Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen und der Perioden derselben.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a./S.

Einleitung.

Die im 99. Bande des Journals für Mathematik, S. 236, von mir entwickelten Differentialgleichungen zwischen den partiellen Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Argumenten und nach den Parametern habe ich für den einfachsten Fall, für Thetafunctionen mit zwei Argumenten, im 29. Bande (S. 272) der Math. Annalen so umgeformt, dass die sämmtlichen darin vorkommenden Ausdrücke unmittelbar Covarianten, oder Theile von Covarianten sind, oder sonst mit der Invariantentheorie in engster Verbindung stehen. Die entsprechende Form der Differentialgleichungen will ich nun hier für die hyperelliptischen Thetafunctionen mit ϱ Argumenten aufstellen, und zwar soll dies auf directem Wege geschehen, ohne dass ich dazu, wie ich es in dem erwähnten Aufsatze für $\varrho = 2$ gethan habe, die schon im *Journal für Mathematik entwickelten* Differentialgleichungen benutze. Dabei werde ich auch ein anderes Verfahren einschlagen als in dem ersten Aufsatze im Journal für Mathematik. Denn dort kam es mir in erster Linie darauf an, dass in der ganzen Hauptentwicklung nur von der Definition der Thetafunction durch die Normalintegrale zweiter Gattung (und der Thatsache, dass dieser Definition wirklich durch eine analytische Function genügt wird), und sonst von keiner Eigenschaft der Thetafunction Gebrauch gemacht wurde, während ich hier nur auf die *Form* und *Zusammensetzung* der in den Differentialgleichungen vorkommenden Ausdrücke Gewicht lege. Demgemäss will ich mich hier nicht auf die Definition der Thetafunction allein beschränken, sondern auch die Haupteigenschaften derselben als bekannt voraussetzen und in die Entwicklung mit hineinziehen. Ich werde zuerst die Differentialgleichungen der Perioden der Normalintegrale erster und zweiter Gattung aufstellen, — es sind dies die Gleichungen (A), (B), (C) und (D) —, und dann gelange ich *mit ihrer Hilfe* zu den Differentialgleichungen der Thetafunctionen selbst, indem ich zu deren Definition die Veränderungen benutze, die sie erleiden, wenn man die Argumente um Systeme von Perioden vermehrt.

§ 1.

Bezeichnungen und Definitionen.

Zuerst müssen einige Bezeichnungen und Bezeichnungsweisen für die folgenden Entwicklungen eingeführt werden.

Die *ganzen Functionen* sollen, da hier grosser Nachdruck auf die Invarianteneigenschaft der vorkommenden Ausdrücke gelegt wird, als homogen in den Variablen betrachtet werden. Ich werde jedoch fast überall nur die eine, die erste, der Variablen schreiben, theils der Kürze halber, theils mit Rücksicht auf die im folgenden vorkommenden Differentiationen und Integrationen.

Wenn Ableitungen nach den Variablen x_1 und x_2 gebildet werden, so soll dies durch angefügte Indices ausgedrückt werden, jedoch der Art, dass die mit dem Index versehene Function nicht die Ableitung selbst, sondern dieselbe dividirt durch die Dimension der ursprünglichen Function in den x bedeutet: wenn μ die Dimension von $g(x_1, x_2)$ in den x ist, so soll

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \mu g_{10}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = \mu g_{01}$$

sein. Und entsprechend sei auch die Bezeichnung bei den höheren Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \mu(\mu - 1)\, g_{20}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \mu(\mu - 1)\, g_{11}, \cdots,$$

überhaupt sei

$$\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x_1} = p g_{\varkappa+1,\lambda}, \quad \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x_2} = p g_{\varkappa,\lambda+1},$$

wenn p die Dimension von $g_{\varkappa\lambda}$ in den x ist. Man hat bei dieser Bezeichnung den Vortheil, dass die Polaren von g unmittelbar die folgenden Ausdrücke sind:

$$\begin{gathered} y_1 g_{10}(x) + y_2 g_{01}(x), \\ y_1^2 g_{20}(x) + 2y_1 y_2 g_{11}(x) + y_2^2 g_{02}(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

und dass

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1 g_{10}(x) + x_2 g_{01}(x) \\ &= x_1^2 g_{20}(x) + 2x_1 x_2 g_{11}(x) + x_2^2 g_{02}(x) \qquad (1) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ist. — Die Differentiationen nach anderen Variablen sollen durch Differentiationszeichen ausgedrückt werden. —

