

10. *Über die Reflexion des Lichtes an natürlich  
aktiven Körpern;  
von K. Försterling.*

(Auszug aus einer Göttinger Dissertation.)

---

Einleitung.

Bekanntlich besteht zwischen der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes beim Durchgang durch einen natürlich aktiven Körper große Ähnlichkeit mit dem magnetooptischen Faradayeffekt. Diese Analogie läßt nun vermuten, daß auch das an einem natürlich aktiven Körper reflektierte Licht ähnliche Erscheinungen zeigt, wie man sie beim magnetooptischen Kerreffekt beobachtet. Diese dem Kerreffekt analoge Erscheinung hat bisher noch nicht nachgewiesen werden können<sup>1)</sup>, da ja die natürliche Drehung stets sehr viel kleiner ist als die magnetische des Eisens. Hr. W. Voigt stellte mir die Aufgabe, die Theorie der Reflexion des Lichtes an aktiven Körpern vollständig zu entwickeln und dabei auf singuläre Fälle, wie sie vermutlich in der Nähe des Grenzwinkels der totalen Reflexion auftreten würden, zu achten.

In der Tat ergibt die Theorie<sup>2)</sup> das Auftreten eines solchen singulären Falles; die gesuchte Erscheinung wird merklich, solange die eine der beiden im natürlich aktiven Körper sich fortpflanzenden Wellen partiell, die andere total reflektiert wird. Ich habe dann die entsprechenden Beobachtungen im Göttinger Physikalischen Institut angestellt und die Theorie zunächst an isotropen Körpern bestätigt gefunden.

---

1) K. Schmidt, Wied. Ann. 29. p. 451. 1886; W. Voigt, Wied. Ann. 30. p. 190. 1887; P. Drude, Göttinger Nachr. p. 406. 1892; vgl. A. Winkelmann, Handb. d. Physik: Optik p. 1343.

2) Die Folgerung, daß an einem aktiven Körper elliptisch polarisiertes Licht reflektiert wird, wenn linear polarisiertes einfällt, ist aus älteren Theorien bereits abgeleitet (vgl. P. Drude, l. c.).

Bei einachsigen aktiven Kristallen bleiben die Formeln den für isotrope Körper geltenden im wesentlichen gleich, falls die optische Achse in der Schnittlinie von Grenzebene und Einfallsebene liegt; hier hat sich auch die analoge Erscheinung gezeigt. Außerdem läßt die Theorie eine eigenartige Erscheinung dann erwarten, wenn die Achse in der Grenzebene liegt, aber aus der Einfallsebene abweicht; auch diese ließ sich in den wesentlichen Zügen durch die (hier schwierigere) Beobachtung bestätigen.

Hrn. W. Voigt, der mir zu der Arbeit die Apparate des Göttinger Instituts zur Verfügung stellte, bin ich für sein Interesse und seine Hilfe sehr dankbar.

### I. Schwingungsform der magnetischen Feldstärke in einachsigen enantiomorphen Kristallen.

Werden mit

$K(X, Y, Z)$  die elektrischen Feldstärken,

$R(A, B, C)$  die magnetischen Feldstärken,

$K(\Xi, H, Z)$  die elektrischen Polarisationen,

$P(A, B, \Gamma)$  die magnetischen Polarisationen,

mit  $v$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, und wird der Differentialquotient nach der Zeit einer Größe  $\varphi$  in  $\varphi'$  abgekürzt, so sind die Maxwellschen Gleichungen

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A' = v \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Xi' = v \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Nach dem Ansatz von W. Voigt<sup>1)</sup> bestehen nun zwischen den Feldstärken und Polarisationen in einem aktiven Kristall folgende Beziehungen:

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 18. p. 645. 1905 und Wied. Ann. 69. p. 301. 1899.



zu machen durch passende Wahl des Koordinatensystems. Demgemäß ist in die Gleichung (1) und (2) als Lösung

$$e^{i v \left( t - \frac{a x + c z}{\omega} \right)}$$

einzuführen, wenn  $v = 2\pi/\tau$  die Frequenz der Schwingung bedeutet. Die Gleichungen (1) und (2) heißen dann, wenn  $v/\omega = n$ :

$$(3) \quad \begin{cases} \Xi = + n c B, & H = - n c A + n a C, & Z = - n a B, \\ A = - n c X, & B = + n c X - n a Z, & \Gamma = + n a X, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} X = \Xi \Theta_{11} + H \Theta_{12} + Z \Theta_{13} + i(A d_{11} + B d_{12} + \Gamma d_{13}), \\ Y = \Xi \Theta_{12} + H \Theta_{22} + Z \Theta_{23} + i(A d_{12} + B d_{22} + \Gamma d_{23}), \\ Z = \Xi \Theta_{13} + H \Theta_{23} + Z \Theta_{33} + i(A d_{13} + B d_{23} + \Gamma d_{33}), \\ A = A - i(\Xi d_{11} + H d_{12} + Z d_{13}), \\ B = B - i(\Xi d_{12} + H d_{22} + Z d_{23}), \\ C = \Gamma - i(\Xi d_{13} + H d_{23} + Z d_{33}). \end{cases}$$

Eliminiert man aus (3) und (4) die elektrischen und magnetischen Polarisationen und dann die elektrischen Feldstärken, so erhält man:

$$(5) \quad \begin{cases} A \{1 - n^2 c^2 \Theta_{22}\} = \{n^2 a c \Theta_{23} - n^2 c^2 \Theta_{12} - i n (c d_{22} + c d_{11} - a d_{13})\} B \\ \quad - \{n^2 a c \Theta_{22} + i n (c d_{23} + a d_{12})\} C, \\ B \{1 - n^2 c^2 \Theta_{11} + 2 n^2 a c \Theta_{13} - n^2 a^2 \Theta_{33}\} \\ \quad = \{n^2 c a \Theta_{23} - n^2 c^2 \Theta_{12} + i n (c d_{11} - a d_{13} + c d_{22})\} A \\ \quad + \{n^2 c a \Theta_{12} - n^2 a^2 \Theta_{23} + i n (c d_{13} - a d_{22} - a d_{33})\} C, \\ C \{1 - n^2 a^2 \Theta_{22}\} = + \{n^2 c a \Theta_{12} - n^2 a^2 \Theta_{23} + i n (a d_{22} + a d_{33} - c d_{13})\} B \\ \quad - \{n^2 c a \Theta_{23} - i n (a d_{12} + c d_{23})\} A. \end{cases}$$

Man erkennt, daß man aus den letzten drei Gleichungen  $n$ ,  $A/C$ ,  $A/B$  berechnen kann. Die Gleichung für  $n$  führt aber auf eine Gleichung sechsten Grades. Wenn man indessen in Gliedern von der Ordnung  $d_{hk}$  die Doppelbrechung, falls die Differenz der Brechungsindizes als Faktor auftritt, vernachlässigt, so kann man mit Hilfe der Beziehungen

$$a A + c \Gamma = 0$$

leicht zeigen, daß man zu einer biquadratischen Gleichung für  $n$  gelangt.

Die allgemeinen Formeln wirklich hinzuschreiben, wäre sehr kompliziert. Es sollen vielmehr später die aufgestellten Gleichungen in speziellen Fällen entwickelt werden. Es mag jetzt angenommen werden, daß die Lösungen  $n^{(1)}$  und  $n^{(2)}$  und die Amplitudenverhältnisse  $A/C$ ,  $A/B$  gefunden sind, nachdem die aus den Grenzbedingungen folgenden Werte (9) für  $c$  und  $a$  in (5) eingeführt sind.

## II. Formeln für die reflektierten Amplituden.

### § 1. Die Grenzbedingungen.

Das in I. gebrauchte Koordinatensystem war nur dadurch bestimmt, daß  $b = 0$  war. Man erfüllt diese Bedingung, indem man die  $XZ$ -Ebene als Einfallsebene wählt. Weiter soll noch verfügt werden, daß die  $XY$ -Ebene mit der Grenzebene zusammenfällt. Das Achsenkreuz der  $\Theta_{hk}$  (und  $d_{hk}$ ) sei ganz beliebig. Der im allgemeinen komplexe Brechungswinkel sei  $\chi$ , dann ist  $c = \cos \chi$ ,  $a = \sin \chi$ .

Zur Behandlung des Reflexionsproblems wollen wir jetzt die Amplituden nach ihrer Lage zur Einfallsebene unterscheiden. Sei also  $\mathfrak{D}_p$  die Komponente der magnetischen Feldstärke  $\parallel$ ,  $\mathfrak{D}_s$  diejenige  $\perp$  zur Einfallsebene.

