SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE ENTIER.

Par **G. Valiron** (Strasbourg).

Adunanza dell'11 gennaio 1920

Dans une note précédente [1]) j'ai montré que l'on pouvait construire des fonctions entières $f(z)$, d'ordre entier, à croissance très régulière, pour lesquelles les modules des zéros des fonctions $f(z) - x$ ont une distribution anormale pour un ensemble de valeurs de x ayant la puissance du continu. Mais dans ces exemples, l'ensemble des valeurs certainement anormales était linéaire et nulle part dense. Je vais montrer, en utilisant les propriétés des ensembles *réguliers* de mesure nulle de M. BOREL [2]), que l'on peut construire des fonctions à croissance très régulière pour lesquelles la distribution des zéros de $f(z) - x$ est anormale pour un ensemble de valeurs de x admettant tout point du plan des x pour point de condensation.

Je montrerai également que l'on peut introduire les ensembles réguliers, au lieu des ensembles généraux de mesure nulle, dans la démonstration de la proposition générale qui fait l'objet du § I de ma note citée. On peut alors donner des énoncés plus précis en introduisant *l'ordre asymptotique* de l'ensemble régulier. On obtient en particulier l'énoncé suivant : *$f(z)$ étant d'ordre entier, à croissance très régulière, c'est-à-dire telle que le logarithme du maximum du module est de la forme $h \times r^q$ [3]), le module du zéro de rang n de $f(z) - x$ est donné par l'égalité $n = h \cdot r^q$, pour tous les points x extérieurs à un ensemble régulier dont l'ordre asymptotique est au moins égal à $\omega^2(1)$.*

---

[1]) G. VALIRON, *Sur les zéros des fonctions entières d'ordre fini* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLIII (1918), pp. 255-268].

[2]) Pour les définitions et l'étude de ces ensembles, voir É. BOREL, *Sur les ensembles de mesure nulle* [Bulletin de la Société mathématique de France, t. XLI, 1913, pp. 1-19], et *Leçons sur les fonctions monogènes* (Paris, Gauthier-Villars, 1916), Ch. IV. Dans une note *Sur les ensembles réguliers de mesure nulle* [Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 169 (2^{e} semestre 1919), p. 1078] j'ai indiqué des démonstrations simples des propriétés de ces ensembles qui seront utilisées dans la suite.

[3]) Comme dans ma note précédente [loc. cit. [1])], je désigne par h toute quantité variable qui reste comprise entre deux nombres positifs fixes.

1. Considérons comme au n° 13 de ma précédente note, la fonction

$$\psi(z, x) = x e^z - \varphi(z)$$

avec

$$\varphi(z) = k_0 + k_1 z + \cdots + \frac{k_n}{n!} z^n + \cdots$$

et faisons l'hypothèse que les nombres réels ou complexes $k_n (n > 0)$, qui seront déterminés ultérieurement, vérifient, à partir d'une valeur n_0 de n, la condition

$$A(\log n)^{-1} < |k_n| < A \log n,$$

A étant un nombre positif donné. Le maximum $\mu(r)$ du module de $\varphi(z)$ est alors, pour chaque valeur $r = |z|$, supérieur au maximum de $A(\log n)^{-1} \frac{r^n}{n!}$ qui est supérieur à la valeur de cette expression pour $n = r$, donc à $e^r r^{-1}$ et à fortiori à $e^{\frac{r}{2}}$ pour $r > r_0$. D'autre part, le rapport du logarithme de $\mu(r)$ au logarithme du terme maximum de la série $\varphi(z)$ tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment [4]), donc $\mu(r)$ est inférieur au maximum de

$$\left[A \log n \frac{r^n}{n!}\right]^{\frac{3}{2}}$$

et par suite à e^{2r} pour $r > r_0$. Il résulte de là que $\mu(r)$ est de la forme e^{hr} et les considérations du n° 13 s'appliquent. On peut déterminer k_0 pour que la fonction

$$f(z) = e^{-z} \varphi(z)$$

ait aussi un module maximum de la forme e^{hr}, et le nombre $n(r, x)$ des zéros de $f(z) - x$ est par suite égal à $h.r$, sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de x qui est de mesure nulle dans tout domaine borné.

