Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels.

(*Par* EMILE BOREL, *à Paris.*)

Soit un système d'équations canoniques:

$$\frac{d p_i}{d t}=\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{d q_i}{d t}=-\frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{1}$$

On sait que si la fonction H est une fonction analytique, non seulement des variables p et q, mais encore d'un certain nombre de paramètres λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$, les intégrales des équations (1) sont des fonctions analytiques des λ, et varient par suite en général d'une manière continue avec les λ. Cette continuité de la solution lorsque les données varient d'une manière continue est invoquée d'une manière plus ou moins explicite dans toutes les applications de la mécanique à l'étude des phénomènes naturels. Il est clair, en effet, que les données expérimentales ne sont jamais connues exactement, mais seulement d'une manière approchée: les équations que l'on peut déduire de l'expérience étant seulement des équations approchées, il est nécessaire, pour que l'étude de ces équations approchées n'apparaisse pas comme absolument vaine, que l'on sache — ou que l'on postule — que la solution de ces équations approchées est elle-même approchée de la solution des équations rigoureusement exactes que nous ne pourrons jamais écrire.

Cette propriété des équations de la dynamique est bien connue; il est bien connu aussi qu'elle ne s'étend pas à tous les systèmes d'équations différentielles; je voudrais donner ici un exemple que je crois nouveau, d'équations différentielles différant infiniment peu des équations d'un problème dynamique tout à fait classique et dont les solutions changent entièrement de nature pour des variations aussi petites que l'on veut d'un paramètre variable. Je développerai d'abord les calculs; j'indiquerai en terminant les relations des résultats obtenus avec certaines difficultés récemment soulevées par les physiciens dans la théorie du rayonnement.

I.

Considérons l'équation différentielle qui exprime la constance de la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, la vitesse initiale étant dirigée vers le point fixe (*résonateur linéaire*); cette équation différentielle, par un choix convenable des unités, se met sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2 \tag{1}$$

et son intégrale générale

$$x = a \cos (t - t_0) \tag{2}$$

admet la période 2π.

Modifions l'équation (1) en ajoutant au second membre un terme proportionnel au temps; c'est-à-dire considérons l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2 + 2\lambda t. \tag{3}$$

Si le coefficient constant λ est un nombre très petit, par rapport à la constante a et aux unités choisies, l'équation (3) différera extrêmement peu de l'équation (1), pendant un temps qui pourra être très long par rapport à la période 2π; nous pouvons par exemple supposer λ inférieur à une constante λ_0 choisie de telle manière que, pendant la durée de millions de périodes, le second membre de l'équation (3) diffère de moins d'un millionième, en valeur relative, du second membre de l'équation (1). Dans ces conditions, l'équation (1) et l'équation (3) sont physiquement identiques. Nous allons voir cependant que, quelque petit que soit λ, l'intégrale de l'équation (3) diffère d'une manière finie de l'intégrale de l'équation (1), dès la fin de la première période.

Supposons, pour fixer les idées, la constante λ positive; supposons aussi que pour $t = 0$, l'on ait $x = 0$ et $\frac{dx}{dt} = a$, constante positive. Lorsque

t croîtra à partir de zéro, le terme λt sera d'abord négligeable, x croîtra, et par suite $\frac{dx}{dt}$ décroîtra. En prenant la dérivée de (3) par rapport à t, l'on obtient

$$\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2 x}{dt^2}+x\right)=\lambda. \tag{4}$$

Cette équation montre que $\frac{dx}{dt}$ ne peut pas s'annuler, à moins que $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ou x ne deviennent infinis; mais, d'après (3), x ne peut guère dépasser la valeur a (puisque λt est très petit) et, d'autre part, la variation de $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ne peut pas dépasser $a t$, puisque $\frac{dx}{dt}$ est inférieur en valeur absolue à la constante a. Donc $\frac{dx}{dt}$ décroîtra à partir de la valeur a, mais ne s'annulera jamais. Tant que $\frac{dx}{dt}$ n'est pas très voisin de zéro, l'équation (4) diffère infiniment peu de l'équation que l'on obtiendrait en y réduisant λ à zéro. Par suite, au bout d'un temps t égal à $\frac{\pi}{2}$, x est très voisin de a et $\frac{dx}{dt}$ très voisin de 0; le mouvement diffère infiniment peu du mouvement défini par l'équation (1) et par son intégrale (2), si λ est regardé comme infiniment petit.