Da nun, wie schon bemerkt, die Polarisationen und nicht die Feldstärken transversal schwingen, so ist  $\mathfrak{D}_p$  nicht transversal. Der komplexe Winkel, um den  $\mathfrak{D}_p$  aus der transversalen Lage abweicht, sei  $g$ , und es werde  $\cos g$  in  $\varrho$ ,  $\sin g$  in  $\sigma$  abgekürzt. Dann gilt:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{D}_p \sigma = \mathfrak{D}_p \cos(90 + g) = a A + c C \\ \quad = -i n (a c [d_{11} B - d_{12} A + d_{23} C - d_{33} B] \\ \quad \quad + a^2 [d_{12} C - d_{13} B] \\ \quad \quad + c^2 [d_{13} B - d_{23} A]) . \end{array} \right.$$

Nach Fig. 1 gilt, falls  $\cos(\chi + g)$  mit  $c$ ,  $\sin(\chi + g)$  mit  $a$  bezeichnet ist:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \mathfrak{D}_p c = \mathfrak{D}_p (c \varrho - a \sigma), \\ B = \mathfrak{D}_s, \\ -C = \mathfrak{D}_p a = \mathfrak{D}_p (a \varrho - c \sigma). \end{array} \right.$$

Die beiden Medien, die bei der Reflexion in Frage kommen, sollen durch die unteren Indizes 1 und 2 unterschieden werden. Das Medium (1) sei durchsichtig, isotrop und nicht aktiv. Ist  $\varphi$  der Einfallswinkel, so ist  $\cos \varphi = c_1$ ,  $\sin \varphi = a_1$ . Im ersten Medium treten zwei Wellen auf: die einfallende und die reflektierte. Die Wellen sollen durch obere

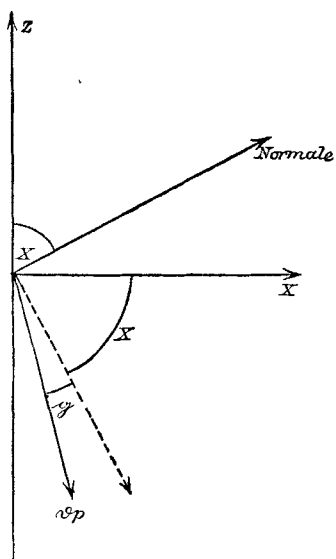


Fig. 1.

Indizes unterschieden werden, z. B.  $c_1^{(r)}$  ist der Richtungskosinus der Normale der reflektierten Welle gegen die  $z$ -Achse. Das zweite Medium sei ein aktiver Kristall, der eventuell auch absorbieren kann. In ihm pflanzen sich zwei Wellen fort. Sie mögen durch die oberen Indizes 1 und 2 unterschieden werden.

Als Grenzbedingungen kann man nach der elektromagnetischen Lichttheorie verlangen, daß die beiden tangentiellen magnetischen Feldstärken, die normale magnetische Polarisierung, und die tangentielle elektrische Feldstärke  $\parallel$  der Einfallsebene stetig durch die Grenze gehen.

Für die magnetischen Feldstärken führt man Ausdrücke von der Form

$$\mathfrak{D}_p = D_p e^{i\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{X} = v \left( t - \frac{ax + cx}{\omega} \right)$$

ein, wobei dann  $D_p$  die komplexe Amplitude der Schwingung bedeutet, und entsprechende Ausdrücke für  $\mathfrak{D}_s$ ,  $\mathfrak{E}_p$ ,  $\mathfrak{E}_s$ ,  $\mathfrak{H}_s$ ,  $\mathfrak{H}_p$  (wobei  $\mathfrak{E}_p$ ,  $\mathfrak{E}_s$ ,  $\mathfrak{H}_p$ ,  $\mathfrak{H}_s$  analoge Bedeutung wie  $\mathfrak{D}_p$  und  $\mathfrak{D}_s$  haben), nach dem Schema:

$$(8) \quad \begin{cases} A_1^{(e)} = c_1^{(e)} E_p e^{i\mathfrak{X}_1^{(e)}}, \\ B_1^{(e)} = E_s e^{i\mathfrak{X}_1^{(e)}}, \\ C_1^{(e)} = -a_1^{(e)} E_p e^{i\mathfrak{X}_1^{(e)}} \text{ usw.} \end{cases}$$

Dann folgt bekanntlich, daß:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \nu \text{ für alle Wellen dasselbe ist,} \\ 2. \quad \frac{a_1^{(e)}}{\omega_1} = \frac{a_1^{(r)}}{\omega_1} = \frac{a_2^{(h)}}{\omega_2^{(h)}}, \\ 3. \quad c_1^{(e)} = -c_1^{(r)}. \end{array} \right.$$

Vernachlässigt man wieder in den Faktoren der  $d_{hk}$  die Doppelbrechung und führt hier einen Mittelwert

$$\frac{n_2^{(1)} - n_2^{(2)}}{2} = \bar{n}_2, \quad \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{2} = \bar{c}_2 \text{ usw.}$$

ein, so erhält man für die Amplituden folgende Grenzbedingungen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha) \quad (E_p - R_p) c_1 = c_2^{(1)} D_p^{(1)} - c_2^{(2)} D_p^{(2)}, \\ \beta) \quad E_s + R_s = D_s^{(1)} + D_s^{(2)}, \\ \gamma) \quad (E_p + R_p) a_1 = a_2^{(1)} D_p^{(1)} + a_2^{(2)} D_p^{(2)} \\ \quad \quad \quad - i \bar{n}_2 [(\bar{c}_2 d_{13} - \bar{a}_2 d_{33})(D_s^{(1)} + D_s^{(2)}) \\ \quad \quad \quad - d_{23}(D_p^{(1)} + D_p^{(2)})], \\ \delta) \quad (E_s - R_s) c_1 n_1 \Theta = n_2^{(1)} [\Theta_{11} c_2^{(1)} - \Theta_{13} a_2^{(1)}] D_s^{(1)} \\ \quad \quad \quad - n_2^{(1)} \varrho_2^{(1)} \Theta_{12} D_p^{(1)} \\ \quad \quad \quad + n_2^{(2)} [\Theta_{11} c_2^{(2)} - \Theta_{13} a_2^{(2)}] D_s^{(2)} - n_2^{(2)} \varrho_2^{(2)} \Theta_{12} D_p^{(2)} \\ \quad \quad \quad + i [(\bar{c}_2 d_{11} - \bar{a}_2 d_{13})(D_p^{(1)} + D_p^{(2)}) + d_{12}(D_s^{(1)} + D_s^{(2)})]. \end{array} \right.$$

## § 2. Die reflektierten Amplituden.

Aus den Grenzbedingungen (10) kann man allgemein  $R_p$  und  $R_s$  berechnen. Wir wollen indessen von den allgemeinen Formeln absehen und nur  $R_p$  für  $E_p = 0$  (was wir mit  $[R_p]$  bezeichnen wollen) und  $R_s$  für  $E_s = 0$  ( $[R_s]$ ) berechnen.

Wir denken uns die Werte für

$$\frac{D_p^{(1)}}{D_p^{(1)}} = \mu^{(1)}, \quad \frac{D_p^{(2)}}{D_p^{(2)}} = \mu^{(2)}$$

aus (6) ausgerechnet. Über die Zuordnung der Indizes 1 und 2 zum ordentlichen und außerordentlichen Strahl verfügen wir noch nichts.