Was nun das hyperelliptische Gebilde anbelangt, so will ich die $2\varrho+2$ singulären Punkte (Verzweigungspunkte) sämmtlich im Endlichen annehmen, so dass der Radicand der in den Integralen befindlichen Wurzelgrösse

$$y^2 = f(x) = A_{2\varrho+2} \prod_{\lambda=1}^{2\varrho+2} (x - a_\lambda) = \sum_{\varkappa=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\varkappa} A_\varkappa x^\varkappa$$

ist. In den ϱ Normalintegralen erster Gattung

$$\int \frac{H(x)_\alpha}{2y}\, dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

sei

$$H(x)_\alpha = (-x)^{\alpha-1},$$

und in den ϱ Normalintegralen zweiter Gattung

$$\int \frac{G(x)_\alpha}{2y}\, dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

sollen die ganzen Functionen $G(x)_\alpha$, die im allgemeinen noch eine Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, hier dadurch vollkommen bestimmt sein, dass identisch

$$\frac{1}{2y} \sum_\alpha H(s)_\alpha\, G(x)_\alpha = \frac{-f(x|s)}{(x-s)^2\, y} - \frac{d}{dx} \frac{y}{x-s} \tag{2}$$

ist, wo

$$f(x|s) \tag{3}$$

die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Polare von $f(x)$ unter Einführung der neuen, willkürlichen Variablen s_1, s_2 ist. Die Summation über α ist hier, wie überall im folgenden, wo die Summe oder das Product über diesen Buchstaben oder über β, γ, δ gebildet wird, von 1 bis ϱ auszuführen.

Diese ϱ Integrale erster, bez. zweiter Gattung will ich je in ein einziges Integral zusammenfassen. Bei den Integralen zweiter Gattung ergiebt sich die Art und Weise, wie dies am vortheilhaftesten geschieht, unmittelbar aus der Gleichung (2), welche die Functionen $G(x)_\alpha$ bestimmt: man hat dieselbe nur mit dx zu multipliciren und zu integriren:

$$\sum_\alpha (-s)^{\alpha-1} \int \frac{G(x)_\alpha}{2y}\, dx = \int \frac{-f(x|s)}{(x-s)^2\, y}\, dx - \frac{y}{x-s}. \tag{4}$$

Die Zusammenfassung der Integrale erster Gattung geschieht dadurch, dass man dieselben mit $\binom{\varrho-1}{\alpha-1} t^{\varrho-\alpha}$, wo t, wie oben s, eine neue willkürliche Variable ist, multiplicirt und addirt; wenn man dann

$$(5) \qquad \sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1}(-x)^{\alpha-1}\,t^{\varrho-\alpha} = (t-x)^{\varrho-1} = \pi(x)$$

bezeichnet, so ist

$$(6) \qquad \sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1}\,t^{\varrho-\alpha}\int\frac{H(x)_\alpha}{2y}\,dx = \int\frac{\pi(x)}{2y}\,dx.$$

Denkt man sich hierin die rechte Seite in homogenen Variablen geschrieben, so ist dieselbe eine Covariante der beiden Reihen cogredienter Variablen x_1, x_2 und t_1, t_2; und diese Gleichung lehrt daher, dass sich die Integrale erster Gattung bei der linearen Transformation der Variablen x_1, x_2 so ändern wie die Coefficienten einer Covariante $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. —*)

---

*) Ein entsprechendes Verhalten bei den Integralen zweiter Gattung kann man, wie es schon durch F. Klein in seinen Vorlesungen geschehen ist, dadurch erreichen, dass man

$$\frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!}\int\frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\,\partial s_2^{\varrho-\alpha}}\left(\frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2}\right)\frac{dx}{y} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

als die Normalintegrale annimmt. Dieselben unterscheiden sich nämlich nur um einen rationalen Ausdruck von $\int G(x)_\alpha\,\frac{dx}{2y}$; denn schreibt man die Gleichung (4) homogen in den Variablen s_1, s_2:

$$\text{(a)} \qquad \sum_\alpha (-s_1)^{\alpha-1}\,s_2^{\varrho-\alpha}\int\frac{G(x)_\alpha}{2y}\,dx = \int\frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2\,y}\,dx - \frac{y\,s_2^{\varrho}}{s_2x-s_1},$$

und differentiirt dieselben, so findet man:

$$\int\frac{G(x)_\alpha}{2y}\,dx = \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!}\int\frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\,\partial s_2^{\varrho-\alpha}}\left(\frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2}\right)\frac{dx}{y}$$
$$-\frac{(-1)^{\alpha-1}\,y}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!}\;\frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\,\partial s_2^{\varrho-\alpha}}\left(\frac{s_2^{\varrho}}{s_2x-s_1}\right).$$