Nous allons choisir les nombres k_n de façon que, pour les valeurs ξ appartenant à un ensemble régulier E, le logarithme du module maximum $M(r, \xi)$ de $\psi(z, \xi)$ ne soit plus de la forme $h.r$, mais soit, pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r, inférieur à r^α, α étant moindre que 1. L'irregularité de la distribution des zéros de cette fonction et par suite des zéros de $f(z) - \xi$ résultera alors du théorème de M. Jensen, on aura, pour une infinité de valeurs de r, $n(r, \xi) < r^\alpha$ [5]).

---

[4]) G. Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini, et en particulier les fonctions à correspondance régulière* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1913, pp. 117-258), p. 127.

[5]) Cette inégalité qui exprime que la distribution des zéros est anormale, montre en outre qu'elle est *irrégulière*, car l'ordre apparent de $\psi(z, \xi)$ c'est-à-dire la limite supérieure de $\frac{\log n(r, \xi)}{\log r}$ est égale à 1. En effet, $\psi(z, \xi)$ ne peut être le produits d'une exponentielle par un produit canonique d'ordre inférieur à 1, car alors on aurait $\log M(r, \xi) = hr + \varepsilon(r)$, et d'autre part $\psi(z, \xi)$ ne peut être d'ordre inférieur à 1 que si k_n tend vers ξ ce qui ne pourra avoir lieu avec les hypothèses que nous ferons sur les k_n.

2. Nous utiliserons tout d'abord un ensemble régulier borné, défini de la façon suivante. Dans le plan de la variable complexe $x = u + iv$, nous prenons le carré Δ limité par les droites $u = 1$, $u = 2$, $v = 0$, $v = 1$, et dans ce carré les points A_p dont les deux coordonnées u_p, v_p ont un développement limité dans le système de base 2, ces points étant numérotés *normalement* [6]. Cette dernière hypothèse sur le numérotage n'est d'ailleurs pas essentielle, elle ne sera utilisée que pour la détermination de l'ordre asymptotique de l'ensemble. Nous prendrons les points A_p pour points fondamentaux de l'ensemble régulier : à chaque entier k nous faisons correspondre une suite de nombres positifs $l(k, p)$ décroissant lorsque n croît, tels que la série $\sum l(1, p)$ converge, et que $l(k, p)$ est inférieur à $l(k-1, p)$ et tend vers 0 lorsque k croît indéfiniment. Désignons par $L(k, p)$ le carré dont les côtes sont parallèles aux axes, ayant pour centre le point A_p et pour longueur des côtés $l(k, p)$, et soit E_k l'ensemble des points du plan intérieurs au sens étroit à l'un au moins des carrés $L(k, p)$, $(p = 0, 1, 2, \ldots)$. L'ensemble régulier est l'ensemble E des points communs à tous les ensembles E_k.

On démontre sans difficulté [7] que tout point intérieur au carré est un point de condensation de l'ensemble E, c'est par suite aussi un point de condensation de l'ensemble E_1 obtenu en supprimant dans E les points fondamentaux.

Soit ξ un point de l'ensemble E_1, nous allons montrer qu'il existe une suite infinie de points A_p dont la distance au point ξ est moindre que $\sqrt{2}\, l(1, p)$.

