and consequently the proposed equation takes the form

$$Xdx = 0.$$

Partial differential equations of higher orders also admit of transformation to a similar form. For, from what was shown before, the partial differential coefficients of the dependent variable y with respect to the independent variables $x_1, x_2, \ldots$ may be expressed in terms of $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ And if we then put

$$y = p_0, \quad \frac{dy}{dx} = p_1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p_2, \quad \ldots,$$

the proposed equation will become

$$f(p_0, p_1, \ldots) = 0,$$

together with $\qquad dp_0 = p_1 dx, \quad dp_1 = p_2 dx, \quad \ldots;$

and if, by means of the equation $f = 0$, we eliminate one of the variables, it will remain only to integrate the last system. If in these we equate to zero the coefficients of the various combinations of the units, we shall have a series of equations which may be reduced to the form

$Xdx = 0$, say $\qquad X_1 dx = 0, \quad X_2 dx = 0, \quad \ldots,$

which, by a former process, may be comprised under the general expression $\qquad Xdx = 0.$

But this will not, in general, be free from the units $\iota_1, \iota_2, \ldots$; and consequently methods of integration applicable to the reduced form of equations of the first order will not be applicable to this case.

Sur l'Intégration des Fonctions Circulaires. Par M. Hermite.

[*Read November 14th*, 1872.]

En désignant par $f(\sin x, \cos x)$ une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, le procédé enseigné dans les éléments pour obtenir l'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ consiste à changer de variable en posant $\tan \frac{1}{2}x = t$, ce qui ramène en effet à opérer sur une simple fonction rationnelle de t. Toutefois à l'égard des expressions de la forme $\sin^m x$, ou $\sin^m x \cos^n x$, on suit une autre marche en employant soit l'intégration par parties, soit la transformation en fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de la variable. Cette diversité de procédés rend, il faut le reconnaître, les éléments du calcul intégral moins intéressants que ceux de la géométrie et de l'algèbre, et c'est ce qui m'a porté à suivre une autre marche, en déduisant de l'étude que je vais exposer de la fonction transcendante $f(\sin x, \cos x)$ le méthode qui en donne l'intégrale sous forme finie explicite.

I. Je partirai de la transformation en une fonction rationnelle de la quantité $f(\sin x, \cos x)$, qu'on obtient en posant: $e^{x\sqrt{-1}} = z$; de là résulte en effet:

$$\sin x = \frac{z^2-1}{2z\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{z^2+1}{2z};$$

de sorte qu'on peut faire:

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(z)}{F(z)},$$

$F(z)$ et $F_1(z)$ désignant des polynômes entiers en z. Cela posé, je vais montrer que de la décomposition en fonctions simples de la fonction rationnelle $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ résulte une décomposition en éléments simples qu'en donnera semblablement et d'une manière immédiate l'intégration. Considérant dans ce but la quantité $\frac{1}{(z-a)^n}$, qui est le type des fonctions simples, je pose $a = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, ce qui sera toujours possible en exceptant le cas de $a=0$, et je remarque qu'on aura:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{\alpha\sqrt{-1}}} = -\frac{1+\sqrt{-1}\cot\frac{x-\alpha}{2}}{2e^{\alpha\sqrt{-1}}}.$$

De là résulte une première transformation du groupe des fractions partielles:

$$\frac{P}{z-a} + \frac{P_1}{(z-a)^2} + \ldots\ldots + \frac{P_n}{(z-a)^{n+1}}$$

en un polynôme entier et du degré $n+1$ en $\cot\frac{x-\alpha}{2}$, mais nous pouvons faire:

$$\cot^2 x = -1 - \frac{d\cot x}{dx}, \quad \cot^3 x = -\cot x + \frac{1}{2}\frac{d^2\cot x}{dx^2}, \quad \text{etc.},$$

et la relation identique:

$$\cot^{k+1} x = -\cot^{k-1} x - \frac{1}{k}\frac{d\cot^k x}{dx}$$

montre que de proche en proche on exprimera linéairement $\cot^n x$ au moyen des dérivées successives de $\cot x$, jusqu'à celle d'ordre $n-1$. Nous parvenons donc à ce nouveau résultat savoir:

$$\frac{P}{z-a} + \frac{P_1}{(z-a)^2} + \ldots\ldots + \frac{P_n}{(z-a)^{n+1}}$$

$$= C + A\cot\frac{x-\alpha}{2} + A_1\frac{d\cot\frac{x-\alpha}{2}}{dx} + \ldots\ldots + A_n\frac{d^n\cot\frac{x-\alpha}{2}}{dx^n}$$

les constantes C, A, A_1, ... A_n dépendant linéairement des divers numérateurs P, P_1, ... P_n. Ce point etabli, je mettrai en évidence, si elles existent, les racines nulles du polynôme $F(z)$, en faisant:

$$F(z) = z^{m+1}(z-a)^{n+1}(z-b)^{p+1} \ldots\ldots (z-l)^{s+1},$$

et je modifierai la formule générale de décomposition en fractions simples, en réunissant à la partie entière du quotient $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ les fractions partielles en $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, ... $\frac{1}{z^{m+1}}$, de manière à avoir:

$$\begin{aligned}\frac{F_1(z)}{F(z)} = F(z) &+ \frac{P}{z-a} + \frac{P_1}{(z-a)^2} + \ldots\ldots + \frac{P_n}{(z-a)^{n+1}} \\ &+ \frac{Q}{z-b} + \frac{Q_1}{(z-b)^2} + \ldots\ldots + \frac{Q_p}{(z-b)^{p+1}} \\ &+ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \\ &+ \frac{S}{z-l} + \frac{S_1}{(z-l)^2} + \ldots\ldots + \frac{S_s}{(z-l)^{s+1}}\end{aligned}$$

ou $F(z)$ sera par conséquent de la forme $\Sigma a_k z^k$, avec des puissances entières mais positives ou négatives de z. Maintenant nous conclurons de cette formule élémentaire en revenant à la valeur $z = e^{x\sqrt{-1}}$ l'expression suivante de la fonction $f(\sin x, \cos x)$. La quantité $F(z)$ d'abord devenant:

$$\Sigma a_k e^{kx\sqrt{-1}} = \Sigma a_k (\cos kx + \sqrt{-1} \sin kx)$$

nous donne une première partie que je désignerai par $\Pi(x)$ et qui en sera considérée comme la partie entière. Les fractions partielles donnent ensuite une seconde partie $\Phi(x)$, qui en posant:

$$a = e^{\alpha\sqrt{-1}}, \quad b = e^{\beta\sqrt{-1}}, \quad \ldots\ldots \quad l = e^{\lambda\sqrt{-1}}$$

aura la forme suivante:

$$\begin{aligned}\Phi(x) = C &+ A \cot\frac{x-\alpha}{2} + A_1 \frac{d \cot\frac{x-\alpha}{2}}{dx} + \ldots\ldots + A_n \frac{d^n \cot\frac{x-\alpha}{2}}{dx^n} \\ &+ B \cot\frac{x-\beta}{2} + B_1 \frac{d \cot\frac{x-\beta}{2}}{dx} + \ldots\ldots + B_p \frac{d^p \cot\frac{x-\beta}{2}}{dx^p} \\ &\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \\ &+ L \cot\frac{x-\lambda}{2} + L_1 \frac{d \cot\frac{x-\lambda}{2}}{dx} + \ldots\ldots + L_s \frac{d^s \cot\frac{x-\lambda}{2}}{dx^s}.\end{aligned}$$

La détermination des coefficients A, B, ... L; A_1, B_1, ... etc. rendra plus complète encore l'analogie de la formule que nous venons d'obtenir:

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x),$$

avec celle de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

II. Je ferai dans ce but, en ayant en vue le groupe des coefficients $A, A_1, \ldots A_n$, $x = a+h$, et je développerai les deux membres suivant les puissances croissantes de h. Or les séries provenant ainsi de la partie entière, et de $\cot \frac{x-\beta}{2}, \ldots \cot \frac{x-\lambda}{2}$, ne contiendront que des puissances entières et positives de h, tandis que la quantité $\cot \frac{x-a}{2}$ et les dérivées donneront un nombre fini et limité de puissances négatives. Nous avons en effet:

$$\cot \frac{x-a}{2} = \cot \frac{h}{2} = \frac{2}{h} - \frac{h}{6} - \frac{h^3}{360} - \ldots,$$

et comme la dérivée de h prise par rapport à x est l'unité, on déduira de cette relation, si on se dispense d'écrire la partie entière:

$$\frac{d^n \cot \frac{x-a}{2}}{dx^n} = (-1)^n 1.2 \ldots n \frac{2}{h^{n+1}},$$

le développement du second membre $\Pi(x)+\Phi(x)$ se composant ainsi des termes

$$2\left[\frac{A}{h} - \frac{A_1}{h^2} + \frac{1.2 A_2}{h^3} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1.2 \ldots n A_n}{h^{n+1}}\right]$$

et d'une série infinie de puissances positives de h, nous obtiendrons $A_1, A_2, \ldots A_n$, en formant la portion du développement du premier membre, qui est composée des seules puissances négatives de h. Supposant à cet effet:

$$f[\sin(a+h), \cos(a+h)] = \frac{\mathfrak{A}}{h} - \frac{\mathfrak{A}_1}{h^2} + \frac{1.2\,\mathfrak{A}_2}{h^3} - \ldots + (-1)^n \frac{1.2 \ldots n\,\mathfrak{A}_n}{h^{n+1}},$$

on aura immédiatement:

$$2A_1 = \mathfrak{A}_1, \quad 2A_2 = \mathfrak{A}_2, \quad \ldots\ldots \quad 2A_n = \mathfrak{A}_n,$$

et j'ajoute que si l'on multiplie membre à membre l'égalité précédente avec celle-ci que donne le théorème de Taylor:

$$\cot \frac{x-a-h}{2} = \cot \frac{x-a}{2} - \frac{h}{1} \frac{d \cot \frac{x-a}{2}}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \frac{d^2 \cot \frac{x-a}{2}}{dx^2} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^n \frac{h^n}{1.2 \ldots n} \frac{d^n \cot \frac{x-a}{2}}{dx^n} + \ldots\ldots$$

on trouvera pour le coëfficient divisé par deux, du terme en $\frac{1}{h}$, précisément:

$$A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 \frac{d \cot \frac{x-a}{2}}{dx} + \ldots\ldots + A_n \frac{d^n \cot \frac{x-a}{2}}{dx^n}.$$

Le groupe total des éléments simples, se rapportant à la quantité $x=a$ qui rend infinie la fonction proposée, est ainsi le demi résidu correspondant à $h=0$ de l'expression :

$$f[\sin(a+h), \cos(a+h)] \cot\frac{x-a-h}{2},$$

résultat analogue comme on voit à un théorême connu de Lagrange.

III. Après avoir jusqu'ici suivi pas à pas la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, nous allons introduire une considération nouvelle qui a son origine dans la propriété caractéristique de la fonction $f(\sin x, \cos x)$ d'être périodique. Je remarque que, d'après la relation : $\cot\frac{x}{2} = \cot x + \operatorname{cosec} x$, la fonction $\Phi(x)$ l'exprime en termes de deux formes, à savoir : $\frac{d^n \cot x}{dx^n}$ et $\frac{d^n \operatorname{cosec} x}{dx^n}$, les premiers ayant pour période π, et les autres se reproduisant en signe contraire lorsqu'on change x en $x+\pi$. Or à l'égard de

$$\Pi(x) = \Sigma a_k(\cos kx + \sqrt{-1}\sin kx),$$

si l'on désigne par $\theta(x)$ l'ensemble des termes où k est pair, et par $\eta(x)$ l'ensemble des termes où k est impair, on aura de même :

$$\theta(x+\pi) = \theta(x), \quad \eta(x+\pi) = -\eta(x).$$

De là résulte la décomposition de la fonction proposée en deux parties $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, de sorte qu'on aura :

$$f(\sin x, \cos x) = \Theta(x) + \mathrm{H}(x),$$

avec les conditions :

$$\Theta(x+\pi) = \Theta(x), \quad \mathrm{H}(x+\pi) = -\mathrm{H}(x),$$

les expressions des nouvelles fonctions introduites étant :