Den Ausdruck von $\int\frac{-f(x|s)}{(t_2x-t_1)^2}\,\frac{dx}{y}$ durch diese Normalintegrale erhält man, indem man die $(\varrho-1)^{\text{te}}$ Polare der Gleichung (a) unter Einführung der Variablen t_1, t_2 bildet, und die linke Seite durch das in Frage stehende Integral ersetzt:

$$\int\frac{-f(x|s)}{(t_2x-t_1)^2\,y}\,dx$$
$$= \sum_\alpha \frac{t_1^{\alpha-1}\,t_2^{\varrho-\alpha}}{(\alpha-1)!\,(\varrho-\alpha)!}\int\frac{\partial^{\varrho-1}}{\partial s_1^{\alpha-1}\,\partial s_2^{\varrho-\alpha}}\left(\frac{-f(x|s)}{(s_2x-s_1)^2}\right)\frac{dx}{y}$$
$$+\frac{(t_1s_2-t_2s_1)^{\varrho}}{(s_2x-s_1)^{\varrho}\,(t_2x-t_1)}\,y.$$

Diese Gleichung zeigt insbesondere auch das invariante Verhalten dieser Normalintegrale.

Um nun die zu dem hyperelliptischen Gebilde gehörenden Thetafunctionen herzustellen, muss man auf 2ϱ bestimmten Integrationswegen 2ϱ Systeme von Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung:

$$(7)\qquad \begin{matrix} 2\omega_{1\beta}, & 2\omega_{2\beta}, & \ldots, & 2\omega_{\varrho\beta}, \\ 2\omega'_{1\beta}, & 2\omega'_{2\beta}, & \ldots, & 2\omega'_{\varrho\beta}, \end{matrix} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

resp.

$$\begin{matrix} 2\eta_{1\beta}, & 2\eta_{2\beta}, & \ldots, & 2\eta_{\varrho\beta}, \\ 2\eta'_{1\beta}, & 2\eta'_{2\beta}, & \ldots, & 2\eta'_{\varrho\beta}, \end{matrix} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

bestimmen, wobei der erste Index der Periode das Normalintegral, das integrirt wurde, und der zweite Index den Integrationsweg angiebt, auf dem die Integration ausgeführt wurde. Alsdann setzt man die Determinante

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1\varrho} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\varrho 1} & \omega_{\varrho 2} & \ldots & \omega_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} = \omega,$$

und bezeichnet mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ die adjungirte Subdeterminante von $\omega_{\alpha\beta}$; jetzt ist, wenn man

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\omega}\sum\limits_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\alpha\gamma}(\omega)_{\beta\gamma} u_\alpha u_\beta = \eta(u), \\ \dfrac{\pi i}{\omega}\sum\limits_{\alpha\beta} (\omega)_{\alpha\beta}\, r_\beta\, u_\alpha + \dfrac{\pi i}{\omega}\sum\limits_{\alpha\beta\gamma} \omega'_{\gamma\alpha}(\omega)_{\gamma\beta}\, r_\alpha\, r_\beta = \chi(u, r), \end{cases}$$

(wobei, wie schon oben bemerkt, über α, β, γ je von 1 bis ϱ zu summiren ist,) annimmt:

$$(10)\qquad e^{\eta(u)}\sum_r e^{\chi(u,r)} = \Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$$

— die Summationsbuchstaben $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$ haben je alle ganzen, positiven und negativen Zahlen zu durchlaufen — die Fundamentalthetafunction, aus der die übrigen Thetafunctionen $\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_p$ durch Vermehrung der Argumente um Systeme von halben Perioden entstehen. —

Da in den Entwicklungen der beiden folgenden Paragraphen die Integrationswege, auf welchen eine Periode bestimmt wurde, nicht in Betracht kommen, will ich in denselben an den Perioden den zweiten Index, welcher den Integrationsweg angiebt, weglassen und also unter $2\omega_\alpha$, bez. $2\eta_\alpha$ irgend eine Periode des betreff. Integrals erster, bez. zweiter Gattung (d. i. ein $2\omega_{\alpha\beta}$ od. $2\omega'_{\alpha\beta}$, bez. ein $2\eta_{\alpha\beta}$ od. $2\eta'_{\alpha\beta}$,) verstehen.

§ 2.

Erste Gruppe der Differentialgleichungen der Perioden.

Die vier partiellen Differentialgleichungen der Perioden $2\omega_\alpha$ und $2\eta_\alpha$, welche sich auf die Invarianteneigenschaft dieser Grössen beziehen, lassen sich nun leicht aufstellen.