Wir eliminieren zunächst aus  $\alpha)$  und  $\gamma)$   $R_p$ , aus  $\beta)$  und  $\delta)$   $R_s$  und erhalten:

$$(11) \quad 2 c_1 a_1 E_p = D_p^{(1)} p^{(1)} + D_p^{(2)} p^{(2)},$$

$$(12) \quad 2 c_1 n \Theta E_s = D_p^{(1)} q^{(1)} + D_p^{(2)} q^{(2)},$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= a_1 c_2^{(1)} + c_1 (a_2^{(1)} - i \bar{n}_2 \{ [\bar{c}_2 d_{13} - \bar{a}_2 d_{33}] \mu^{(1)} - d_{23} \}), \\ p^{(2)} &= a_1 c_2^{(2)} + c_1 \left( a_2^{(2)} - i \bar{n}_2 \left\{ [\bar{c}_2 d_{13} - \bar{a}_2 d_{33}] \frac{1}{\mu^{(2)}} - d_{23} \right\} \right), \\ q^{(1)} &= \Theta n_1 c_1 \mu^{(1)} + n_2^{(1)} [\Theta_{11} c_2^{(1)} - \Theta_{13} a_2^{(1)}] \mu^{(1)} - n_2^{(1)} \varrho_2^{(1)} \Theta_{12} \\ &\quad + i [\bar{c}_2 d_{11} - \bar{a}_2 d_{13} + d_{12} \mu^{(1)}], \\ q^{(2)} &= \Theta n_1 c_1 \frac{1}{\mu^{(2)}} + n_2^{(2)} [\Theta_{11} c_2^{(2)} - \Theta_{13} a_2^{(2)}] \frac{1}{\mu^{(2)}} - n_2^{(2)} \varrho_2^{(2)} \Theta_{12} \\ &\quad + i \left[ \bar{c}_2 d_{11} - \bar{a}_2 d_{13} + d_{12} \frac{1}{\mu^{(2)}} \right]. \end{aligned}$$

Sei  $\mathbf{E}_p = \mathbf{0}$ , so multiplizieren wir (11), (12) und  $\alpha$  der Reihe nach mit:

$$q^{(1)} c_2^{(2)} - c_2^{(1)} q^{(2)}, \quad c_2^{(1)} p^{(2)} - p^{(1)} c_2^{(2)}, \quad p^{(1)} q^{(2)} - q^{(1)} p^{(2)}$$

und addieren die drei Gleichungen. Die Summe der rechten Seiten wird dann Null. Man erhält:

$$(13) \quad + [R_p] = 2 n_1 \Theta \frac{c_2^{(1)} p^{(2)} - p^{(1)} c_2^{(2)}}{p^{(1)} q^{(2)} - q^{(1)} p^{(2)}} E_s.$$

Sei  $\mathbf{E}_s = \mathbf{0}$ , so multiplizieren wir (11), (12) und  $\beta$  der Reihe nach mit:

$$\mu^{(1)} q^{(2)} - q^{(1)} \frac{1}{\mu^{(2)}}, \quad p^{(1)} \frac{1}{\mu^{(2)}} - \mu^{(1)} p^{(2)}, \quad q^{(1)} p^{(2)} - p^{(1)} q^{(2)}$$

und addieren. Man erhält auf dieselbe Weise wie oben:

$$(14) \quad - [R_s] = 2 c_1 a_1 \frac{\mu^{(1)} q^{(2)} - q^{(1)} \frac{1}{\mu^{(2)}}}{q^{(1)} p^{(2)} - p^{(1)} q^{(2)}} E_p.$$

Die allgemeinen Formeln sind ersichtlich recht kompliziert. Wir wenden uns jetzt zu speziellen Fällen.

### III. Isotrope durchsichtige Körper.

#### § 1. Fortpflanzung von ebenen Lichtwellen in isotropen aktiven Körpern.

Für isotrope Körper ist  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ ,  $d_1 = d_2 = d$ . Es ist also:

$$\mathfrak{T}_p \sin g = a A + c C = (a A + c \Gamma) - i d (a \Xi + c Z) = 0,$$

da die beiden Klammern einzeln Null sind.

In isotropen aktiven Körpern schwingen also die magnetischen Feldstärken transversal — bei inhomogenen Wellen natürlich in den komplexen Richtungskosinus.



Die Gleichungen (5) gehen mit Benutzung von  $a A + c C = 0$  und nach Einführung von  $D_p$  und  $D_s$  über in:

$$\begin{aligned} D_p [1 - n^2 \Theta] &= -2 i n d D_s, \\ D_s [1 - n^2 \Theta] &= +2 i n d D_p. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(15) \quad \frac{D_s}{D_p} = \pm i.$$

Also: homogene und nicht homogene Wellen sind zirkularpolarisiert.

Die Brechungsindizes sind gegeben durch:

$$n^{(h)2} = \frac{1}{\Theta} \pm 2 \frac{n d}{\Theta}.$$

Setzt man  $\sqrt{1/\Theta} = n$ ,  $n^2 d = \vartheta$ , so seien die Indizes festgelegt durch:

$$\begin{aligned} n^{(1)} &= n + \vartheta, \\ n^{(2)} &= n - \vartheta. \end{aligned}$$

Dann bestimmt sich das Vorzeichen in (16) für positive  $d$ :

$$(16) \quad \begin{cases} D_s^{(1)} = -i D_p^{(1)} \text{ (da } [1 - n_2^{(1)2} \Theta] < 0), \\ D_s^{(2)} = +i D_p^{(2)}. \end{cases}$$

## § 2. Die Amplituden $[R_s]$ und $[R_p]$ .

Die Formeln für  $[R_s]$  und  $[R_p]$  ergeben sich sofort aus (13) und (14). Die Formeln werden besonders einfach, wenn  $c_1$  oder  $c_2^{(h)}$  groß ist neben  $\vartheta$  und  $c_2^{(1)} - c_2^{(2)}$  usw. Um zunächst eine Übersicht zu gewinnen, soll für den Augenblick angenommen werden, daß dies der Fall ist. Dann wird, wenn  $c_2$ ,  $a_2$  Mittelwerte aus  $c_2^{(1)}$  und  $c_2^{(2)}$  usw. bedeuten, und wenn  $n_2^{(h)}/n_1 = n^{(h)}$  gesetzt ist, der Nenner, da im Zähler nur sehr kleine Größen stehen und wir uns auf Größen erster Ordnung beschränken:

$$-i 2 \frac{a_1}{n^2} \{c_2 n + c_1\} \{c_1 + c_2 n\}, \quad n = \frac{n_2^{(1)} + n_2^{(2)}}{2}.$$

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Nähe des Grenzwinkels der totalen Reflexion ist ausgeschlossen. Man kann dann die Mittelwerte in folgender Weise bilden:

$$\begin{aligned} a_2^{(1)} &= a_2 \frac{n_2}{n_2^{(1)}} = a_2 \left[ 1 - \frac{\vartheta_2}{n_2} \right], & a_2^{(2)} &= a_2 \left[ 1 + \frac{\vartheta_2}{n_2} \right], \\ c_2^{(1)} &= \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{n_2^{(1)2}}} = c_2 \left[ 1 + \frac{a_2^2}{c_2^2} \frac{\vartheta_2}{n_2} \right], & c_2^{(2)} &= c_2 \left[ 1 - \frac{a_2^2}{c_2^2} \frac{\vartheta_2}{n_2} \right]. \end{aligned}$$

Man erhält dann<sup>1)</sup>:

$$- [R_p] = [R_s] = + \frac{2 i c_1 \frac{a_2^2}{c_2} \vartheta}{(c_1 n + c_2)(c_2 n + c_1)}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_2}{n_1}.$$

Man erkennt, daß in diesem Falle die  $[R_s]$  und  $[R_p]$  von der Ordnung  $\vartheta$ , die entsprechende Intensität also von der Ordnung  $\vartheta^2$  ist. Das stärkste Drehungsvermögen zeigt Zinnober. Für ihn ist  $\vartheta$  etwa  $= 0,00033$ , also  $\vartheta^2 = 0,0000001$ . Man sieht ein, daß kaum Hoffnung ist, diese geringe Intensität nachzuweisen. In der Tat blieben Versuche von P. Drude erfolglos.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Faktoren von  $\vartheta$  verschwinden — der aktive Körper sich also wie ein gewöhnlicher Körper verhält —, wenn  $a_2 = 0$  ist, also bei senkrechter Inzidenz. Dies ist ein Unterschied zwischen der Erscheinung, welche das an *natürlich* aktiven Körpern reflektierte Licht bietet, und dem Kerreffekt, der ja gerade bei senkrechter Inzidenz am besten beobachtbar ist. Wie man leicht nachrechnen kann, kommt dieser Unterschied durch das Auftreten der magnetischen Teilpolarisationen in dem Ansatz von W. Voigt für natürlich aktive Körper, welche im Ansatz für den Kerreffekt aus der Elektronentheorie nicht auftreten.