En effet, ξ appartenant à E_1 est intérieur à un carré $L(1, p)$ au moins, soit $L(1, p_1)$ l'un de ces carrés. Si p est inférieur ou égal à p_1, le point A_p est à une distance non nulle de ξ, par suite $l(k, p)$ tendant vers 0 lorsque k croît indéfiniment, il existe un nombre k_p pour lequel ξ est extérieur au carré $L(k_p, p)$. Soit k' le plus grand des p_1 nombres $k_1, k_2, \ldots, k_{p_1}$; le point ξ est extérieur à tous les carrés $L(k', p)$ correspondant à $p \leqq p_1$; mais ξ appartient à $E_{k'}$, donc il existe un nombre p_2 supérieur à p_1 tel que le carré $L(k', p_2)$ renferme ξ à son intérieur. A fortiori, le carré $L(1, p_2)$ contient le point ξ à son intérieur. On peut à partir de p_2 recommencer les mêmes opérations qu'à partir de p_1, et ainsi de suite, et l'on obtient bien une suite infinie de nombres $p_1, p_2, \ldots, p_q, \ldots$ tels que ξ est intérieur aux carrés $L(1, p_q)$, par suite la distance de ξ au centre A_p de l'un de ces carrés est moindre que $\sqrt{2}\, l(1, p)$.

3. Nous définirons les coefficients k_n de la fonction $\varphi(z)$ par les égalités

$$k_n = u_p + i v_p \qquad \text{pour} \qquad n > 0, \qquad N_p < n \leqq N_{p+1},$$

---

[6] Voir ma note citée, loc. cit. [2]).

[7] loc. cit. [2]).

la suite des nombres N_p étant définie par l'égalité

$$\log N_p = \beta^p, \qquad N_0 = 1, \qquad \beta > 1.$$

La fonction $\varphi(z) - k_0$ est alors bien déterminée, et le calcul de k_0 se fait comme il a été indiqué plus haut, il est d'ailleurs clair que les k_n n'ont pas de limite, la remarque faite dans la note 5 s'appliquera donc.

Soit E un ensemble régulier défini par les points $A_p(u_p, v_p)$ et par une suite à deux indices $l(k, p)$, et soit ξ un point de l'ensemble E_1 formé par les points de E qui ne sont pas points fondamentaux. Il existe une suite infinie de nombres p pour lesquels

$$|\xi - (u_p + i v_p)| < \sqrt{2}\, l(1, p)$$

d'où

$$|\xi - k_n| < \sqrt{2}\, l(1, p)$$

pour $N_p < n \leqq N_{p+1}$ et pour une infinité de valeurs de p.

Nous allons chercher une limite supérieure de $M(r, \xi)$ maximum du module de $\psi(z, \xi)$ pour

$$r = \frac{N_{p+1}}{\lambda}$$

λ étant un nombre fixe (indépendant de p) que nous supposons supérieur à e (base des logarithmes).

La somme des termes de $\psi(z, \xi)$ dont le rang est compris entre N_p et N_{p+1} a évidemment un module inférieur à

$$\sqrt{2}\, l(1, p) e^r,$$

la somme des termes de rang supérieur à $N_{p+1} - 1$ a un module moindre que

$$4 \sum_{N_{p+1}}^{\infty} \frac{r^n}{n!} < \frac{4\lambda}{\lambda - 1} \frac{r^{N_{p+1}}}{N_{p+1}!} < \frac{4\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{e}{\lambda}\right)^{N_{p+1}}$$

elle tend vers 0 lorsque p croît indéfiniment. Le module de la somme des termes dont le rang est moindre que $N_p + 1$ est inférieur à

$$4 N_p \frac{r^{N_p}}{N_p!} < 4 N_p \left(\frac{r e}{N_p}\right)^{N_p} < r^{N_p}$$

or

$$N_p = (N_{p+1})^{\frac{1}{\beta}} = (r\lambda)^{\frac{1}{\beta}}$$

on a donc

$$r^{N_p} < e^{r^\alpha}, \qquad \alpha > \frac{1}{\beta} \quad [8]).$$

---

[8]) Dans ma note précédente [loc. cit. [1])], j'avais déterminé la fonction $\theta(q)$ pour que les termes entre N_p et N_{p+1} donnent l'ordre de $\psi(z, x)$; mais j'ai écrit à tort que la somme des autres

Il résulte des trois inégalités obtenues que

$$M(r, \xi) < e^{r^\alpha} + \sqrt{2}\, l(1, p) e^r, \qquad \alpha < 1,$$

et par suite le logarithme de $M(r, \xi)$ est inférieur à $h r^\alpha$ si l'on a

$$\log \frac{1}{l(1, p)} \geqq r = \frac{N_{p+1}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} e^{\beta^{p+1}}.$$