Führt man nämlich zur augenblicklichen Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$A_{2\varrho+2}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho+1}}+2A_{2\varrho+1}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho}}+\cdots+(2\varrho+2)A_1\frac{\partial g}{\partial A_0}=\varepsilon g,$$

$$(2\varrho+2)A_{2\varrho+2}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho+2}}+(2\varrho+1)A_{2\varrho+1}\frac{\partial g}{\partial A_{2\varrho+1}}+\cdots+A_1\frac{\partial g}{\partial A_1}=\zeta g,$$

so ist, wie unmittelbar ersichtlich,

$$\begin{aligned}
\varepsilon f(x) &= (2\varrho+2)f_{10}(x),\\
\varepsilon f(x|s) &= (\varrho+1)f_{10}(x|s)+\frac{\partial}{\partial s}f(x|s),\\
\zeta f(x) &= (2\varrho+2)\,x f_{10}(x),\\
\zeta f(x|s) &= (\varrho+1)\,x f_{10}(x|s)+s\frac{\partial}{\partial s}f(x|s),
\end{aligned}$$

und man überzeugt sich jetzt leicht, durch einfaches Ausführen der Differentiationen und der Operationen ε und ζ von der Richtigkeit der Identitäten

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\pi(x)}{2y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi(x)}{2y}\right)=\sum_\alpha\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\frac{(\alpha-1)H(x)_{\alpha-1}}{2y}t^{\varrho-\alpha},\\
&\varepsilon\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}\right),\\
&\zeta\frac{\pi(x)}{2y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{x\pi(x)}{2y}\right)=-\sum_\alpha\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\frac{\alpha H(x)_{\alpha-1}}{2y}t^{\varrho-\alpha},\\
&\zeta\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{-xf(x|s)}{(x-s)^2y}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{-sf(x|s)}{(x-s)^2y}\right).
\end{aligned}\right.$$

Beide Seiten jeder dieser Gleichungen multiplicire ich mit dx und integrire sie auf einem geschlossenen Integrationsweg. Da das Ergebniss einer solchen Integration bei den Normalintegralen erster und zweiter Gattung die Perioden $2\omega_\alpha$ und $2\eta_\alpha$ sind, so findet man, wenn man die Gleichungen (4) und (6) mit in Betracht zieht:

$$
(12)\quad \begin{cases}
\varepsilon \sum\limits_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\,\omega_\alpha\, t^{\varrho-\alpha} = \sum\limits_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} (\alpha-1)\, 2\,\omega_{\alpha-1}\, t^{\varrho-\alpha}, \\
\varepsilon \sum\limits_{\alpha} 2\,\eta_\alpha\, (-s)^{\alpha-1} = \dfrac{\partial}{\partial s} \sum\limits_{\alpha} 2\,\eta_\alpha\, (-s)^{\alpha-1} \\
\qquad\qquad = - \sum\limits_{\alpha} (\alpha-1)\, 2\,\eta_\alpha\, (-s)^{\alpha-2}, \\
\zeta \sum\limits_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\,\omega_\alpha\, t^{\varrho-\alpha} = - \sum\limits_{\alpha} \binom{\varrho-1}{\alpha-1} \alpha 2\,\omega_\alpha\, t^{\varrho-\alpha}, \\
\zeta \sum\limits_{\alpha} 2\,\eta_\alpha\, (-s)^{\alpha-1} = \dfrac{\partial}{\partial s} \sum\limits_{\alpha} 2\,\eta_\alpha\, s \cdot (-s)^{\alpha-1} \\
\qquad\qquad = \sum\limits_{\alpha} \alpha 2\,\eta_\alpha\, (-s)^{\alpha-1}.
\end{cases}
$$

Die Variablen s und t in diesen Gleichungen sind ganz beliebig, wie schon oben hervorgehoben wurde; es müssen daher die Coefficienten gleich hoher Potenzen dieser Variablen auf beiden Seiten einander gleich sein. Dieser Umstand liefert die Differentialgleichungen für die Perioden selbst:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon\,\omega_\alpha = (\alpha-1)\,\omega_{\alpha-1}, \\
\varepsilon\,\eta_i = -\,i\,\eta_{i+1}, \quad \varepsilon\,\eta_\varrho = 0, \\
\zeta\,\omega_\alpha = -\,\alpha\,\omega_\alpha, \\
\zeta\,\eta_\alpha = \quad \alpha\,\eta_\alpha,
\end{gathered}
$$

oder wenn man für die Operationszeichen ε und ζ die Differentialausdrücke selbst einsetzt:

$$
(\mathrm{A})\quad \begin{cases}
\sum\limits_{\lambda} (2\varrho+3-\lambda)\, A_\lambda \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial A_{\lambda-1}} = (\alpha-1)\,\omega_{\alpha-1}, \\
\sum\limits_{\lambda} (2\varrho+3-\lambda)\, A_\lambda \dfrac{\partial \eta_i}{\partial A_{\lambda-1}} = -\,i\,\eta_{i+1}, \\
\qquad \sum\limits_{\lambda} (2\varrho+3-\lambda)\, A_\lambda \dfrac{\partial \eta_\varrho}{\partial A_{\lambda-1}} = 0, \\
\sum\limits_{\lambda} \lambda A_\lambda \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial A_\lambda} = -\,\alpha\,\omega_\alpha, \\
\sum\limits_{\lambda} \lambda A_\lambda \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial A_\lambda} = \quad \alpha\,\eta_\alpha,
\end{cases}
$$

wo α einen der Werthe $1, 2, \ldots, \varrho$, i einen der Werthe $1, 2, \ldots, \varrho-1$ bedeutet und die Summation über λ in jeder dieser Gleichung von 1 bis $2\varrho+2$ auszuführen ist.