2. Wir betrachten nun die Umgebung des Grenzwinkels der totalen Reflexion. Dann ist für  $c_2^{(1)}$  oder  $c_2^{(2)} = 0$

$$c_2^{(1)} - c_2^{(2)} = 2 \frac{a_1}{n} \sqrt{\frac{\vartheta}{n}}.$$

1) Die vollständigen Formeln würden sein:

$$R_p = \frac{c_1 - c_2 n}{c_1 + c_2 n} E_p - i \frac{2 \frac{a_2^2}{c_2} \vartheta c_1}{(c_1 n + c_2)(c_2 n + c_1)} E_s,$$

$$R_s = \frac{c_1 n - c_2}{c_1 n + c_2} E_s + i \frac{2 \frac{a_2^2}{c_2} \vartheta c_1}{(c_1 n + c_2)(c_2 n + c_1)} E_p.$$

Fällt z. B. eine zirkularpolarisierte (z. B.  $E_s = -i E_p$ ) Welle senkrecht auf einen aktiven Körper, in dem die entsprechend polarisierte Welle dieselbe Geschwindigkeit hat ( $n_1 = n_2^{(1)}$ ), so ist der reflektierte Bruchteil:

$$R_p = \frac{\vartheta}{2} E_p, \quad R_s = i \frac{\vartheta}{2} E_p.$$

Die reflektierte Welle ist also keineswegs  $= 0$ , sondern ist wieder zirkularpolarisiert, und zwar im entgegengesetzten Sinne ( $R_p = +i R_s$ ).

Hier tritt also in dem Zähler der Formeln (13) und (14) schon ein Glied von der Ordnung  $\sqrt{\sigma}$  auf. Wir vernachlässigen also jetzt bereits  $d$  neben 1 und erhalten:<sup>1)</sup>

$$[R_p] = + i \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{c_1} E_s,$$

$$[R_s] = - i \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{c_1} E_p.$$

Man erkennt, daß für kleine  $c_1$  die Verhältnisse besonders günstig sind. Hier wird also die Beobachtung einzusetzen haben.

### § 3. Problem für die Beobachtung bei isotropen Körpern.

Wir sahen im vorigen Paragraphen, daß der Fall  $c_3^{(h)}$  nahezu Null bei großen Einfallswinkeln, die aber bei der Entwicklung bisher ausgeschlossen waren, der aussichtsreichste ist. Ihn wollen wir jetzt diskutieren. Wir beschränken uns wieder auf Glieder erster Ordnung und erhalten aus (13) und (14):

$$\begin{aligned} (17) \quad [R_p]_{E_s=1} &= - [R_s]_{E_p=1} = \\ &= \frac{2 i c_1 a_1 n (c_2^{(1)} - c_2^{(2)})}{2 c_1^2 n + (c_2^{(1)} + c_2^{(2)})(c_1 n + c_1) + 2 c_2^{(1)} c_2^{(2)} n}. \end{aligned}$$

Damit nun der Grenzwinkel erst bei großem Einfallswinkel erreicht wird, muß  $n$  nahezu 1 sein. Wir werden daher in Annäherung  $n=1$ ,  $a_1=1$  setzen dürfen. Man erhält dann:

$$(18) \quad [R_p]_{E_s=1} = - [R_s]_{E_p=1} = \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{c_1 + c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + \frac{c_2^{(1)} c_2^{(2)}}{c_1}} = p + i q.$$

Die reflektierte Intensität  $J$  der gesuchten Amplitude ist dann gegeben durch  $p^2 + q^2$ . Wir wollen nun annehmen, daß  $c_1$  konstant ist,  $n$  aber wenig variiert, und wollen den Verlauf von  $J$  verfolgen. Wie man sieht, nimmt der absolute Betrag des Zählers zu, wenn man sich vom Gebiet der partiellen Reflexion dem Grenzwinkel  $c_2^{(2)}=0$  nähert, er bleibt konstant

1) Die vollständigen Formeln sind jetzt:

$$R_p = \left( 1 - \frac{c_2^{(1)} + c_2^{(2)}}{c_1} n \right) E_p + i \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{c_1} E_s,$$

$$R_s = \left( 1 - \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{c_1 n} \right) E_s - i \frac{c_2^{(1)} - c_2^{(2)}}{c_1} E_p.$$

zwischen  $c_2^{(2)} = 0$  und  $c_2^{(1)} = 0$ , nimmt aber dann im Gebiete der totalen Reflexion wieder ab.

Ebenso erkennt man, daß der Nenner abnimmt, wenn man sich  $c_2^{(2)} = 0$  im Gebiete der partiellen oder  $c_2^{(1)} = 0$  im Gebiete der totalen Reflexion *beider* Strahlen nähert. Bei Annäherung an das durch  $c_2^{(2)} = 0$  und  $c_2^{(1)} = 0$  begrenzte Gebiet nimmt also die Intensität stets rasch und stetig zu.

Zwischen  $c_2^{(1)} = 0$  und  $c_2^{(2)} = 0$  hat die Intensität, falls  $c_1 < 2\sqrt{2}\vartheta$ , ein Minimum. Den größten Wert erreicht die Intensität bei  $c_2^{(1)} = 0$ .

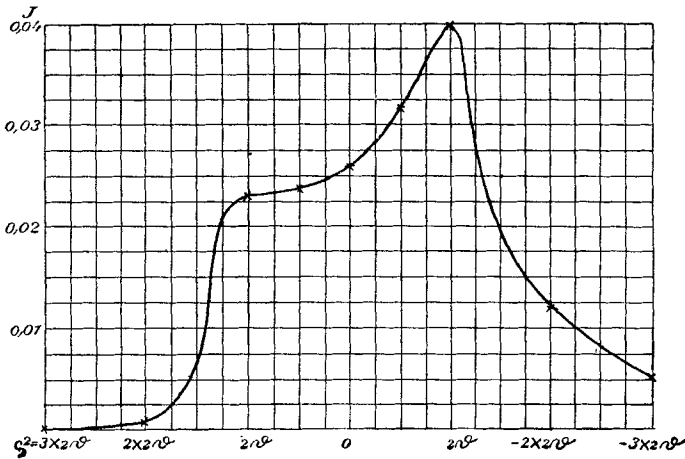


Fig. 2.

Für Natriumchlorat, das zu den Beobachtungen als isotroper Körper Verwendung fand, ist  $n^{(2)} - n^{(1)} = 0,000007$ ,  $c_2^{(1)}$  für  $c_2^{(2)} = 0$  ist  $= 0,0038$ . Nimmt man den Einfallswinkel  $= 88^\circ 50'$  — größer wird man ihn kaum praktisch brauchen können — so ist  $c_1 = 0,02$ . Man sieht, daß man hier  $c_2^{(h)2}$  neben  $c_1^2$  weglassen kann. Dann tritt kein Minimum der Intensität auf. In diesem Fall ist die Intensität gegeben durch:

1.  $c_2^{(1)}$  reell,  $c_2^{(2)}$  reell:  $J = \frac{(\gamma_2^{(1)} - \gamma_2^{(2)})^2}{c_1^2} \left\{ 1 - \frac{2(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})}{c_1} \right\},$
2.  $c_2^{(1)}$  reell,  $c_2^{(2)}$  imag.:  $J = \frac{2(n^{(1)} - n^{(2)})}{c_1^2} \left\{ 1 - \frac{2\gamma_2^{(1)}}{c_1} \right\},$
3.  $c_2^{(1)}$  imag.,  $c_2^{(2)}$  imag.:  $J = \frac{(\gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)})^2}{c_1^2}.$

Dieser zuletzt erwähnte Fall ist in Fig. 2 dargestellt, indem  $c_2^{(2)} = \pm \sqrt{c_2^2 \pm 2 \vartheta}$  gesetzt und  $c_2^2$  als Abszisse,  $J$  als Ordinate gewählt ist.

**IV. Ein spezieller Fall bei durchsichtigen Kristallen: die Achse liegt in der Grenzebene.<sup>1)</sup>**

**§ 1. Gesetze für die Schwingungsform und den Brechungsindex.**

Für Experimente besonders wichtig ist der Fall, daß die Achse in der  $(xy)$  Grenzebene liegt. Der Winkel, um den die

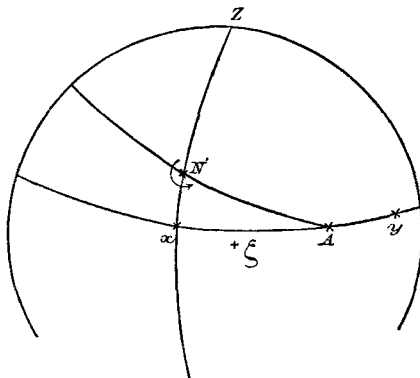


Fig. 3.  $N$  = Wellennormale.  $A$  = Achse.