D'après ce qui a été dit au n° 2, la distribution des zéros de $f(z) - \xi$ est donc anormale et irrégulière, si ξ est un point de l'ensemble E_1 déduit de l'ensemble régulier défini par les points A_p et la suite $l(k, p)$ telle que

$$\log_2 \frac{1}{l(1, p)} = \beta_1^{p+1}, \qquad \beta_1 > \beta.$$

Avec l'hypothèse faite sur le numérotage des points A_p, l'ensemble E est un ensemble régulier normal, pour de tels ensembles il existe une relation serrée entre l'ordre de grandeur de la fonction $\frac{1}{l(k, p)}$ et la plus ou moins grande densité des points de l'ensemble. Il faut remarquer que, dans le cas actuel, la façon dont la fonction $l(k, p)$ dépend de k n'intervient pas ; la suite $l(1, p)$ étant déterminée par l'égalité écrite, les suites $l(k, p)$ s'en déduisent en prenant $l(k, p) = \varepsilon(k) l(1, p)$, $\varepsilon(k)$ tendant vers 0 aussi lentement que l'on veut. On peut donc dans le cas présent définir l'ordre asymptotique de l'ensemble E comme étant l'ordre de $\frac{1}{l(1, x)}$, il en sera de même toutes les fois que la propriété de l'ensemble régulier qui sera utilisée est celle énoncée au n° 2. L'ensemble E_1 ne différant de E que par un ensemble dénombrable a le même ordre que E, cet ordre noté suivant les méthodes de M. Borel est $\omega^3(1)$; on pourrait le noter de façon plus précise, mais celà semble inutile en égard à l'indétermination qui règne sur le choix de β_1 [9]).

---

termes tend vers 0 pourvu que r reste compris entre $10 N_{p_i}$ et $\frac{1}{10} N_{p_i+1}$. Il est manifeste que j'ai voulu dire que cette partie de la somme est négligeable devant l'autre, mais pour que celà ait lieu, il faut comme dans le cas actuel que r soit voisin de $\frac{N_{p_i+1}}{10}$. La même correction doit être faite au n° 15, c'est pour r voisin de $\frac{N_{p_i+1}}{10}$ que l'on a $n(r, \xi) < r^\alpha$, $\alpha < 1$.

[9]) L'ordre serait le même si on le notait en suivant les indications de ma note des Comptes Rendus [loc. cit. [2])] ; et aussi si on le notait d'après les principes de M. Borel. Il est d'ailleurs clair que pour les ensembles normaux d'ordre supérieur à ω, l'ordre du reste de la série $\sum \frac{1}{(l(1, p))^2}$ et l'ordre de $\frac{1}{l(1, x)}$ sont les mêmes.

On peut donc énoncer le résultat obtenu de la façon suivante :

Il existe des fonctions entières $f(z)$ d'ordre 1, à croissance très régulière (logarithme du maximum du module de la forme $h.r$) pour lesquelles la distribution des zéros de $f(z) - x$ est anormale et irrégulière pour les points d'un ensemble de mesure nulle admettant tout point d'une aire bornée pour point de condensation, et dont l'ordre asymptotique est moindre que $\omega^3(1)$.