$$\begin{aligned}\Theta(x) = \theta(x) &+ \mathrm{A}\cot(x-a) + \mathrm{A}_1\frac{d\cot(x-a)}{dx} + \dots + \mathrm{A}_n\frac{d^n\cot(x-a)}{dx^n}\\ &+ \mathrm{B}\cot(x-\beta) + \mathrm{B}_1\frac{d\cot(x-\beta)}{dx} + \dots + \mathrm{B}_p\frac{d^p\cot(x-\beta)}{dx^p}\\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ &+ \mathrm{L}\cot(x-\lambda) + \mathrm{L}_1\frac{d\cot(x-\lambda)}{dx} + \dots + \mathrm{L}_s\frac{d^s\cot(x-\lambda)}{dx^s},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x) = \eta(x) &+ \mathrm{A}\operatorname{cosec}(x-a) + \mathrm{A}_1\frac{d\operatorname{cosec}(x-a)}{dx} + \dots + \mathrm{A}_n\frac{d^n\operatorname{cosec}(x-a)}{dx^n}\\ &+ \mathrm{B}\operatorname{cosec}(x-\beta) + \mathrm{B}_1\frac{d\operatorname{cosec}(x-\beta)}{dx} + \dots + \mathrm{B}_p\frac{d^p\operatorname{cosec}(x-\beta)}{dx^p}\\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ &+ \mathrm{L}\operatorname{cosec}(x-\lambda) + \mathrm{L}_1\frac{d\operatorname{cosec}(x-\lambda)}{dx} + \dots + \mathrm{L}_s\frac{d^s\operatorname{cosec}(x-\lambda)}{dx^s}.\end{aligned}$$

Nous voyons donc apparaître deux éléments simples distincts, $\cot x$ et $\operatorname{cosec} x$, ou $\frac{1}{\sin x}$, appartenant en propre aux fonctions dont la périodicité est celle de $\Theta(x)$ ou $\mathrm{H}(x)$, au lieu de $\cot\frac{x}{2}$, qui dans le cas général a le rôle de la quantité $\frac{1}{x}$ à l'égard des fonctions rationnelles. C'est par les applications qu'on reconnaîtra surtout l'utilité de ces distinctions, et pour commencer par un cas bien facile, j'envisagerai d'abord la fonction $\frac{1}{\cos a-\cos x}$. En premier lieu j'observe que si l'on introduit le variable $z=e^{x\sqrt{-1}}$, il vient:

$$\frac{1}{\cos a-\cos x}=\frac{2z}{2z\cos a-1-z^2};$$

or les racines du dénominateur sont évidemment les quantités $e^{a\sqrt{-1}}$, $e^{-a\sqrt{-1}}$; le numérateur est seulement du premier degré, ainsi la partie entière $\Pi(x)$ n'existe point, et nous aurons:

$$\frac{1}{\cos a-\cos x}=\mathrm{C}+\mathrm{A}\cot\frac{x-a}{2}+\mathrm{B}\cot\frac{x+a}{2}.$$

Calculant maintenant les résidus pour $x=a$ et $x=-a$, j'obtiens les quantités $\frac{1}{\sin a}$, $-\frac{1}{\sin a}$, et par suite, en divisant par deux, les valeurs $\mathrm{A}=\frac{1}{2\sin a}$, $\mathrm{B}=-\frac{1}{2\sin a}$; de sorte qu'il vient:

$$\frac{1}{\cos a-\cos x}=\mathrm{C}+\frac{1}{2\sin a}\left[\cot\frac{x-a}{2}-\cot\frac{x+a}{2}\right].$$

On trouve d'ailleurs sans peine que $\mathrm{C}=0$, mais voici pour des cas moins faciles une détermination directe et immédiate de cette constante.

Supposons en général: $f(\sin x, \cos x)=\frac{\mathrm{F}_1(z)}{\mathrm{F}(z)}$, $\mathrm{F}(z)$ ne contenant point le facteur z et étant de degré au moins égal à celui du numérateur; la partie désignée par $\Phi(x)$ existera seule dans l'expression de la fonction qui sera ainsi:

$$\begin{aligned}
f(\sin x, \cos x)=\mathrm{C}+\mathrm{A}\cot\frac{x-a}{2}&+\mathrm{A}_1\frac{d\cot\frac{x-a}{2}}{dx}+\ldots\ldots\\
+\mathrm{B}\cot\frac{x-\beta}{2}&+\mathrm{B}_1\frac{d\cot\frac{x-\beta}{2}}{dx}+\ldots\ldots\\
\ldots\quad\ldots&\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
+\mathrm{L}\cot\frac{x-\lambda}{2}&+\mathrm{L}_1\frac{d\cot\frac{x-\lambda}{2}}{dx}+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Or je dis qu'en nommant G et H les valeurs de $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ pour z nul et infini, on aura: $C = \frac{1}{2}(G+H)$. En effet, la relation