Kristallachse in positivem Sinne gegen die  $X$ -Achse geneigt ist, sei  $\zeta$ . Dann ist:

$$(19) \quad \begin{cases} \theta_{11} = \theta_1 \cos^2 \zeta + \theta_2 \sin^2 \zeta, \\ \theta_{22} = \theta_1 \sin^2 \zeta + \theta_2 \cos^2 \zeta, \\ \theta_{33} = \theta_3, \\ \theta_{12} = +(\theta_1 - \theta_2) \frac{\sin 2 \zeta}{2}, \\ \theta_{13} = \theta_{23} = 0. \end{cases}$$

Der Winkel  $\zeta$  mag + gerechnet werden bei dem in Fig. 3 angegebenen Sinne um die Wellennormale. Analoges gilt für die  $d_{hk}$ .

Für diesen Fall läßt sich in der bisherigen Annäherung aus (5) und (6) leicht<sup>2)</sup> die Relation:

$$a A + c C = 0$$

1) Der Fall, daß die Achse in der Einfallsebene liegt, ist in der Dissertation durchgeführt.

2) Der Gang der Rechnungen ist in der Dissertation näher ausgeführt.

gewinnen, mit deren Hilfe nach Einführung von  $\mathfrak{D}_p$  und  $\mathfrak{D}_s$  die Gleichungen (5) äquivalent werden mit:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_p [1 - n^2 \Theta_{22}] &= -\mathfrak{D}_s [n^2 c \Theta_{12} + i n \{ (d_{22} + d_{33}) + c^2 (d_{11} - d_{33}) \}], \\ \mathfrak{D}_s [1 - n^2 \Theta_{33} + n^2 c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})] \\ &= -\mathfrak{D}_p [n^2 c \Theta_{12} - i n \{ (d_{22} + d_{33}) + c^2 (d_{11} - d_{33}) \}].\end{aligned}$$

Wir wollen nunmehr die Betrachtung auf die Nähe des Grenzwinkels beschränken, d. h.  $c^2$  sehr klein annehmen, etwa von der Ordnung der Doppelbrechung. Dann erhält man:

$$(20) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_p [1 - n^2 \Theta_{22}] = -\mathfrak{D}_s [n^2 c \Theta_{12} + i n (d_{22} + d_{33})], \\ \mathfrak{D}_s [1 - n^2 \Theta_{33} + n^2 c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})] \\ = -\mathfrak{D}_p [n^2 c \Theta_{12} - i n (d_{22} + d_{33})]. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(21) \quad \begin{cases} [1 - n^2 \Theta_{22}] [1 - n^2 \Theta_{33} + n^2 c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})] \\ = n^4 c^2 \Theta_{12}^2 + n^2 (d_{22} + d_{33})^2. \end{cases}$$

Bei nicht zu starker Doppelbrechung wird es erlaubt sein, für  $n$  in den Gliedern, wo die Doppelbrechung in der dritten Potenz als Faktor auftritt, einen Mittelwert  $\bar{n}$  zu setzen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $\Theta_{22} - \Theta_{33}$  groß neben  $d_{22} + d_{33}$  ist. Dann erhält man:

$$(22) \quad \begin{cases} n_0^2 = \frac{1 + \bar{n}^2 c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})}{\Theta_{33}} - \frac{\Delta}{\Theta_{33} - \Theta_{22} - \bar{n}^2 c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})} + \dots \\ n_e^2 = \frac{1}{\Theta_{22}} + \frac{\Delta}{\Theta_{33} - \Theta_{22} - \bar{n}^2 c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})} + \dots \end{cases}$$

Daß  $n_0$  der Brechungsindex des ordentlichen,  $n_e$  den des außerordentlichen Strahles ist, sieht man am einfachsten, wenn man  $c = 0$  und  $(d_{22} + d_{33}) = 0$  setzt.

Für die Schwingungsform bekommt man aus (20) und (21) die Gesetze:

$$(23) \quad \left( \frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{D}_s} \right)_0 = \pm \frac{c \Theta_{12} + \frac{i}{\bar{n}} (d_{11} + d_{22})}{\Theta_{33} - \Theta_{22}}.$$

$$(24) \quad \left( \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} \right)_e = \pm \frac{c \Theta_{12} - \frac{i}{\bar{n}} (d_{22} + d_{33})}{\Theta_{33} - \Theta_{22}}.$$

Hierbei ist in der Schlußformel noch  $c^2 (\Theta_{33} - \Theta_{11})$ ,  $c^2 \Theta_{12}$ ,  $(d_{11} + d_{22})$  neben  $(\Theta_{33} - \Theta_{11})$  weggelassen.

Das Vorzeichen in (23) und (24) bestimmt man durch Einsetzen von (22), (23) und (24) in (20). Für  $\Theta_{33} > \Theta_{22}$  findet

man, daß  $(\mathfrak{D}_p/\mathfrak{D}_s)_0$  mit dem negativen,  $(\mathfrak{D}_s/\mathfrak{D}_p)_e$  mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist.

Die Ausdrücke (23) und (24) kann man in folgender Weise umformen.

Es ist:

$$(25) \quad \frac{c \Theta_{12}}{\Theta_{33} - \Theta_{22}} = \frac{c (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \zeta \cos \zeta}{\Theta_2 - \Theta_1 \sin^2 \zeta - \Theta_2 \cos^2 \zeta} = \frac{-c}{\operatorname{tg} \zeta}.$$

Daher haben wir zum Schluß die Gleichungen:<sup>1)</sup>

$$(26) \quad \begin{cases} \left( \frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{D}_s} \right)_0 = \frac{c_2^0}{\operatorname{tg} \zeta} - i \frac{d_{22} + d_{33}}{[\Theta_{33} - \Theta_{22}] \bar{n}_2}, \\ \left( \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} \right)_e = \frac{-c_2^e}{\operatorname{tg} \zeta} - i \frac{d_{22} + d_{33}}{[\Theta_{33} - \Theta_{22}] \bar{n}_2}, \end{cases}$$

wenn der Index (2) daran erinnert, daß die Formeln für das zweite Medium gelten.

Falls  $\zeta$  sehr klein oder Null ist, so gilt in der bisherigen Annäherung nach (20) solange  $c^2$  von der Ordnung  $d$  ist:

$$(27) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_p [1 - n^2 \Theta_2] = -\mathfrak{D}_s i \bar{n} 2 d_2, \\ \mathfrak{D}_s [1 - n^2 \Theta_2] = +\mathfrak{D}_p i \bar{n} 2 d_2. \end{cases}$$

Diese Formeln sind dieselben wie auf p. 817. Aus ihnen folgt für  $n_0 < n_e$ :

$$(28) \quad \begin{cases} \left( \frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{D}_s} \right)_0 = -i, \\ \left( \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} \right)_e = -i \end{cases}$$

und für positive  $d$ :

$$(29) \quad \begin{cases} n_0 = \bar{n} - n_2^2 d_2, \\ n_e = \bar{n} + n_2^2 d_2. \end{cases}$$

Für negative  $d$  ist in (28) das Vorzeichen umzukehren, da sich sonst die Normalenflächen schneiden würden, was nach (25) aber nie der Fall sein kann.

## § 2. Formeln für die reflektierten Amplituden.

Wir verzichten wieder auf Größen von der Ordnung  $d$ , soweit sie nicht durch eine sehr kleine Größe — etwa die Doppel-

---

1) Die Formeln (26) enthalten die bekannte Tatsache, daß die Hauptachsen der Ellipsen der beiden im aktiven Kristall sich fortpflanzenden Wellen  $\parallel$  und  $\perp$  zum Hauptschnitt, die Ellipsen aber gekreuzt liegen.

brechung — dividiert sind. Dann wird der Nenner von (13) und (14) (bis auf das Vorzeichen):

$$\frac{1}{\mu^{(2)}} \left\{ \Theta n_1 c_1 [a_1 (c_2^{(1)} - c_2^{(2)} \mu^{(1)} \mu^{(2)}) + c_1^2 (a_2^{(1)} - a_2^{(2)} \mu^{(1)} \mu^{(2)})] \right. \\ + \Theta_{11} [c_2^{(1)} c_2^{(2)} (n_2^{(2)} - n_2^{(1)} \mu^{(1)} \mu^{(2)}) a_1 \\ + (n_2^{(2)} c_2^{(2)} a_2^{(1)} - n_2^{(1)} a_2^{(1)} c_2^{(1)} \mu^{(1)} \mu^{(2)}) c_1] \\ \left. - \mu^{(2)} \Theta_{12} [(n_2^{(2)} c_2^{(1)} - n_2^{(1)} c_2^{(2)}) a_1 + (n_2^{(2)} a_2^{(1)} - n_2^{(1)} a_2^{(1)}) c_1] \right\}.$$

Wir werden uns nun auf zwei Fälle beschränken.