Die vier zugehörigen, entsprechenden Gleichungen erhält man aus der Thatsache, dass die, durch Integration auf einem geschlossenen Wege aus (4) und (6) hervorgehenden Gleichungen

$$\sum_\alpha \binom{\varrho-1}{\alpha-1} 2\,\omega_\alpha\, t^{\varrho-\alpha} = \int \frac{\pi(x)}{2y}\,dx,$$
$$\sum_\alpha 2\,\eta_\alpha(-s)^{\alpha-1} \qquad = \int \frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y}\,dx,$$

wenn man sie homogen in den Variablen macht, ungeändert bleiben bei den gegenseitigen Vertauschungen von x_1 und x_2, s_1 und s_2, t_1 und t_2, A_λ und $A_{2\varrho+2-\lambda}$, ω_α und $(-1)^\varrho\,\omega_{\varrho+1-\alpha}$ und η_α und $(-1)^\varrho\,\eta_{\varrho+1-\alpha}$; es muss dies also auch mit allen Gleichungen der Fall sein, welche Folgerungen aus diesen beiden Gleichungen sind, insbesondere mit dem Gleichungssystem (A). Man findet auf diese Weise:

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial A_\lambda} = (\varrho-\alpha)\,\omega_{\alpha+1},\\[2ex]
\displaystyle\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\eta_{i+1}}{\partial A_\lambda} = -(\varrho-i)\,\eta_i, \qquad \sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\eta_1}{\partial A_\lambda} = 0,\\[2ex]
\displaystyle\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda)\,A_{\lambda-1}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial A_{\lambda-1}} = -(\varrho-\alpha+1)\,\omega_\alpha,\\[2ex]
\displaystyle\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda)\,A_{\lambda-1}\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial A_{\lambda-1}} = (\varrho-\alpha+1)\,\eta_\alpha,
\end{array}\right.$$

wo λ, α und i dieselbe Bedeutung wie in dem System (A) haben.

Diese beiden Systeme, (A) *und* (B), *von Differentialgleichungen sind diejenigen, die ich in diesem Paragraphen aufstellen wollte.* —

An dieser Stelle möchte ich noch $\varepsilon\omega$ und $\zeta\omega$ bestimmen.

Aus der Bedeutung des Operationszeichens ε folgt, dass wenn man diese Operation an einer Determinante auszuführen hat, man die Summe der Determinanten bilden muss, die entstehen, wenn man die Operation ε je an einer Zeile oder Colonne ausführt. Bezeichnet man die Determinante (8) in der Weise:

$$\omega = |\omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta}|,$$

so ist

$$\varepsilon\omega = |\varepsilon\omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta},\ \varepsilon\omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta}|$$
$$+ |\omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ \varepsilon\omega_{3\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta}| + \cdots,$$

oder, da ω_α irgend ein $\omega_{\alpha\beta}$ bedeutet, also $\varepsilon\omega_{\alpha\beta} = (\alpha-1)\,\omega_{\alpha-1,\beta}$ ist:

$$\varepsilon\omega = |\ 0\ ,\ \omega_{2\beta},\ \omega_{3\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta},\ \omega_{1\beta},\ \omega_{3\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta})$$
$$+ |\omega_{1\beta},\ \omega_{2\beta},\ 2\,\omega_{2\beta},\ \ldots,\ \omega_{\varrho\beta}| + \cdots,$$

und hieraus folgt, da jede dieser Determinanten den Werth Null hat, dass $\varepsilon\omega = 0$ ist, oder:

$$(13)\qquad \sum_\lambda (2\varrho + 3 - \lambda)\, A_\lambda \frac{\partial\omega}{\partial A_{\lambda-1}} = 0.$$

Ebenso findet man

$$(14)\qquad \sum_\lambda \lambda\, A_{\lambda-1} \frac{\partial\omega}{\partial A_\lambda} = 0. -$$