4. Nous allons maintenant construire un exemple pour lequel l'ensemble des points anormaux admettra tout point du plan pour point de condensation ; nous utiliserons un ensemble régulier dont les points fondamentaux sont denses dans tout le plan. Pour un tel ensemble la répartition des points fondamentaux n'est plus homogène, dans le cas actuel elle ne peut être faite de façon quelconque puisque les k_n doivent satisfaire à la condition imposée au n° 1. Nous prendrons encore pour points fondamentaux les points A_p dont les deux coordonnées ont un développement limité dans le système de base 2 et nous ferons le numérotage de la façon suivante. Désignons par C_n le carré dont le centre est l'origine et dont les côtés parallèles aux axes ont pour longuer $2n$. Dans le carré C_1 (sens large) nous prenons les 24 points dont les coordonnées sont de la forme $u_n = \frac{\alpha_1}{2}$, $v_n = \frac{\beta_1}{2}$, $(|\alpha_1| \leqq 2,\ |\beta_1| \leqq 2)$, le point O étant excepté, nous numérotons ces points de 1 à 24. Dans C_2 nous prenons les points de coordonnées $u_n = \frac{\alpha_2}{4}$, $v_n = \frac{\beta_2}{4}$, $(|\alpha_2| \leqq 4,\ |\beta_2| \leqq 4)$ qui n'ont pas encore été pris, l'origine étant toujours exceptée, et nous les numérotons à la suite, le rang du dernier point numéroté est $17^2 - 1$. Dans C_3 nous prenons les points $u_n = \frac{\alpha_3}{2^3}$, $v_n = \frac{\beta_3}{2^3}$ non encore pris, sauf O, et nous les numérotons à la suite, le dernier point numéroté est de rang $(3.2.2^3 + 1)^2 - 1$. Nous continuons ainsi de proche en proche, le dernier point numéroté au bout de la $q^{\text{ième}}$ opération est situé dans le carré C_q, son rang est $(q.2^{q+1} + 1)^2 - 1$.

Le point A_p de cordonnées u_p, v_p sera donc intérieur au carré C_q, q étant défini par les inégalités

$$((q-1)2^q + 1)^2 < p + 1 \leqq (q.2^{q+1} + 1)^2,$$

la distance de ce point à l'origine sera donc moindre que $\sqrt{2}.q$ donc que $B \log p$ $\left(\text{avec } B = \frac{\sqrt{2}}{\log 4}\right)$, et elle est supérieure ou égale à 2^{-q} donc à $\frac{1}{\sqrt{p}}$.

Si nous prenons encore

$$k_n = u_p + i v_p \quad \text{pour} \quad N_p < n \leqq N_{p+1}, \qquad \log N_p = \beta^p,$$

nous aurons

$$|k_n| < B \log p < C \log_3 n$$

et

$$|k_n| > \frac{1}{\sqrt{p}} \geqq D(\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les conditions imposées aux k_n sont donc vérifiées, les considérations du n° 1 s'appliquent aux fonctions $\psi^1(z, x)$ et $f^1(z)$ construites à l'aide de ces nombres.

Considérons encore un ensemble régulier E' ayant pour points fondamentaux les points A_p, les carrés d'exclusion $L'(k, p)$ ayant pour côtés $l'(k, p)$; les points A_p étant denses dans toute aire finie, E' admet tout point du plan pour point de condensation. Soit E'_1 l'ensemble des points de E' autres que les points fondamentaux, si ξ est un point de E'_1, un calcul analogue à celui du n° 3 montre que l'on aura

$$\log M^1(r, \xi) < r^\alpha$$

pour une infinité de valeurs de r, sous la seule condition que les nombres $l'(1, p)$ vérifient la relation

$$\log_2 \frac{1}{l'(1, p)} = \beta_1^{p+1}.$$

Il est donc démontré qu'il existe *des fonctions $f(z)$, d'ordre 1, à croissance très régulière, pour lesquelles la distribution des modules des zéros est anormale et irrégulière pour les points d'un ensemble de mesure nulle qui admet tout point du plan pour point de condensation.*

On peut convenir de dire encore dans le cas présent que l'ordre asymptotique de l'ensemble régulier non borné est l'ordre de la fonction $\frac{1}{l'(1, x)}$ mais il faut remarquer que l'ordre asymptotique de la portion de l'ensemble située dans une aire bornée est différent de l'ordre de $\frac{1}{l'(1, x)}$. Considérons par exemple la portion de E' contenue dans le carré Δ dans lequel l'ensemble E a été défini au n° 2, les points fondamentaux de E' contenus dans Δ coincident avec ceux de E, mais si A_p est le point de rang p de E, auquel est associé le carré $L(1, p)$, son rang dans E' est $p' = p^{2+\varepsilon_p}$, ε_p tendant vers 0 lorsque p croît indéfiniment, le carré qui lui est associé dans E' est donc $L'(1, p') = L(1, p^{2+\varepsilon_p})$. La portion E'_Δ de E' contenue dans Δ est encore un ensemble régulier normal, mais d'ordre asymptotique $\omega^3(2)$ au lieu de $\omega^3(1)$.