1.  $\zeta$  ist so klein, daß  $c_2^{(h)2}$  von der Ordnung  $d$  ist. Dann ist  $\mu^{(1)} \mu^{(2)} = -1$ .

2. Wir ordnen die beiden Indizes (1) und (2) so den beiden Strahlen zu, daß beide  $\mu^{(h)} < 1$  sind ( $\mu^{(1)} = \mu^{(e)}$ ,  $\mu^{(2)} = \mu^{(o)}$ ). Wir beschränken uns auf so große  $\zeta$ , daß  $\mu^{(1)} \mu^{(2)}$  neben 1 fortbleiben kann.

Da nun die  $c_2^{(h)}$  sich um Größen  $\sqrt{n^{(1)} - n^{(2)}}$  unterscheiden und  $c_2^{(h)}$  in dem betrachteten Gebiet um solche Beträge variiert,  $a_2^{(h)}$  und  $n^{(h)}$  aber nur um  $(n^{(1)} - n^{(2)})$ , so wird man statt den  $n_2^{(h)}$  und  $a_2^{(h)}$  mit Mittelwerten rechnen können, zumal die ersten beiden eckigen Klammern im Falle (1) nur ihre Summen, im Falle (2) nur je ein Glied (so daß die Differenz nicht vorkommt) enthalten, und im Faktor von  $\Theta_{12}$  die Differenz  $a_2^{(1)} n_2^{(2)} - a_2^{(2)} n_2^{(1)}$  neben dem viel größeren Wert  $(c_2^{(1)} - c_2^{(2)})$  steht. Nun ist:

$$\Theta_{12} = 2 \frac{n_0 - n_e}{n} \sin \zeta \cos \zeta,$$

wenn jetzt  $n_0$  und  $n_e$  die Brechungsindizes der beiden senkrecht zur Achse fortschreitenden Wellen sind. Daher ist  $\Theta_{12}$  von der Größe  $(n_0 - n_e)$ , und da diese Größe außerdem in beiden Fällen noch mit kleinen Werten: nämlich im Falle (1) mit dem kleinen  $\sin 2\zeta$ , im Falle (2) mit  $\mu^{(2)}$  multipliziert vorkommt, so kann  $(c_2^{(1)} - c_2^{(2)}) \Theta_{12} \mu^{(2)}$  neben  $(c_2^{(1)} + c_2^{(2)}) c_1$  auch dann wegbleiben, wenn  $c_1$  von der Ordnung  $\sqrt{n_0 - n_e}$  ist.

Da wir gesehen haben, daß bei isotropen Körpern die gesuchte Erscheinung bei großen Einfallswinkeln am größten ist, so wollen wir uns auch hier auf solche beschränken. Dann ist erlaubt  $a_1 = 1$ ,  $\Theta = \Theta_{11}$ ,  $n_2^{(h)} = n_1$  zu setzen. Als Nenner findet man im Fall:



$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & -\frac{2i c_1}{n_1} \left\{ c_1 + c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + \frac{c_2^{(1)} c_2^{(2)}}{c_1} \right\}, \\ \text{II.} \quad & \frac{i c_1}{\mu^{(2)} n_1} \left\{ c_1 + c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + \frac{c_2^{(1)} c_2^{(2)}}{c_1} \right\}. \end{aligned}$$

Im Zähler kann man dieselben Vernachlässigungen einführen. Man erhält als Zähler von:

$$\begin{aligned} [R_p]: & \frac{2 c_1}{n_1} \{ c_2^{(1)} - c_2^{(2)} \}, \\ [R_s]: & -\frac{2 c_1}{n_1} \left[ \{ c_2^{(1)} - c_2^{(2)} \} \mu^{(1)} - \frac{\Theta_{12}}{\Theta} \right] \frac{1}{\mu^{(2)}}. \end{aligned}$$

Den letzten Ausdruck kann man noch umformen. Da im Fall (1)  $\mu^{(1)} = i$  ist, so kann  $\Theta_{12}/\Theta$  wegbleiben. Im Falle (1) gelangt man also stets auf die in III. § 3 behandelte Gleichung (18) zurück. Im Fall (2) erhält man mit Benutzung von (26) und (25):

$$\begin{aligned} & - (c_2^{(1)} - c_2^{(2)}) \left( \frac{-c_2^{(1)}}{\operatorname{tg} \zeta} - i \frac{d_{22} + d_{33}}{(\Theta_{33} - \Theta_{22}) \bar{n}_2} \right) + \frac{\Theta_{12}}{\Theta} \\ & = - (c_2^{(1)} - c_2^{(2)}) \left( \frac{c_2^{(2)}}{\operatorname{tg} \zeta} - i \frac{d_{22} + d_{33}}{(\Theta_{33} - \Theta_{22}) \bar{n}_2} \right), \end{aligned}$$

da ja:  $c_2^{(1)2} - 2(n^{(1)} - n^{(2)}) = c_2^{(2)2}$  ist.

Somit erhält man schließlich:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} [R_s]_{E_s=0} = - [R_p]_{E_p=0} \\ [R_s]_{E_s=1} = \frac{2 [c_2^{(2)} - c_2^{(1)}] \left[ \frac{c_2^{(2)}}{\operatorname{tg} \zeta} - i \frac{(d_{22} + d_{33}) \bar{n}_2^2}{2(n_2^{(2)} - n_2^{(1)})} \right]}{c_1 + c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + \frac{c_2^{(1)} c_2^{(2)}}{c_1}} \end{array} \right.$$

Hierin kann man setzen:

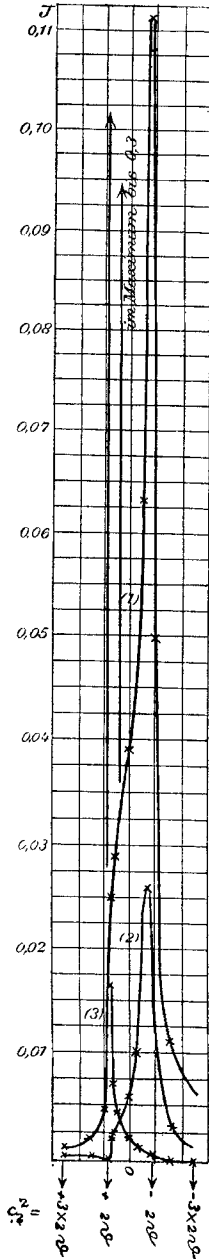
$$c_2^{(1)} = \sqrt{c_2^2 + 2\mathcal{F}}, \quad c_2^{(2)} = \sqrt{c_2^2 - 2\mathcal{F}}.$$

Betrachten wir nun, wie die reflektierte Intensität

$$J = |[R_p]|^2 = |[R_s]|^2$$

sich mit  $\zeta$  ändert, wenn  $d_{hh}$  positiv ist, und etwa die Parameter von Quarz genommen werden. Quarz hat im blauen Licht ein Drehungsvermögen von  $30^\circ$  pro Millimeter Dicke. Dem entspricht  $n_2^2 d_2 = 0,000054$ . Die Konstante  $d_1$  wollen wir gleich Null setzen, wie dies die Messungen von W. Voigt<sup>1)</sup> wahrscheinlich gemacht haben. Die Brechungsexponenten für eine Welle, welche  $\perp$  zur Hauptachse fortschreitet, sind  $n_0 = 1,558$ ,  $n_e = 1,568$ .

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 18. p. 668. 1905.



- (1)  $\zeta$  positiv.  
 (2)  $\zeta$  negativ.  
 (3) gewöhnlicher Kristall.  
 $E_p = 0$  od.  $E = 0$ .  $\zeta = 12^\circ$ .  
 ( $[d_{22} + d_{33}]$  positiv).

Fig. 4.

Unter diesen Annahmen sind die Figg. 4 und 5 gezeichnet. Hierbei ist  $J$  als Ordinate,  $c_2^2$  als Abszisse aufgetragen.