In analoger Weise erhält man auch den Ausdruck für $\zeta\omega$. Es ist

$$\begin{aligned}
\zeta\omega &= |\zeta\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta}, \zeta\omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| \\
&+ |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \zeta\omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + \cdots \\
&= |-\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + |\omega_{1\beta}, -2\omega_{2\beta}, \omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta} \\
&+ |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, -3\omega_{3\beta}, \ldots, \omega_{\varrho\beta}| + \cdots \\
&= -\omega - 2\omega - 3\omega - \cdots \qquad = -\tfrac{1}{2}\varrho(\varrho+1)\,\omega;
\end{aligned}$$

mithin ist

$$(15)\qquad \sum_\lambda \lambda A_\lambda \frac{\partial\omega}{\partial A_\lambda} = -\tfrac{1}{2}\varrho(\varrho+1)\,\omega.$$

Und hierzu tritt noch die entsprechende Gleichung

$$(16)\qquad \sum_\lambda (2\varrho + 3 - \lambda)\, A_{\lambda-1} \frac{\partial\omega}{\partial A_{\lambda-1}} = -\tfrac{1}{2}\varrho(\varrho+1)\,\omega. -$$

3.

Zweite Gruppe der Differentialgleichungen der Perioden.

Die übrigen $2\varrho - 1$ Differentialgleichungen für jede der Perioden will ich zusammen auf einmal entwickeln.

Die Differentiation nach den Constanten in denselben wird in der Form eines Aronhold'schen Processes geschehen, d. h. es werden die Perioden nach den Coefficienten A_μ von $f(x)$ differentiirt, die Ableitungen mit den entsprechenden Coefficienten einer Covariante

$$\varphi = \sum_{\mu=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\mu} \varphi_\mu x^\mu$$

multiplicirt und die sämmtlichen Producte addirt. Diesen Process will ich mit δ bezeichnen:

$$\sum_\mu \varphi_\mu \frac{\partial g}{\partial A_\mu} = \delta g,$$

wo g irgend eine Function der A_μ ist.

Die Covariante $\varphi(x)$ selbst wird in der folgenden Weise hergestellt: ich bilde die $(2\varrho-1)^{\text{te}}$ Polare von $f(x)$ unter Einführung der neuen, vollkommen unabhängigen Variablen v_1, v_2 und bezeichne dieselbe mit $\psi(x)$; dann ist

$$(17)\qquad \varphi(x)=\frac{\psi_{01}(x)\,f_{10}(x)-\psi_{10}(x)\,f_{01}(x)}{x-v}$$

die betreffende Covariante. Da der Zähler $\psi_{01}(x)\,f_{10}(x)-\psi_{10}(x)\,f_{01}(x)$ für $x=v$ verschwindet, so ist $\varphi(x)$ thatsächlich eine ganze Function; sie enthält in ihren Coefficienten noch die Variable v in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz.

Um jetzt die Differentialgleichungen für die Perioden der Normalintegrale erster Gattung abzuleiten, gehe ich von $\delta\,\frac{\pi(x)}{2y}$ aus. Da

$$\delta f(x)=\varphi(x)$$

ist, so folgt durch Ausführen der Differentiation und der Operation δ, indem ich die Relation zwischen einer homogenen Function und ihren beiden Ableitungen (vergl. (1)) berücksichtige, die Richtigkeit der Gleichung

$$\delta\,\frac{\pi(x)}{2y}-\frac{1}{2\varrho+2}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi(x)\,\psi(x)}{(x-v)\,2y}\right)$$
$$=\frac{-1}{2\varrho+2}\cdot\frac{K(x)}{2y}+\frac{\pi(v)}{2\varrho+2}\cdot\frac{f(x|v)}{2(x-v)^2\,y},$$

wo

$$(18)\qquad K(x)=\big[\pi(v)\,f(x|v)-\pi(x)\{v\,\psi_{10}(x)+\psi_{01}(x)\}$$
$$-(\varrho-1)\,(t-x)^{\varrho-2}\,\{t\psi_{10}(x)+\psi_{01}(x)\}\,(x-v)\big]:(x-v)^2$$

(da die eckige Klammer selbst wie ihre Ableitung nach x für $x=v$ verschwindet,) eine ganze Function von x vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, die t ebenfalls im $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade und ausserdem noch v enthält; man kann daher

$$(19)\qquad K(x)=\sum_{\alpha\beta}\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\,k_{\beta\alpha}(-x)^{\beta-1}\,t^{\varrho-\alpha}$$

setzen. Integrirt man jetzt nach einer Multiplication mit dx auf einem geschlossenen Integrationsweg, so erhält man, analog wie oben bei den Gleichungen (11)

$$\delta\sum_{\alpha}\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\,2\,\omega_\alpha\,t^{\varrho-\alpha}$$
$$=\frac{-1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta}\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\,k_{\beta\alpha}\,2\,\omega_\beta\,t^{\varrho-\alpha}-\frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta}\binom{\varrho-1}{\alpha-1}(-v)^{\alpha+\beta-2}\,\eta_\beta\,t^{\varrho-\alpha}$$

