SOPRA UNA FORMULA DI CALCOLO INTEGRALE.

Nota di **G. Morera**, in Genova.

Adunanza del 22 dicembre 1895.

La notissima formula:

$$\int \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}\,dS = \int f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - f_0(\sigma)_0,$$

dove:

f indica una funzione monodroma, continua e finita nello spazio S contornato dalla superficie σ;

r il raggio vettore spiccato da un polo qualunque;

n la normale alla superficie rivolta verso l'interno;

f_0 il valore di f nel polo;

$(\sigma)_0$ l'angolo visuale sotto cui dal polo è veduta la superficie σ,

è suscettibile di una *facile generalizzazione,* che torna utile in parecchie questioni di Fisica matematica.

Col procedimento di integrazione per coordinate polari col quale si dimostra la formula ricordata, si perviene facilmente al seguente lemma.

Se f è una funzione monodroma, continua e finita nello spazio S, *ove essa ammette la derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial r}$ *atta all'integrazione* (*), *e* φ *è una funzione monodroma, generalmente continua, e finita della direzione del raggio* r, *uscente da un polo esterno ad* S, *si ha:*

$$\int \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} d S = \int \varphi f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma. \tag{I}$$

Di quì segue, per $f = 1$:

$$\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma = 0,$$

formula dalla quale si traggono ovviamente le seguenti conseguenze.

Se il polo dei raggi è interno allo spazio chiuso dalla superficie σ, l'integrale

$$\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma$$

non muta al deformarsi di σ, purchè la superficie non raggiunga il polo. Adunque, indicata con Σ la superficie sferica avente il suo centro nel polo e per raggio l'unita, sarà, quando il polo è interno:

$$\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma = \int \varphi \, d \Sigma.$$

Analogamente si conclude che l'integrale

$$\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma,$$

(*) Qui, come nella dimostrazione di formule congeneri, nulla è necessario presupporre circa la derivata parziale all'infuori della sua esistenza e della sua integrabilità.

esteso ad una qualunque porzione di superficie, su cui non è situato il polo, non muta se, tenuto fisso il contorno, detta porzione si deforma a piacere senza però raggiungere od oltrepassare il polo.

Sicchè detto integrale sarà uguale a $\pm \int \varphi \, d\Sigma$ esteso alla projezione della superficie sulla sfera di raggio uno fatta dal polo, essendo da scegliersi il segno superiore o l'inferiore secondochè dal polo si vede la faccia della superficie rivolta dalla parte della normale n, oppure la faccia opposta.

Dovunque sia il polo la (I) continua a sussistere se nel polo la funzione f prende con continuità il valor zero. Per dimostrarlo basta escludere dal campo d'integrazione un'intorno del polo, e poi passare al limite quando l'intorno divenga evanescente.

Se la funzione f prende nel polo il valor f_0 la (I) sarà applicabile alla funzione $f - f_0$, e così risulta:

$$\int \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} d S = \int \varphi f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - f_0 \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma. \tag{II}$$

Questa formula vale in ogni caso, giacchè se il polo è esterno l'ultimo integrale è, come sopra si è detto, uguale a zero.

Se il polo è interno, l'ultimo integrale è uguale $\int \varphi \, d\Sigma$ esteso a tutta la sfera di raggio uno. Se il polo è sulla superficie in un punto ove questa ammette un piano tangente determinato, l'integrale anzidetto è uguale a $\int \varphi \, d\Sigma$ esteso all'emisfero, limitato dal piano tangente e che si trova dalla parte in cui va la normale interna alla superficie, elevata dal polo.

Se per esempio:

$$\varphi = \cos(r, s),$$

dove s indica una direzione fissa; si ha:

$$\int \cos(r, s) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int \cos(r, s) \, d\Sigma = 0$$

quando il polo sia interno; e

$$(3) \qquad \int \cos(r,\ s) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \pi \cos(n_0,\ s) \ (*),$$

dove n_0 indica la normale interna condotta dal polo, quando questo sia sulla superficie in un punto non singolare.

Il calcolo del *potenziale sopra sè stesso di un corpo omogeneo* fra le cui particelle si esercitano mutue repulsioni o attrazioni, offre una interessante applicazione della formula (II).