Bien que l'on ne puisse tirer de là aucune conclusion relative à la comparaison des ensembles $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ formés par les points de distribution anormale des fonctions $f(z) - x$ et $f^1(z) - x$ $\Big($la distribution anormale étant définie par exemple par la condition $\varliminf_{r=\infty} \frac{\log n(r, x)}{\log r} < 1\Big)$, il semble cependant probable que la portion de $\mathfrak{E}'$ intérieure à Δ est d'ordre plus élevé que la portion de $\mathfrak{E}$ intérieure à ce même carré.

5. Dans la première partie de ma note précédente, j'ai montré que $f(z)$ étant une fonction entière d'ordre fini, et $F(Z, x)$ étant définie par l'égalité

$$(1)\quad F(Z, x) = [f(z) + x][f(\tau z) + x] \ldots [f(\tau^{p-1} z) + x] = x^p + \sum a_n(x) Z^n$$

où τ désigne une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité et $Z = z^p$, on a entre le maximum $M(r)$ du module de $f(z)$ pour $|z| = r$ et le maximum $M(R, x)$ du module de $F(Z, x)$ pour $|Z| = R = r^p$, la relation

$$(2)\qquad \log M(R, x) = h_1 \log M(r h_2)$$

sauf pour les points d'un ensemble qui est de mesure nulle dans toute aire bornée. M. Borel a montré que tout ensemble de mesure nulle peut être enfermé dans un ensemble régulier, on peut dans le cas considéré ici conduire le démonstration de façon à introduire directement un ensemble régulier comprenant tous les points x pour lesquels l'égalité (2) n'a pas lieu.

Nous supposerons acquis le résultat suivant [10]: si C_n est le module du coefficient de plus grand module de $a_n(x)$, si l'on pose

$$G(R) = \sum C_n R^n$$

le rapport

$$\frac{\log G(R)}{\log M(r)}$$

reste compris entre deux nombres positifs fixes pour $r > r_0$.

Désignons par $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,p-1}$ les $p - 1$ zéros de $a_n(x)$, et considérons les cercles $\Gamma_i(k, n)$ de rayons $\frac{1}{k K^n}$ ayant pour centres ces points, K étant fixe et supérieur à 1 et k prenant les valeurs entières. Donnons à k une valeur déterminée et soit E_k l'ensemble des points intérieurs à l'un au moins des cercles $\Gamma_i(k, n)$ (n et i variables); soit enfin E l'ensemble des points communs à tous les E_k. L'ensemble E est un ensemble régulier de mesure nulle ayant pour points fondamentaux la suite formée par les zéros distincts des polynômes $a_n(x)$ rangés dans l'ordre des indices n (c'est-à-dire que l'on prend les points $\alpha_{1,i}$ distincts, puis les points $\alpha_{2,i}$ distincts des précédents, et ainsi de suite), les cercles d'exclusion relatifs au point de rang j de cet ensemble ont pour rayon $\frac{1}{k K^{j_1}}$, j_1 étant au moins égal à $\frac{j}{p-1}$ (si plusieurs zéros sont confondus en ce point les cercles sont ceux relatifs au zéro dont le rang est le moindre).