$$\cot\frac{x-a}{2} = \sqrt{-1}\,\frac{e^{(x-a)\sqrt{-1}}+1}{e^{(x-a)\sqrt{-1}}-1} = \sqrt{-1}\,\frac{ze^{-a\sqrt{-1}}+1}{ze^{-a\sqrt{-1}}-1}$$

fait voir qu'en supposant z nul et infini, toutes les quantités $\cot\frac{x-a}{2}$ se réduisent à $-\sqrt{-1}$ et $+\sqrt{-1}$; elle montre aussi que leurs dérivées des divers ordres s'évanouissent, nous avons par conséquent:

$$G = C-(A+B+\ldots\ldots+L)\sqrt{-1},$$
$$H = C+(A+B+\ldots\ldots+L)\sqrt{-1},$$

d'où: $$A+B+\ldots\ldots+L = \frac{G-H}{2}\sqrt{-1}, \quad C = \frac{G+H}{2}.$$

Dans l'exemple considéré tout à l'heure, on trouve sur le champ $G=0$, $H=0$, de sorte que C est nul comme nous l'avons dit. Ces deux relations que nous venons d'obtenir, appliquées à la fonction $\Phi(x)\cot\frac{x-t}{2}$ donneraient, comme il est aisé de voir, la décomposition de $\Phi(t)$ en éléments simples, mais sans m'arrêter à cette remarque, je vais immédiatement donner plusieurs exemples de cette décomposition.

1°. L'expression $\frac{\cos mx}{\cos x-\cos a}$, où m est un nombre entier, devient en faisant $e^{x\sqrt{-1}} = z$, $\frac{z^{2m}+1}{z^{m-1}(1-2z\cos a+z^2)}$, et contient par conséquent une partie entière qui s'obtient ainsi. Partant de ces deux identités:

$$\frac{\sin a}{1-2z\cos a+z^2} = \sin a+z\sin 2a+\ldots\ldots+z^{m-2}\sin(m-1)a+ z^{m-1}\frac{\sin ma-z\sin(m-1)a}{1-2z\cos a+z^2}$$

$$\frac{\sin a}{1-2z\cos a+z^2} = \frac{\sin a}{z^2}+\frac{\sin 2a}{z^3}+\ldots\ldots\frac{\sin ma}{z^{m+1}}+ \frac{1}{z^{m+1}}\,\frac{z\sin(m+1)a-\sin ma}{1-2z\cos a+z^2},$$

je les ajoute après avoir divisé la première par z^{m-1} et multiplié la seconde par z^{m+1}, et j'obtiens:

$$\frac{(z^{2m}+1)\sin a}{z^{m-1}(1-2z\cos a+z^2)} = (z^{m-1}+z^{1-m})\sin a+(z^{m-2}+z^{2-m})\sin 2a$$
$$+\ldots+(z+z^{-1})\sin(m-1)a+\sin ma+\frac{z[\sin(m+1)a-\sin(m-1)a]}{1-2z\cos a+z^2}.$$

Si maintenant nous remplaçons z par l'exponentielle $e^{x\sqrt{-1}}$, nous aurons, en divisant par $\sin a$:

$$\frac{\cos mx}{\cos x-\cos a} = \Pi(x) + \frac{\cos ma}{\cos x-\cos a},$$

en faisant :

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sin a}\left[2\sin a\cos(m-1)x + 2\sin 2a\cos(m-2)x + \ldots\ldots + 2\sin(m-1)a\cos x + \sin ma\right].$$

2°. La fonction $\frac{\sin mx}{\sin nx}$, où m et n sont entiers, prend la forme $z^{n-m}\frac{z^{2m}-1}{z^{2n}-1}$ et aura de même une partie entière, si l'on suppose $m>n$. J'emploie pour l'obtenir l'identité :

$$z^{n-m}\frac{z^{2m}-1}{z^{2n}-1} = z^{m-n}+z^{n-m}+z^{m-3n}+z^{3n-m}+\ldots\ldots$$
$$+z^{m-(2k-1)n}+z^{(2k-1)n-m}+\frac{z^{(2k+1)m-n}-z^{n-(2k-1)m}}{z^{2n}-1},$$

et je prends pour k le plus grand entier contenu dans $\frac{m-n}{2n}$, de sorte qu'on ait $k=\frac{m-n}{2n}+\epsilon$, ϵ étant positif et moindre que l'unité. Il en résulte que

$$(2k+1)m-n = 2\epsilon n \quad \text{et} \quad n-(2k-1)m = 2(1-\epsilon)n;$$

ainsi dans la fraction du second membre le numérateur est de degré inférieur au degré du dénominateur. L'identité employé se vérifie d'ailleurs sur le champ, car elle se transforme, en remplaçant z par $e^{x\sqrt{-1}}$, dans l'équation connue :