Mais, à partir du moment où $\frac{dx}{dt}$ est devenu très petit de l'ordre de grandeur de λ, l'allure de l'intégrale se modifie complètement; $\frac{dx}{dt}$ ne varie que très peu et par suite $\frac{d^2 x}{dt^2}$ est sensiblement nul, en tous cas négligeable par rapport à x, qui diffère très peu de a; l'équation (4) montre alors que $\frac{dx}{dt}$ est sensiblement égal à $\frac{\lambda}{a}\cdot$ Effectivement, les formules

$$\left.\begin{aligned} x &= a+\frac{\lambda}{a}t \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\lambda}{a} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

vérifieraient l'équation (3) si l'on négligeait le carré de λ. Il serait facile de pousser plus loin les calculs d'approximation, mais c'est inutile, dans le cas du moins où λt reste très petit par rapport à a^2; les équations (5) suffisent pour nous montrer qu'à partir de la valeur $t = \frac{\pi}{2}$, l'intégrale de (3) diffère du tout au tout de l'intégrale de (1); *elle n'est plus périodique;* après le premier arc de sinusoïde, elle se confond sensiblement avec une droite à peu près horizontale; cette droite peut, en supposant λ suffisamment petit, être physiquement indiscernable pendant des millions de périodes, de la droite horizontale qui est tangente aux maxima successifs de la sinusoïde intégrale de (1). Lorsque λ tend vers zéro, l'intégrale de (3) n'a donc pas pour limite l'intégrale de (1), mais une courbe entièrement différente.

II.

On arrive à des conclusions analogues en étudiant le cas plus général du même problème où la vitesse initiale n'est pas dirigée vers le centre fixe; les détails dans lesquels je suis entré me permettront d'être ici plus bref.

Les équations classiques sont, les unités étant convenablement choisies:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + x = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + y = 0 \tag{7}$$

et admettent les intégrales premières (en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$):

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \tag{8}$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = a^2. \tag{9}$$

Conservant l'équation (3) remplaçons l'intégrale des forces vives (9) par l'équation suivante

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = a^2 + 2\lambda t, \tag{10}$$

dans laquelle λ désigne, comme précédemment, une costante très petite.

L'intégrale du système formé par les équations (8) *et* (10) *diffère essentiellement de l'intégrale du système formé par les équations* (8) *et* (9).

En tenant compte de (8) l'équation (10) devient

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = a^2 + 2\lambda t \tag{11}$$

dont la discussion est entièrement analogue à celle de l'équation (3). Si, pour fixer les idées, nous supposons r croissant à l'origine des temps, r continue à croître jusqu'à ce que sa valeur devienne sensiblement égale à la plus grande racine positive r_1 de l'équation

$$r^2 + \frac{c^2}{r^2} = a^2 = r_0^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + \frac{c^2}{r_0^2}, \tag{12}$$

racine évidemment supérieure à la valeur initiale r_0. La trajectoire, pendant cette première période du mouvement, diffère infiniment peu de l'arc d'ellipse défini par les équations classiques (6) et (7). Mais, dès que le point matériel a atteint le sommet de l'ellipse (ou du moins s'en est approché infiniment près, si λ est regardé comme infiniment petit), le caractère de la trajectoire se modifie complètement; elle diffère extrêmement peu d'un cercle ayant pour rayon le demi-grand axe de l'ellipse; plus précisément, on a

$$r = r_1 + \mu t, \tag{13}$$

μ étant lié à λ par la relation

$$\left(r_1 - \frac{c^2}{r_1^3}\right)\mu = \lambda. \tag{14}$$

Si l'on désigne par r_2 la plus petite des racines positives de l'équation (12), c'est-à-dire le demi-petit axe de l'ellipse, l'équation (14) équivaut à la suivante

$$\mu = \frac{\lambda r_1}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{\lambda r_1}{\varphi^2}, \tag{15}$$

en désignant par 2φ la distance focale de l'ellipse.

La variation de θ est d'ailleurs définie par l'équation (8), c'est-à-dire est sensiblement linéaire si μ, comme λ, est très petit (*). Ce résultat est con-

(*) Je laisse ici de côté l'étude du cas où les conditions initiales sont telles que φ^2 soit très petit, de l'ordre de λ.

firmé par l'étude directe du système formé par les équations (8) et (13), qui donnent

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{(r_1 + \mu t)^2}$$

d'où, en supposant $\theta = 0$ pour $t = 0$:

$$\theta = \frac{c}{\mu r_1} - \frac{c}{\mu (r_1 + \mu t)} = \frac{c t}{(r_1 + \mu t) r_1}. \tag{16}$$

Lorsque λ tend vers zéro, μ tend aussi vers zéro et le mouvement défini par les équations (8) et (10) devient à la limite un mouvement circulaire uniforme, généralement incompatible avec les équations (6) et (7) (*). Ce mouvement circulaire uniforme, limite pour $\lambda = \mu = 0$ des équations (13) et (16), est défini par les équations

$$\left.\begin{aligned} r &= r_1 \\ \theta &= \frac{c}{r_1^2}\, t. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Sa période est $\frac{2\pi r_1^2}{c}$, tandis que tout mouvement circulaire, comme tout mouvement elliptique ou rectiligne, défini par les équations, (6) et (7), a pour période 2π. Si l'on remarque que $c = r_1 r_2$, on voit que la période est $2\pi \frac{r_1}{r_2}$; elle se trouve multipliée par le rapport des axes de l'ellipse définie par les équations (6) et (7) et les conditions initiales données.

III.