Nous allons montrer que l'égalité (2) a lieu pour tous les points du plan n'appartenant pas à E. Soit ξ un tel point. Il existe une valeur de k pour laquelle ξ

[10]) loc. cit. [1]), n° 4.

n'appartient pas à E_k, ξ est donc extérieur à tous les cercles $\Gamma_i(k, n)$. Prenons une valeur r déterminée (que nous supposons suffisamment grande), il lui correspond une valeur R et un nombre n qui est le rang du terme maximum de $G(RK^{1-p})$, et l'on a

$$C_n\left(\frac{R}{K^{p-1}}\right)^n > [G(RK^{1-p})]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

pour r supérieur à un nombre calculable r_0. Considérons le polynôme $a_n(x)$ correspondant. Le point ξ est extérieur aux cercles $\Gamma_i(k, n)$ ayant pour centres les $p-1$ zéros de ce polynôme et pour rayon $\frac{1}{kK^n}$; nous supposerons r assez grand pour que ce rayon soit inférieur à $\frac{1}{p-1}$. On peut alors trouver un nombre X compris entre $|\xi|+1$ et $|\xi|+3$ tel que le cercle $|x|=X$ ne coupe aucun des cercles $\Gamma_i(k, n)$. Pour $|x|=X$ le module maximum de $a_n(x)$ est au moins égal au module $C_n X^{p_i}$ de l'un de ses termes (p_i étant l'un des nombres $0, 1, \ldots, p-1$), d'autre part les points x et ξ étant intérieurs au cercle $|x|=X$ ou situés sur ce cercle, et extérieurs aux cercles $\Gamma_i(k, n)$, on a

$$\left|\frac{a_n(\xi)}{a_n(x)}\right| > [2k(|\xi|+3)]^{1-p} K^{n(1-p)},$$

en prenant pour x le point de la circonférence de rayon X où $a_n(x)$ atteint son maximum, on trouve

$$|a_n(\xi)| > D C_n K^{-n(p-1)} \tag{3'}$$

le nombre $D=[2k(|\xi|+3)]^{1-p}$ étant indépendant de r. Les inégalités (3), (3') et la propriété du rapport les logarithmes de $G(R)$ et $M(r)$ rappelée plus haut montrent que l'on a, pour $r > r_0$,

$$M(R, \xi) > D[M(rK^{\frac{1}{p}-1})]^\gamma$$

γ étant un nombre fixe, indépendant de ξ. Comme d'autre part $M(R, \xi)$ est inférieur à $[M(r)+|\xi|]^p$, l'égalité (2) est bien vérifiée au point ξ.

Les points de l'ensemble E peuvent donc seuls être des points anormaux. Cet ensemble E est un ensemble ponctuel au sens de M. Sire, c'est-à-dire un ensemble dont les points peuvent être enfermés dans une infinité dénombrable de cercles dont la longueur totale des circonférences est aussi petite que l'on veut [11]). Il est évident que tout ensemble régulier de mesure nulle, défini par ses points fondamentaux et par

---

[11]) J. Sire, *Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables* [Journal de Mathématiques, 6e série, t. IX (1913), pp. 1-37], p. 12. Les ensembles ponctuels ont été étudiés par M. Borel dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1898), Ch. V.

des carrés ou cercles $\Gamma(1, n)$ dont les côtés ou rayons forment une série convergente, est un ensemble ponctuel.

On caractérisera l'ensemble E par l'ordre $\omega(1)$ de la fonction K^x. On ne sait rien ici sur la distribution des points fondamentaux: les cercles $\Gamma_i(n, k)$ peuvent être tous extérieurs les uns aux autres pour $k > k_0$, il peut donc se faire que E ne renferme que les points fondamentaux; les points fondamentaux peuvent aussi être partout denses, et E admet alors tout ~~du~~ plan pour point de condensation. On dira que l'ordre asymptotique de l'ensemble est *au moins* $\omega(1)$, et le résultat obtenu s'énoncera de la façon suivante:

L'égalité (2) *a lieu sauf pour des valeurs de x qui peuvent être enfermées dans un ensemble régulier de mesure nulle dont l'ordre asymptotique est au moins égal à* $\omega(1)$.