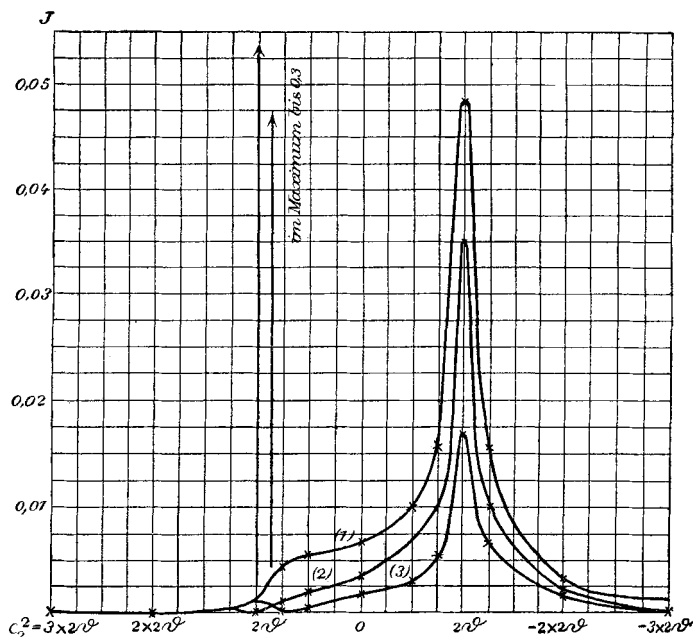
Die Breite der Erscheinung für  $\zeta = 0$  ist durch zwei senkrechte Linien angedeutet. Dreht man nun die Kristallplatte in positiver oder negativer Richtung aus der Lage  $\zeta = 0$  heraus, so nimmt  $J$  beidemale ab. Sehr merkwürdig ist aber die Ungleichwertigkeit von  $+\zeta$  und  $-\zeta$  bei einem positiven ( $n_0 < n_e$ ) Kristall. Positives  $d_{22} + d_{33}$  vorausgesetzt, nimmt nämlich bei einem solchen Kristall  $J_{-\zeta}$  wesentlich schneller ab als  $J_{+\zeta}$  (vgl. Fig. 4). Weiterhin verhält sich  $J_{+\zeta}$  nicht wesentlich anders als die an einem gewöhnlichen Kristall reflektierte Intensität.  $J_{-\zeta}$  zeigt aber ein ganz abweichendes Aussehen. Für  $\zeta = 13^\circ$  etwa wird  $J_{-\zeta}$  an der Stelle  $c_2^2 = -2\vartheta$  zu Null, da dann hier  $\mu^{(2)} = 0$  ist. Bei weiterem Drehen wandert diese Nullstelle nach  $c_2^2 = +2\vartheta$  hin, ohne diese Stelle aber je zu erreichen; die Intensität bei  $c_2^{(2)} = -2\vartheta$  nimmt dabei wieder zu (Fig. 5). Man sieht aus Formel (30), daß  $J$  an der Stelle  $c_2^{(2)} = +2\vartheta$  stets nur von der Elliptizität der im Kristall sich fortpflanzenden Wellen herrührt. Sie nimmt also beim Vergrößern von  $\zeta$  stets ab. Die Erscheinung soll nach (30) für  $E_p = 0$  und  $E_s = 0$  dieselbe sein.

Für einen Kristall mit negativem  $d_{22} + d_{33}$  gelten dieselben Betrachtungen, nur treten die Erscheinungen, welche eben bei  $\pm\zeta$  auftraten, jetzt bei  $\mp\zeta$  ein.

Bei einem negativen ( $n_0 > n_e$ ) Kristall wird die Ungleichwertigkeit von  $+\zeta$  und  $-\zeta$  nicht merklich, weil diese erst zutage tritt, wenn  $c_2^0$  imaginär ist. Dies tritt hier aber nicht mehr in dem Intervall

$c_2 = +2\vartheta$  und  $c_2 = -2\vartheta$  ein, indem doch  $J$  überhaupt nur merklich ist.

Bei den angestellten Betrachtungen war angenommen, daß die Achse streng in der Grenzebene liegt. Wir wollen noch nachsehen, wie sich  $J$  bei einem gewöhnlichen Kristall verhält,



(1)  $\zeta$  positiv. (3)  $\zeta$  negativ. (2) gewöhnlicher Kristall.  
 $E_p = 0$  od.  $E_s = 0$ .  $\zeta = 27^\circ$ . ( $[d_{22} + d_{33}]$  positiv.)

Fig. 5.

wenn die Achse um den kleinen Winkel  $(\eta - 90) = \delta$  aus der Grenzebene abweicht. Zunächst sieht man aus den Formeln p. 816, daß man das Glied mit  $\Theta_{13}$  in der bisherigen Annäherung fortlassen kann. Formal gelten also die Gleichungen (30). Jedoch ist jetzt<sup>1)</sup>:

$$\mu^{(2)} = \frac{c_2^{(2)} - \frac{\text{ctg } r}{\cos \zeta}}{\text{tg } \zeta} = \frac{c_2^{(2)} + \frac{\sin \delta}{\cos \zeta}}{\text{tg } \zeta}.$$

1) Vgl. z. B. F. Pockels, Kristalloptik p. 194 f. ( $\eta = \vartheta$  bei Pockels).

Hieraus folgt, daß  $+\zeta$  und  $-\zeta$  bei gewöhnlichen Kristallen stets gleichwertig ist.<sup>1)</sup>

## V. Beobachtungen.

### § 1. Allgemeine Anordnung.

Nach der entwickelten Theorie ist nur dann Hoffnung, einen beobachtbaren Einfluß eines aktiven Körpers zu finden, wenn man dicht am Einfallswinkel der totalen Reflexion beobachtet. Bei der Schwierigkeit der Beobachtung wird man sich zunächst darauf beschränken, die von der Theorie geforderten Erscheinungen *qualitativ* nachzuweisen. Also: bei gekreuzten Nicols — wenn das einfallende Licht  $\parallel$  oder  $\perp$  zur Einfallsebene polarisiert ist — soll das Gesichtsfeld dann aufgehellt werden, wenn man das Licht am Grenzwinkel einfallen läßt, sonst nicht. Man kann aber statt monochromatisches Licht einfallen zu lassen und den Einfallswinkel allmählich zu ändern, mit einem Schlage die Erscheinung klarstellen, wenn man weißes Licht einfallen läßt, so daß für *eine* Farbe das Licht streifend in das zweite Medium austritt. Zerlegt man dann das reflektierte Licht, nachdem es den Analysator passiert hat, durch ein Spektroskop, so wird man im Spektrum die Intensität über die einzelnen Farben in ähnlicher Weise verteilt sehen wie sie in Figg. 4 und 5 über die einzelnen  $c_2^2$  verteilt ist. Denn in dem betrachteten kleinen Bereich wird man für den Mittelwert  $n$  setzen können  $1 + (k/2)\lambda$ ; dann ist  $c_2^2 = k\lambda$  proportional zu  $\lambda$ . Die eben beschriebene Methode hat den Vorteil, daß sie die verschiedenen Erscheinungen, die man sonst — etwa durch Variation des Einfallswinkels — nacheinander hervorbringen müßte, nebeneinander zeigt. Man kann z. B. übersehen, was bei einem Kristall an den Grenzwinkeln bei den Strahlen vorgeht.

Die Theorie läßt nun folgendes erwarten: Bei isotropen Körpern erscheint in der Farbe im Spektrum, welche streifend in den natürlich aktiven Körper austritt, eine helle Linie.

1) Man sieht, daß für gewöhnliche positive Kristalle ( $n_o < n_e$ )  $J$  zwischen  $c_2^2 = -2\vartheta$  und  $c_2^2 = +2\vartheta$  nie Null sein kann, wie bei aktiven positiven Kristalle. Umgekehrt kann  $J$  in diesem Intervalle bei gewöhnlichen negativen ( $n_o < n_e$ ) Kristallen verschwinden, nicht aber bei aktiven negativen Kristallen.

Dasselbe ist der Fall, wenn man den isotropen Körper durch einen einachsigen aktiven Kristall, dessen Achse in der Grenzebene liegt, ersetzt, und den Winkel  $\zeta$ , welchen die Achse mit der Einfallsebene bildet, gleich Null macht. Dreht man dann die Achse aus dieser Lage heraus, so nimmt, wenn  $d_{22} + d_{33}$  positiv ist, die Intensität der Linie langsam ab, wenn man in positiver, sie nimmt schnell ab, wenn man in negativer Richtung  $\zeta$  vergrößert (Fig. 4). Für größere  $\zeta$  soll sich dann bei positiver Drehung die Linie in ein Band ausziehen, während bei negativer Drehung sie sich teilt. Alle diese Erscheinungen bleiben ungeändert, wenn man von  $E_p = 0$  zu  $E_s = 0$  übergeht.