Si, dans les équations (3) ou (10), on remplace λt par une fonction $\varphi(t)$, on aboutit aux mêmes conclusions si la fonction $\varphi(t)$ satisfait aux conditions suivantes

$$\varphi(0) = 0 \qquad 0 < \varphi'(t) < \lambda$$

étant bien spécifié que l'inégalité $0 < \varphi'(t)$ *exclut l'égalité.*

(*) Il faut considérer ici les équations (6) et (7) et non pas les intégrales premières (8) et (9) parce que, dans le cas du mouvement circulaire ces intégrales premières ne sont pas indépendantes, et par suite ne peuvent pas remplacer les équations (8) et (9); au contraire, les équations (8) et (10) sont évidemment indépendantes, quelque petit que soit λ. Voir Emile Borel, *Remarque sur les problèmes de forces centrales* (Nouvelles Anuales de Mathématiques, 1896).

On pourrait traiter par une méthode analogue des cas plus généraux; j'en indiquerai un seul.

Supposons que dans l'équation (10), la quantité λt soit remplacée par une fonction $\varphi(t)$ dont la dérivée $\varphi'(t)$ soit, tantôt égale à une constante, tantôt égale à zéro. Plus précisément, nous considérons une suite de valeurs croissantes de t:

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \cdots$$

et nous supposons que dans tous les intervalles de rang impair λ est constant, tandis que dans les intervalles de rang pair, λ est nul. En d'autres termes, on a

$$\text{pour } t_{2n} < t < t_{2n+1} \qquad \varphi'(t) = \lambda_n$$

$$\text{pour } t_{2n+1} < t < t_{2n+2} \qquad \varphi'(t) = 0.$$

Les constantes λ_n sont positives ou négatives, mais toutes inférieures en valeur absolue à un nombre positif λ qui satisfait aux conditions que nous avons indiquées, c'est-à-dire que le produit λt est, pour les valeurs de t que l'on considère, très petit par rapport à la constante a^2.

Dans ces conditions, il est aisé de voir que l'allure du mouvement sera la suivante: dans les intervalles de rang pair, la trajectoire se composera d'ellipses égales entre elles, mais dont l'orientation changera en général d'un intervalle à l'autre; dans les intervalles de rang impair, si leur étendue dépasse la longueur d'une demi-période (π unités de temps), le point matériel décrira seulement un arc d'ellipse auquel succèderont des circonférences de cercle, ayant pour rayons, suivant les cas, le demi-grand axe r, ou le demi-petit axe r_2, la durée de la période étant maintenant, au lieu de 2π, égale à $2\pi\frac{r_1}{r_2}$ ou $2\pi\frac{r_2}{r_1}$.

La trajectoire se compose donc alternativement d'ellipses, de grands cercles et de petits cercles, chacune de ces courbes fermées pouvant être parcourue successivement un grand nombre de fois, si les durées $t_{k+1} - t_k$ sont grandes par rapport à la durée des périodes. Les grands cercles sont décrits pendant les périodes pour lesquelles λ_n est positif, les petits cercles pendant les périodes pour lesquels λ_n est négatif.

On passerait facilement de l'étude de ce cas à celui où l'on suppose que $\varphi'(t)$ varie d'une manière continue, en restant très petit en valeur absolue, mais en prenant alternativement des valeurs positives et négatives.

IV.

Les considérations précédentes concernent-elles des équations purement abstraites, ou ont-elles quelque rapport avec un problème réel? C'est ce qu'il est difficile de décider, dans l'ignorance où nous sommes des mécanismes par lesquels un résonateur élémentaire peut émettre ou absorber de l'énergie. Si l'on admet comme un fait expérimental l'invariance absolue des périodes propres des résonateurs élémentaires, nous pouvons conclure des résultats obtenus que l'absorption d'énergie ne peut pas être proportionnelle au temps pendant une durée dépassant celle d'une période, si faible d'ailleurs que puisse être le coefficient de proportionnalité.

On peut aussi, comme me l'a fait observer M.r HADAMARD, se demander si la singularité des résultats obtenus ne doit pas être rattachée au fait que l'intégrale des forces vives se déduit des équations canoniques par une combinaison analytique par laquelle peuvent être introduites des solutions singulières. Dans le cas le plus simple du résonateur linéaire, l'artifice de calcul consiste à multiplier par $\frac{dx}{dt}$, et l'on peut rattacher à cette multiplication la solution que nous avons obtenue dans laquelle $\frac{dx}{dt}$ est très voisin de zéro.

Ce point de vue est assurément légitime, si l'on considère les équations canoniques comme les équations primitives et la combinaison des forces vives comme un pur artifice analytique. Si l'on considère au contraire, l'intégrale des forces vives comme l'expression directe du principe de la conservation de l'énergie, il n'y a pas lieu de se demander par quelle voie analytique cette intégrale se déduit des équations canoniques, puisque la voie naturelle consiste alors à l'écrire directement.

Il y a là deux points de vue différents: la discussion des arguments que l'on peut invoquer en faveur de chacun d'eux nous entraînerait trop loin.