und, da t beliebig ist, also die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich sind, so folgt hieraus

$$(\mathrm{C})\qquad \delta\,\omega_\alpha=\frac{-1}{2\varrho+2}\sum_{\beta}k_{\beta\alpha}\,\omega_\beta-\frac{1}{4\varrho+4}\sum_{\beta}(-v)^{\alpha+\beta-2}\,\eta_\beta.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung für die Perioden der Normalintegrale erster Gattung. Die Grössen $k_{\alpha\beta}$ in denselben sind durch die Gleichungen (17), (18) *und* (19) *definirt.* Da $\varphi(x)$ wie die $k_{\alpha\beta}$ die ganz unabhängige Variable v in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, so sind *in jeder dieser Gleichungen im Grunde* $2\varrho-1$ *verschiedene Gleichungen zusammengefasst.*

Die Function $K(x)$ ist, wie aus ihrer Definition hervorgeht, für $\varrho=1$ und 2 identisch Null, und für $\varrho=3$ gleich

$$D^2\Delta^4 f(x),$$

wo D, bez. Δ die Polarenbildung unter Einführung der Variablen t_1, t_2, bez. v_1, v_2 bedeutet. Das erstere folgt übrigens ohne Rechnung schon aus dem Umstande, dass $K(x)$ zu Folge seines Ausdrucks (18) eine Covariante von $f(x)$ darstellt, welche in den A_λ linear ist, aber für $\varrho=1$ die Variablen x, t, v zusammen in der nullten, für $\varrho=2$ nur in der vierten Dimension enthält. —

Die entsprechenden Differentialgleichungen für die Perioden der Normalintegrale zweiter Gattung aufzustellen, ist mit etwas mehr Schwierigkeiten verknüpft. Zuerst folgt aus der Bedeutung von δ, dass, wenn man die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Polare von $\varphi(x)$ bei Einführung der Variablen s_1, s_2 mit

$$\varphi(x\,|\,s)$$

bezeichnet, und

$$-2\varphi(x|s)f(x)+\varphi(x)f(x|s)=\Phi(x)$$

setzt:

$$\delta\,\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y}=\frac{\Phi(x)}{(x-s)^2\,2y^3} \tag{20}$$

ist. Es handelt sich jetzt darum, die rechte Seite so zu zerlegen, dass bei der Integration unmittelbar die Normalintegrale auftreten. Dies gelingt mir aber nur durch einen Kunstgriff. Dazu ist es aber nothwendig, eine Anzahl neuer Bezeichnungen einzuführen, von denen die eine:

$$\frac{\psi_{01}(x)f_{10}(x|s)-\psi_{10}(x)f_{01}(x|s)}{x-v}=\bar{\varphi}(x|s) \tag{21}$$

eine dauernde ist, während die übrigen nur zur augenblicklichen Abkürzung dienen:

$$\frac{2\varrho+2}{(x-s)^2 f(x)}\left\{f(x|\xi)\,\bar{\varphi}(x|s)+f(x)\,\bar{\varphi}(s\,|\,\xi)-2f(x|\,\xi)\,\varphi(x|s)\right\}$$
$$+\,2\,\frac{f(v|s)f(v|\xi)-f(s|\xi)f(v)}{(x-v)^2\,(s-v)^2}=L(x|\xi),$$

$$-2f(x|\xi)\,\varphi(x|s)+f(x|s)\,\bar{\varphi}(x|\xi)=\Phi(x|\xi),$$

$$\frac{f(x|s)f(x|\xi)-f(\xi|s)f(x)}{x-v}\left(\frac{v\psi_{10}(x)+\psi_{01}(x)}{x-v}+2\,\frac{s\psi_{10}(x)+\psi_{01}(x)}{x-s}\right)=M(x|\xi).$$

Die Umformung der rechten Seite der Gleichung (20) geschieht nun dadurch, dass ich dieselbe mit $2f(x\,|\,\xi):y$, wo ξ eine unabhängige Variable ist, multiplicire, alsdann in Partialbrüche zerlege und die Glieder, welche im Nenner $x-a_\lambda$ und $x-s$ nur auf der ersten Potenz enthalten, wieder in einen Ausdruck zusammenziehe. Ich komme dadurch zu der folgenden Gleichung:

$$(22)\quad \frac{\Phi(x)\,f(x|\xi)}{(x-s)^2 f^2(x)}+\frac{f(s|\xi)\,\varphi(s)}{f(s)}\cdot\frac{1}{(x-s)^2}-\sum_{\lambda=1}^{2\varrho+2}\frac{f(a_\lambda|s)\,f(a_\lambda|\xi)\,\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}$$