Für einen Kristall mit negativen  $d_{22} + d_{33}$  gilt dasselbe, wenn man stets an Stelle von  $+\zeta$  jetzt  $-\zeta$  setzt.

Wie schon erwähnt, ist es praktisch, den Einfallswinkel möglichst groß zu machen. Bei meinen Versuchen war er  $88\frac{1}{2}^\circ$  bis  $89^\circ$ . Um dann noch totale Reflexion zu erhalten, muß das Medium (1) nahezu denselben Brechungsindex haben wie (2). Es wurde daher der aktive Körper mit einer Flüssigkeit umgeben, deren Dispersionskurve die des Kristalls überschneidet. Sah man reflektiertes weißes Licht durch ein Prisma an bei parallelen Nicols, so war die Stelle der Überschneidung durch eine schwarze Linie kenntlich, da hier ja fast alles Licht ungestört, von (1) nach (2) hindurchtritt. Nach Kreuzung der Nicols sollte dann dicht neben dieser Stelle die helle Linie erscheinen.

Zur Beobachtung stand mir ein Fuesssches Polarisationspektrometer<sup>1)</sup> zur Verfügung. An Stelle der gebräuchlichen runden Öffnung war ein Spalt gesetzt, auf den ein leuchtender Nernstfaden projiziert wurde. Um möglichste Helligkeit zu erreichen, war die Spaltbreite recht groß, etwa 1 mm, gewählt. Die Höhe des Spaltes hatte keinen Einfluß auf die Erscheinung, wie mit einem zweiten gekreuzt davor gestellten Spalt gezeigt werden konnte.

Auf das Beobachtungsfernrohr war ein Okularspektroskop aufgesetzt. Natürlich waren noch einige Blenden in den Strahlengang eingeschaltet, um störendes Nebenlicht zu vermeiden.

---

1) Beschrieben von Nakamura, Ann. d. Phys. 20. p. 810. 1906.

Zur Beobachtung hatte ich eine Natriumchloratplatte, drei Quarzplatten und, um einen Vergleich mit einem nichtdrehenden Kristall anzustellen, eine Turmalinplatte.

Der Natriumchloratkristall war im Göttinger Physikalischen Institut von den Herren Dr. Krüger und Finke freundlichst für mich gezüchtet worden. Aus ihm war von Steeg und Reuter eine Platte aus mehreren Stücken zusammengesetzt, welche zwischen zwei Steinsalzstäbe gefaßt und zugleich mit ihnen — um möglichste Planheit zu erreichen — abgeschliffen waren. Die brauchbare Fläche war  $1 \times 6,5$  cm groß, die Dicke 1 cm.

Je eine rechts- und linksdrehende rechteckige Quarzplatte war mir von Steeg und Reuter zur Verfügung gestellt. Die Fläche betrug  $2,2 \times 4,2$  cm.

Schließlich hatte ich eine kreisrunde, dem Göttinger Institut gehörende Quarzplatte von  $4\frac{1}{2}$  cm Durchmesser. Die Dicke der Quarzplatten war etwa 3 mm.

Die Platte von brasilianischem Turmalin stammte von demselben großen Kristall, an dem W. Voigt die Elastizitätskonstanten bestimmt hatte. Sie hatte eine Fläche von  $4 \times 2,2$  cm.

Während der Beobachtung befand sich die Kristallplatte in einem Trog, welcher die passend gewählte Flüssigkeit enthielt. Es zeigte sich, daß alle drei gewählten Flüssigkeiten vermutlich durch suspendierte Teilchen, durchgehendes Licht im Rot etwas depolarisierten. Es wurde daher möglichst im Blau beobachtet.

Die Platten der einachsigen Kristalle waren um eine horizontale, zur Plattenebene normale Achse drehbar befestigt, um verschiedene  $\zeta$  herstellen zu können.

## § 2. Die Beobachtungen.

Die Natriumchloratplatte, welche kurz vor der Beobachtung von Steeg und Reuter nochmals abgeschliffen war, da sie etwas hygroskopisch war, wurde mit Anisol umgeben. Die Überschneidung der Dispersionskurven fand im Rot statt. (Alle verwandten Flüssigkeiten hatten stärkere Dispersion als der zugehörige feste Körper.) Durch Zusatz von Xylol konnte die Überschneidung nach Blau getrieben werden. Bei gekreuzten Nicols war dann im Spektrum dicht neben der Stelle

der dunkeln Linie — wie es die Theorie verlangt etwas *nach Blau* zu — eine ziemlich intensive gelbrote Linie sichtbar. Diese Linie wanderte bei Zusatz von Xylol richtig nach Blau. Es sei noch bemerkt, daß das Licht, welches in die Platte eintrat — also vornehmlich von der Farbe, für die  $n_1 = \bar{n}_2$  ist, an den Kittschichten der Platte diffus gebrochen wurde und das ganze Gesichtsfeld etwas aufhellte. Indes war die erwähnte charakteristische Linie so hell, daß die Aufhellung nicht störte.

Die Quarzplatten wurden in Äthylenbromid getaucht. Es wurde  $n_1 = n_0$  im Blau,  $n_1 = n_e$  also für eine Farbe, welche um so weiter nach Violett zu lag, je größer  $\zeta$  war.

Für  $\zeta = 0$  ( $n_0 = n_e$ ) war demgemäß im Blau eine sehr intensive helle Linie sichtbar. Wie die Theorie es verlangt, war diese Erscheinung für alle Platten die gleiche.

Für einen rechtsdrehenden Quarz ist nach (28) und den Festsetzungen (8)  $d_{22} + d_{33}$  positiv, für einen linksdrehenden negativ. Der Theorie entsprechend nahm wirklich bei der *rechtsdrehenden* Quarzplatte bei *negativem*  $\zeta$  die Intensität wesentlich schneller ab als bei *positivem*, und umgekehrt: bei der *linksdrehenden* Quarzplatte nahm sie bei *positiver* Drehung schneller ab, als bei *negativer*.

Man vermag also aus den beschriebenen Reflexionsbeobachtungen auf den Drehungssinn eines aktiven positiven einachsigen Kristalls zu schließen. Bei einem negativen aktiven Kristall würde nach der Theorie positive und negative  $\zeta$  merklich gleichwertig sein.

Die Beobachtungen an den rechteckigen Platten wurden in allen vier Lagen, welche durch Drehen und Wenden der Platte um  $180^\circ$  erreicht werden können, angestellt, um etwaige Fehler in der Lage der Achse zu finden. Die Erscheinung blieb indes in allen Lagen derselben Platte gleich.

Auch bei der runden Quarzplatte, deren Drehungssinn unbekannt war, konnten die analogen Erscheinungen beobachtet werden. Sie zeigte dieselbe Symmetrie wie die linksdrehende rechteckige Platte und erwies sich somit als linksdrehend. Auch bei der runden Platte wurden mehrere Lagen geprüft, ohne daß die Erscheinung sich änderte. Alle diese Er-

scheinungen änderten sich nicht, wenn man beide Nicols um  $90^\circ$  drehte — wie es die Theorie gleichfalls voraussagte. —

Zum Vergleiche wurden Beobachtungen am Turmalin, der in ein Gemisch von Schwefelkohlenstoff und Benzol getaucht war, angestellt. War  $\zeta \geq 0$ , so war beidemal *eine* helle Linie von merklich derselben Intensität sichtbar; *dieselbe verschwand* mit  $\zeta = 0$ , — beides im Einklang mit der Theorie.

Die eben mitgeteilten Beobachtungen beziehen sich auf kleinere  $\zeta$  (etwa bis  $15^\circ$ ). Für größere  $\zeta$  traten Komplikationen ein, die ich noch nicht zu erklären vermag.

Daß bei den hier mitgeteilten Beobachtungen Oberflächenschichten irgendwelche wesentliche Rolle gespielt haben, halte ich für ausgeschlossen. Man kann dies am Quarz direkt beweisen, indem man die Achse senkrecht zur Einfallsebene stellt ( $\zeta = 90^\circ$ ). Dann muß nach Symmetrie und da die Drehung verschwindet, das Gesichtsfeld dunkel erscheinen. Ich habe den Versuch angestellt, und das Gesichtsfeld war in der Tat dunkel.

(Eingegangen 11. Juni 1909.)