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = 2\cos(m-n)x + 2\cos(m-3n)x + \ldots\ldots$$
$$+2\cos[m-(2k-1)n]x + \frac{\sin(2kn-m)x}{\sin nx}.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\Pi(x) = 2\cos(m-n)x + 2\cos(m-3n)x + \ldots + 2\cos[m-(2k-1)n]x$$

et $\quad \Phi(x) = \frac{\sin(2kn-m)x}{\sin nx}$, ou simplement $\Phi(x) = \frac{\sin mx}{\sin nx}$,

m étant supposé actuellement inférieur à n en valeur absolue. Ceci établi, les racines de l'équation $z^{2n}-1=0$ sont données par la formule $z=e^{\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}}$ pour $k=0, 1, 2, \ldots 2n-1$, et si l'on fait $a=\frac{k\pi}{n}$, le résidu de la fonction $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ correspondant à la valeur $x=a$ sera :

$$\frac{\sin ma}{n\cos na} = \frac{(-1)^k\sin ma}{n},$$

et nous obtenons par conséquent :

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\Sigma(-1)^k\sin ma\cot\frac{x-a}{2}.$$

Mais ayant $\Phi(x+\pi) = (-1)^{m+n}\Phi(x)$, la fonction appartiendra au type $\Theta(x)$ ou $\mathrm{H}(x)$, suivant que $m+n$ sera pair ou impair; de sorte qu'il vient pour le premier cas:

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\Sigma(-1)^k \sin m\alpha \cot(x-\alpha),$$

et pour le second:

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\Sigma\frac{(-1)^k \sin m\alpha}{\sin(x-\alpha)}.$$

Or les termes des deux sommes qui correspondent aux valeurs k et $k+n$ sont égaux, on peut donc en doublant se borner à prendre $k=1, 2, \ldots n-1$, le résidu relatif à $k=0$ étant nul.

3°. L'expression $\cot(x-\alpha)\cot(x-\beta)\ldots\ldots\cot(x-\kappa)\cot(x-\lambda)$, en désignant par n le nombre des facteurs, et faisant: $a=e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $b=e^{\beta\sqrt{-1}}, \ldots$ $l=e^{\lambda\sqrt{-1}}$, aura pour transformée en z:

$$(\sqrt{-1})^n\frac{(z^2+a^2)(z^2+b^2)\ldots\ldots(z^2+l^2)}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)\ldots\ldots(z^2-l^2)}.$$

On voit que le numérateur et le dénominateur sont du même degré, ainsi il n'existe pas de partie entière et nous avons seulement à calculer $\Phi(x)$. Or les $2n$ racines du dénominateur sont d'une part: $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $e^{\beta\sqrt{-1}}, \ldots\ldots$ $e^{\lambda\sqrt{-1}}$, et en outre ces mêmes quantités changées de signe, c'est à dire: $e^{(\alpha+\pi)\sqrt{-1}}$, $e^{(\beta+\pi)\sqrt{-1}}, \ldots\ldots e^{(\lambda+\pi)\sqrt{-1}}$; d'ailleurs $\Phi(x+\pi)=\Phi(x)$, ainsi la fonction proposée appartient au type $\Theta(x)$, et ses éléments simples où figurent les arguments α et $\alpha+\pi$, β et $\beta+\pi$, etc., se réduisent à ceux-ci: $\cot(x-\alpha)$, $\cot(x-\beta)$, .. $\cot(x-\lambda)$. Nous aurons en conséquence:

$$\Phi(x) = \mathrm{C}+\mathrm{A}\cot(x-\alpha)+\mathrm{B}\cot(x-\beta)+\ldots\ldots+\mathrm{L}\cot(x-\lambda),$$