6. Le résultat précédent a été obtenu sans faire d'hypothèse sur $M(r)$. Si l'on suppose que $M(r)$ est à croissance très régulière on obtient un résultat plus serré relativement à l'ordre de l'ensemble régulier renfermant les valeurs exceptionnelles. Supposons que l'on ait

$$\log M(r) = h r^{\rho} \tag{4}$$

ρ étant un entier [le cas de ρ non entier n'est pas intéressant, puisqu'alors l'égalité (2) a lieu pour tous les r supérieurs à un nombre fixe] $G(R)$ vérifiera une égalitè analogue à (4)

$$\log G(R) = h R^{\rho_1}, \qquad \rho_1 = \frac{\rho}{p}, \tag{5}$$

et par suite, il existera une suite de nombres $n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots$ définis par la relation

$$n_q = \lambda_q n_{q-1}, \qquad A < \lambda_q < B$$

pour lesquels C_n vérifie l'inégalité

$$C_n > n^{-\frac{n}{\rho_1}} D^{-n}$$

A, B, D étant des nombres fixes [12]).

On peut alors considérer ceux seulement des polynômes $a_n(x)$ qui correspondent aux valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots$ et construire un ensemble régulier E en prenant les zéros de ces polynômes pour points fondamentaux, les cercles d'exclusion relatifs aux zéros de $a_{n_q}(x)$ ayant pour rayon $\frac{1}{kK^{n_q}}$. En tout point ξ n'appartenant pas à E, on aura

$$\log M(K, \xi) = h R^{\rho_1}.$$

Les points exceptionnels sont donc des points de E, or les racines de $a_{n_q}(x)$ donnent des points fondamentaux de rang n moindre que $(p-1)q$, et les cercles

[12]) Voir les travaux de M. Lindelöf sur les fonctions entières, ou mon mémoire cité dans la note 4.

d'exclusion correspondant ont pour rayon $k^{-1}K^{-n_q} < k^{-1}K^{-A\frac{n}{q-1}}$ puisque $n_q > A^q$. L'ordre asymptotique de E est donc *au moins* $\omega^2(1)$.

On déduira de là le résultat suivant :

Si le maximum du module d'une fonction d'ordre entier ρ *vérifie l'égalité* (4), *le nombre* $n(r, x)$ *des zéros de module moindre que* r *de la fonction* $f(z) - x$ *est donné par l'égalité*

$$n(r, x) = h r^{\rho}$$

sauf pour des valeurs x *qui peuvent être enfermées dans un ensemble régulier de mesure nulle d'ordre asymptotique au moins égal à* $\omega^2(1)$.

On généralisera facilement au cas où l'égalité (4) est remplacée par l'égalité plus générale utilisée dans ma note précédente ; on obtiendra également des propositions relatives au cas où l'on considère des fonctions dont la régularité est moins grande.

7. Le résultat obtenu ci-dessus est encore éloigné de celui obtenu au n° 3 dans lequel l'ensemble des valeurs certainement anormales était d'ordre $\omega^3(1)$. Mais on peut obtenir un exemple analogue à celui du n° 3 dans lequel l'ordre de l'ensemble régulier sera moindre, en se bornant à considérer comme valeurs exceptionnelles celles pour lesquelles

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r, x)}{r} = 0.$$

On peut définir les nombres k_n par les égalités

$$k_n = u_p + i v_p \qquad \text{pour} \qquad N_p < n \leqq N_{p+1}$$

avec

$$N_p = p^p$$

et l'ensemble E_1 par les mêmes points fondamentaux qu'au n° 3 et par une suite $l(k, p)$ telle que

$$\log \frac{1}{l(1, p)} > \frac{N_{p+1}}{\lambda} = \frac{(p+1)^{p+1}}{\lambda}$$

les points de E seront des valeurs anormales, et cet ensemble est d'ordre asymptotique $\omega^2(1)$ comme au n° 6.

Ces indications suffisent à montrer l'intérêt de l'introduction des ensembles réguliers dans ce genre de questions. Il est clair que ces ensembles rendront les mêmes services dans l'étude des fonctions entières de deux variables, je reviendrai d'une façon plus complète sur ces questions dans un prochain mémoire.

Strasbourg, Décembre 1919.

G. VALIRON.