Sia $\varphi(r)$ il potenziale elementare, cioè il potenziale della repulsione mutua fra due masse, uguali all'unità, situate a distanza r fra loro.

Detta k la densità del corpo, la funzione potenziale V, nel polo dei raggi vettori r, ha per espressione:

$$V = k \int \varphi(r) d r.$$

Posto:

$$\psi(r) = \int_r^{\varepsilon_0} r^2 \varphi(r) d r,$$

dove ε_0 designa una costante qualunque, si ha:

$$V = -k \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} d S = -k \int \psi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + k \psi(0) \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma.$$

Il potenziale W del corpo sopra sè stesso è quindi dato da

$$2W = \int_S V k d S = -k^2 \int d\sigma \int \psi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d S + k^2 \psi(0) \int d S \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma :$$

(*) Si rammenti che il centro di una massa uniformemente distribuita sopra una calotta sferica è nel punto medio dell'altezza di questa.

ma all'interno del corpo $\displaystyle\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 4\pi$ e per ciò:

$$2W = -k^2 \int d\sigma \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \psi \, dS + 4\pi k^2 \psi(0) S,$$

dove: con (r, n) viene indicato l'angolo fatto dal raggio vettore, che da $d\sigma$ va a dS, colla normale n, elevata sull'elemento $d\sigma$; e con S il volume del corpo.

Si ponga ora:

$$\chi(r) = \int_r^{\varepsilon_0} \psi(r)\, dr;$$

per la (II), tenuta presente la (3), avremo:

$$\begin{aligned}
-\int d\sigma \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \psi \, dS &= \int d\sigma \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r} dS \\
&= \int \left\{ \int \cos(r, n) \chi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\sigma' - \pi \chi(0) \right\} d\sigma \\
&= -\int\int \frac{\chi \cos(r, n) \cos(r, n')}{r^2} d\sigma \, d\sigma' - \pi \chi(0) \sigma,
\end{aligned}$$

dove: (r, n') indica l'angolo fatto dal raggio, che da $d\sigma$ va a $d\sigma'$, colla normale n', elevata verso l'interno da quest'ultimo elemento; e σ indica l'area della superficie σ che limita il corpo.

Dunque:

$$2W = 4\pi k^2 \psi(0) S - \pi k^2 \chi(0) \sigma - k^2 \int\int \frac{\chi(r) \cos(r, n) \cos(r, n')}{r^2} d\sigma \, d\sigma'.$$

Con uguale facilità, mercè l'uso della formula (II), si può calcolare il *mutuo potenziale W_1 di due corpi omogenei.*

Detti:

S, S' gli spazii occupati dai due corpi;

σ, σ' le superficie che li limitano;

k, k' le loro densità;

$\Psi(r)$, $\Theta(r)$ le funzioni analoghe alle ψ e ϑ per il potenziale elementare fra le particelle dei due corpi;

si ha:

$$W_1 = k' \int V d S' = - k k' \int d\sigma \int \Psi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d S'$$

$$= k k' \int d\sigma \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \frac{\partial \Theta}{\partial r} d S'$$

$$= k k' \int d\sigma \left\{ \int \cos(r, n) \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\sigma' - \Theta(0) \int \cos(r, n) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\sigma' \right\}.$$

Si osservi ora che l'ultimo integrale è nullo per tutti gli elementi $d\sigma$ che non appartengono a σ', mentre per gli elementi comuni alle due superficie dalla (3) il valore di detto integrale risulta uguale a $-\pi$. Detta σ_1 l'area della porzione comune alle due superficie σ, σ' si ha quindi:

$$W_1 = \pi k k' \Theta(0) \sigma_1 - k k' \int\int \frac{\Theta(r) \cos(r, n) \cos(r, n')}{r^2} d\sigma d\sigma' \ (*),$$

dove (r, n), (r, n') designano gli angoli che il raggio r condotto da $d\sigma$ a $d\sigma'$, fa colle normali interne n, n' elevate su $d\sigma$, $d\sigma'$ rispettivamente.

Genova, 10 dicembre 1895.

G. MORERA.

(*) Per la deduzione dei potenziali W, W_1 cfr.: F. Neumann: *Vorlesungen über die Theorie der Capillarität* (Herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig, 1894), pag. 15-21 e pag. 23-27.