A, B, ... L étant les résidus de $\Phi(x)$ pour $x=\alpha, \beta, \ldots \lambda$; c'est à dire:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \cot(\alpha-\beta)\cot(\alpha-\gamma)\ldots\ldots\cot(\alpha-\lambda),\\
\mathrm{B} &= \cot(\beta-\alpha)\cot(\beta-\gamma)\ldots\ldots\cot(\beta-\lambda),\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
\mathrm{L} &= \cot(\lambda-\alpha)\cot(\lambda-\beta)\ldots\ldots\cot(\lambda-\kappa).
\end{aligned}$$

Enfin la constante C s'obtient par l'équation $\mathrm{C}=\frac{1}{2}(\mathrm{G}+\mathrm{H})$, au moyen des valeurs, $\mathrm{G}=(-\sqrt{-1})^n$, $\mathrm{H}=(\sqrt{-1})^n$, qu'on tire de la transformée en z pour z nul et infini, ce qui donne simplement: $\mathrm{C}=\cos\frac{n\pi}{2}$.

4°. On traitera de même enfin l'expression plus générale:

$$\frac{\mathrm{F}(\sin x, \cos x)}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)},$$

où le numérateur est un polynôme entier en $\sin x$ et $\cos x$: en supposant qu'il soit homogène et de degré $n-1$, on sera amené à la relation suivante:

$$\frac{F(\sin x, \cos x)}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}$$
$$= \frac{F(\sin\alpha, \cos\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\,..\,\sin(\alpha-\lambda)}\cdot\frac{1}{\sin(x-\alpha)}$$
$$+\frac{F(\sin\beta, \cos\beta)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}\cdot\frac{1}{\sin(x-\beta)}$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$+\frac{F(\sin\lambda, \cos\lambda)}{\sin(\lambda-\alpha)\sin(\lambda-\beta)\ldots\sin(\lambda-x)}\cdot\frac{1}{\sin(x-\lambda)}.$$

Nous en déduisons, en chassant le dénominateur :

$$F(\sin x, \cos x) = \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}F(\sin\alpha, \cos\alpha)$$
$$+\frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}F(\sin\beta, \cos\beta)$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$+\frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\,..\,\sin(x-\kappa)}{\sin(\lambda-\alpha)\sin(\lambda-\beta)\ldots\sin(\lambda-\kappa)}F(\sin\lambda, \cos\lambda),$$

résultat qui se rapporte à la théorie de l'interpolation, comme donnant l'expression de la fonction $F(\sin x, \cos x)$ où entrent n coefficients arbitraires, au moyen des n valeurs qu'elle prend pour $x = \alpha, \beta, \ldots \lambda$.

IV. C'est pour obtenir l'intégrale de la fonction $f(\sin x, \cos x)$ qu'a été établie la formule de décomposition en éléments simples, et on voit en effet que d'une part $\int \Pi(x)\,dx$ se calcule sur le champ, et de l'autre en ce qui concerne $\int \Phi(x)\,dx$, il suffit d'employer la relation qui s'établit immédiatement :

$$\int \cot\frac{x-\alpha}{2}\,dx = 2\log\sin\frac{x-\alpha}{2}.$$

A l'égard des quantités : $\int \Theta(x)\,dx$, $\int H(x)\,dx$, on se servira de celles-ci :

$$\int \cot(x-\alpha)\,dx = \log\sin(x-\alpha) \quad \text{et} \quad \int \operatorname{cosec}(x-\alpha)\,dx = \log\operatorname{tang}\frac{x-\alpha}{2}.$$

Quant aux expressions qui figurent en dehors des termes logarithmiques, à savoir :

$$A_1\cot(x-\alpha) + A_2\frac{d\cot(x-\alpha)}{dx} + \ldots + A_n\frac{d^{n-1}\cot(x-\alpha)}{dx^n},$$

$$\text{et} \quad A_1\operatorname{cosec}(x-\alpha) + A_2\frac{d\operatorname{cosec}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + A_n\frac{d^{n-1}\operatorname{cosec}(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

on prouve aisément que la première étant un polynôme du n^e degré en $\cot(x-a)$, la seconde est le produit d'un polynôme semblable en $\cot(x-a)$, du degré $n+1$, multiplié par le facteur $\cos(x-a)$. Ces quantités sous ces formes nouvelles sont parfois d'une détermination plus facile, et j'en donnerai un exemple en considérant l'intégrale $\int \cot^{n+1} x\, dx$, l'exposant n étant entier et positif. D'après la méthode générale, on fera :

