeffizienten zur Basis k verstanden. Daher kommt

$$F(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \sum_{r+s=k} k_r \varphi^{(r)}(x) \varphi^{(s)}(x) = \sum_{r,s}^{0,1,\dots,n} a_{r+s} (r+s)_r \varphi^{(r)}(x) \varphi^{(s)}(x).$$

Demnach ist $F(x)$ der Wert, welchen die quadratische Form

$$(9) \quad \Phi = \sum_{r,s}^{0,1,\dots,n} a_{r+s} (r+s)_r x_r x_s$$

der Variablen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ für

$$(10) \quad x_0 = \varphi(x), \quad x_1 = \varphi'(x), \quad x_2 = \varphi''(x), \quad \dots, \quad x_n = \varphi^{(n)}(x)$$

annimmt. Da nun $\varphi(x)$ immer so gewählt werden kann, daß für einen bestimmten Wert von x , z. B. für $x=0$, die aus (10) berechneten Werte $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ mit beliebig vorgeschriebenen Werten zusammenfallen, so gilt:

Soll $F(x)$ für jeden Wert von x und jede Wahl des Polynoms $\varphi(x)$ positiv sein, so ist hierzu erforderlich und hinreichend, daß die Form Φ eine positive Form ist.

Während nun Herr Remak (für den Fall, wo die Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots durch die Annahme (7) bestimmt sind) durch die Berechnung der Hauptunterdeterminanten der Determinante der Form Φ den Nachweis erbringt, daß Φ eine positive Form ist, stelle ich diese Form direkt als Summe von Quadraten reeller linearer Formen dar.

Sind erstens die Zahlen a_0, a_1, \dots sämtlich gleich 1, so benutze ich die bekannte Gleichung

$$(11) \quad (r+s)_r = r_0 s_0 + r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_n s_n \quad (r, s = 0, 1, 2, \dots, n),$$

wobei jeder Binomialkoeffizient r_k (bzw. s_k) gleich Null zu setzen ist, wenn $k > r$ (bzw. $k > s$) ist. Dieser Gleichung zufolge wird

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{r,s} r_0 s_0 x_r x_s + \sum_{r,s} r_1 s_1 x_r x_s + \dots + \sum_{r,s} r_n s_n x_r x_s, \\ &= \left(\sum_r r_0 x_r \right)^2 + \left(\sum_r r_1 x_r \right)^2 + \dots + \left(\sum_r r_n x_r \right)^2, \\ &= (x_0 + x_1 + \dots + x_n)^2 + (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)^2 + \dots + x_n^2. \end{aligned}$$

Sind zweitens die Zahlen a_0, a_1, \dots durch die Gleichungen (7) bestimmt, so gilt die Beziehung

$$(12) \quad a_{r+s}(r+s)_r = a_r a_s + \frac{2^1}{1!} a_{r-1} a_{s-1} + \frac{2^2}{2!} a_{r-2} a_{s-2} + \dots + \frac{2^n}{n!} a_{r-n} a_{s-n}$$

$$(r, s = 0, 1, 2, \dots, n),$$

wobei a_k gleich Null zu setzen ist, wenn k negativ ist. Unter Benutzung von (12) ergibt sich nun sofort

$$\Phi = \left(\sum_r a_r x_r \right)^2 + \frac{2^1}{1!} \left(\sum_r a_{r-1} x_r \right)^2 + \frac{2^2}{2!} \left(\sum_r a_{r-2} x_r \right)^2 + \dots + \frac{2^n}{n!} x_n^2.$$

Was die Gleichung (12) angeht, so braucht sie nur für den Fall bewiesen zu werden, wo $r+s$ gerade ist. Denn anderenfalls verschwinden alle Glieder dieser Gleichung. Ist aber $r+s$ gerade, so entwickle man die beiden Seiten der Identität

$$(x+y)^{r+s} = (x^2 + y^2 + 2xy)^{\frac{r+s}{2}}$$

nach dem binomischen, bzw. polynomischen Lehrsatz und vergleiche die Koeffizienten von $x^r y^s$. Hierdurch kommt

$$(r+s)_r = \left(\frac{r+s}{2} \right)! \sum \frac{2^k}{h! i! k!},$$

wo die Summe über die nicht negativen Zahlen h, i, k , welche den Bedingungen

$$2h + k = r, \quad 2i + k = s$$

genügen, zu erstrecken ist. Es wird also

$$a_{r+s}(r+s)_r = \sum_{k=0,1,2,\dots} \frac{2^k}{k!} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r-k}{2}\right)!} \frac{1}{\left(\frac{s-k}{2}\right)!},$$

wobei die Glieder der Summe, für welche $\frac{r-k}{2}$ oder $\frac{s-k}{2}$ keine nicht-negative ganze Zahl ist, fortzulassen sind. Die letztere Gleichung ist aber offenbar mit der Gleichung (12) identisch.

Sollen irgend $2n$ Zahlen

$$(13) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

die Eigenschaft besitzen, daß das Polynom (5) immer dann beständig positiv ist, wenn das Polynom $f(x)$ der Bedingung $f(x) \geq 0$ genügt, so ist hierfür nach dem Obigen erforderlich und hinreichend, daß die Form (9) eine positive Form ist. Es müssen also (vgl. Remak, l. c.) die Hauptunterdeterminanten

$$(14) \quad \Delta_0 = a_0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ a_2 & 3a_3 & 6a_4 \end{vmatrix}, \dots$$

der Determinante der Form Φ sämtlich positiv sein. Man erkennt hieraus leicht, daß die Zahlen a_1, a_3, a_5, \dots willkürlich wählbar sind, während sich für die übrigen Zahlen a_0, a_2, a_4, \dots aus den Bedingungen $\Delta_0 > 0$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots$ sukzessive untere Grenzen ergeben.

Zahlensysteme, welche die hier betrachtete Eigenschaft besitzen, werden übrigens, wie man leicht erkennt, durch folgenden Ansatz erhalten. Man bezeichne mit

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_{2n}$$

irgend $2n + 1$ positive Größen, mit

$$r_0, r_1, \dots, r_{2n}$$

irgend $2n + 1$ reelle, untereinander verschiedene Größen und setze dann

$$(15) \quad a_k = \frac{1}{k!} (p_0 r_0^k + p_1 r_1^k + \dots + p_{2n} r_{2n}^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n).$$

Es ist auch nicht schwierig zu beweisen, daß durch diesen Ansatz das allgemeinste in Betracht kommende Zahlensystem (13) entsteht.

Zürich, 12. Juni 1912.