$$\cot^{n+1} x = \mathrm{C} + \mathrm{A} \cot x + \mathrm{A}_1 \frac{d \cot x}{dx} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^n \cot x}{dx^n},$$

et les coefficients s'obtiendront, soit au moyen des relations successives :

$$\cot^2 x = -1 - \frac{d \cot x}{dx}, \quad \cot^3 x = -\cot x + \frac{1}{2} \frac{d^2 \cot x}{dx^2}, \quad \text{etc.},$$

soit en formant la puissance $n+1$ et les dérivées de la série : $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{49} - \ldots.$ Or la substitution $\cot x = t$, qui est indiquée par la forme connue d'avance de l'intégrale, en donne facilement la valeur, puisqu'elle devient ainsi : $-\int \frac{t^{n+1}\, dt}{1+t^2}$, et on obtient, si n est impair :

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\frac{\cot^n x}{n} + \frac{\cot^{n-2} x}{n-2} - \ldots - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cot x + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x,$$

et en supposant n pair :

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\frac{\cot^n x}{n} + \frac{\cot^{n-2} x}{n-2} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\cot^2 x}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \log \sin x.$$

Rapprochant ces résultats de l'expression donnée par la formule générale, savoir :

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = \mathrm{C}x + \mathrm{A} \log \sin x + \mathrm{A}_1 \cot x + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^{n-1} \cot x}{dx^{n-1}}$$

nous en tirons cette conséquence que l'on a : $\mathrm{A}=0$ ou $\mathrm{A}=(-1)^{\frac{n}{2}}$, selon que n est impair ou pair. En terminant je remarquerai que cette seule connaissance du résidu A relatif à la valeur $x=0$ de la fonction $\cot^{n+1} x$, suffit pour la détermination complète de la série :

$$\cot x = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + \ldots\ldots$$

Et d'abord de ce que le terme en $\frac{1}{x}$ manque dans le carré, la quatrième puissance, et toutes les puissances paires, on conclut de proche en proche les conditions : $b=0$, $d=0$, ... c'est à dire que le développement ne contient que des puissances impaires de la variable, et a la forme :

$\cot x = \frac{a}{x} + \beta x + \gamma x^3 + \ldots$ De ce que la coefficient du même terme est $+1$, -1, $+1$, etc., dans la première, la troisième, la cinquième puissance, etc., on tire aisément les égalités: $\alpha = 1$, $3\alpha^2\beta = -1$, $9\alpha^4\gamma + 10\alpha^3\beta^2 = 1$, d'où $\beta = -\frac{1}{3}$, $\gamma = -\frac{1}{45}$, etc. C'est donc à un nouveau point de vue une détermination des nombres de Bernouilli.

On the Mechanical Description of a Cubic Curve.

By Prof. CAYLEY, F.R.S.

[*Read* 14*th November*, 1872.]

If the coordinates x, y of a point on a curve are rational functions of $\sin\phi$, $\cos\phi$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$, the curve has the deficiency 1, and conversely in any curve of deficiency 1 the coordinates x, y can be thus expressed in terms of the parameter ϕ. Hence writing $\sin\theta = k\sin\phi$, the coordinates will be rational functions of $\sin\phi$, $\cos\phi$, $\cos\theta$, or say of $\sin\phi$, $\cos\phi$, $\sin\theta$, $\cos\theta$; and for the mechanical representation of the relation $k\sin\varphi = \sin\theta$, we require only a rod OA rotating about the fixed point O, and connected with it by a pin at A, a rod AB, the other extremity of which, B, moves in a fixed line Ox. The curve most readily obtained by such an arrangement is that described by a point C rigidly connected with the rod AB; this is however a quartic curve (with two dps., since its deficiency is $=1$). I first considered the cubic

curve $$xy-1=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

or say $$xy-1=-\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)};$$

writing herein $x=\sin\phi$, and as before $k\sin\phi=\sin\theta$, we have then $y\sin\phi = 1-\cos\theta\cos\varphi$; which values may be written

$$x = \sin\phi,$$
$$y = \frac{1-\cos(\theta+\phi)}{\sin\phi} - \sin\theta.$$

I found, however, that this was *not* the cubic curve most easily constructed; and I ultimately devised a mechanical arrangement consisting of—