$$\cdot\frac{1}{(x-a_\lambda)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{L(x|\xi)}{2\varrho+2}+\frac{1}{2(x-s)^2 f(x)}\left[\Phi(x|\xi)+\frac{f(x)}{f(s)}f(s|\xi)\,\varphi(s)-M(x|\xi)\right],$$

wo also die Richtigkeit dadurch nachgewiesen wird, dass man beide Seiten in Partialbrüche zerlegt, denn diese Zerlegung wird bei passender Umformung auf beiden Seiten die gleiche sein. Hierin lasse ich nun ξ in x übergehen: dann verschwindet $M(x|\xi)$, $\Phi(x|\xi)$ verwandelt sich in $\Phi(x)$ und $L(x|\xi)$ wird gleich

$$(23)\qquad L(x)=\frac{2\varrho+2}{(x-s)^2}\left\{\bar\varphi(x|s)+\bar\varphi(s|x)-2\varphi(x|s)\right\}$$
$$+2\,\frac{f(v|s)\,f(x|v)-f(x|s)\,f(v)}{(x-v)^2\,(s-v)^2},$$

so dass die Gleichung (22) die Form annimmt:

$$\frac{\Phi(x)}{(x-s)^2 f(x)}+\frac{\varphi(s)}{f(s)}\cdot\frac{f(x|s)}{(x-s)^2}-\sum_\lambda\frac{f(a_\lambda|s)\,\psi(a_\lambda)}{2(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{f(x|a_\lambda)}{(x-a_\lambda)^2}$$
$$=\frac{L(x)}{2\varrho+2}.$$

Und damit hat man die gesuchte Zerlegung von $\frac{\Phi(x)}{(x-s)^2(x)}$ gefunden. Dieselbe muss man jetzt in der Gleichung (20) einsetzen; man erhält:

$$\delta\,\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y}=\frac{1}{2\varrho+2}\cdot\frac{L(x)}{2y}-\frac{\varphi(s)}{2f(s)}\cdot\frac{f(x|s)}{(x-s)^2 y}$$
$$+\sum_\lambda\frac{f(a_\lambda|s)\,\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{f(x|a_\lambda)}{(x-a_\lambda)^2 y}.$$

Der Ausdruck von $L(x)$ ist, wie man sich leicht überzeugt, eine ganze Function der Variablen und zwar ist derselbe in x und s symmetrisch und vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade; man kann also

$$(24)\qquad L(x)=\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}(-x)^{\beta-1}(-s)^{\alpha-1}$$

setzen, wo

$$(25)\qquad l_{\alpha\beta}=l_{\beta\alpha}.$$

Demgemäss wird

$$\delta\,\frac{-f(x|s)}{(x-s)^2 y} = \frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}\,\frac{H(x)_\beta}{2y}\,(-s)^{\alpha-1} - \frac{\varphi(s)}{2f(s)}\cdot\frac{f(x|s)}{(x-s)^2 y}$$
$$+\sum_\lambda \frac{f(a_\lambda|s)\,\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}\cdot\frac{f(x|a_\lambda)}{(x-a_\lambda)^2 y}.$$

Diese Gleichung integrire ich nach einer Multiplication mit dx auf einem geschlossenen Integrationsweg und finde

$$\delta\sum_\alpha 2\eta_\alpha(-s)^{\alpha-1} = \frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}\,2\omega_\beta(-s)^{\alpha-1} + \sum_\beta\Bigg(\frac{\psi(s)}{2f(s)}(-s)^{\beta-1}$$
$$-\sum_\lambda\frac{f(a_\lambda|s)\,\psi(a_\lambda)}{4(\varrho+1)^2(a_\lambda-s)^2(a_\lambda-v)f_{10}(a_\lambda)}(-a_\lambda)^{\beta-1}\Bigg)\,2\eta_\beta.$$

Der Coefficient von $2\eta_\beta$ muss, da die übrigen Glieder ganze Functionen von s sind, und s eine ganz beliebige Variable ist, ebenfalls eine ganze Function von s und zwar vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade sein; man kann ihn daher gleich

$$\frac{1}{2\varrho+2}\sum_\alpha k'_{\alpha\beta}(-s)^{\alpha-1}$$

setzen, so dass die letzte Gleichung übergeht in

$$\delta\sum_\alpha 2\eta_\alpha(-s)^{\alpha-1} = \frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}\,2\omega_\beta(-s)^{\alpha-1} + \frac{1}{2\varrho+2}\sum_{\alpha\beta} k'_{\alpha\beta}\,2\eta_\beta(-s)^{\alpha-1},$$

und da s beliebig ist, folgt hieraus

$$\delta\eta_\alpha = \frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta l_{\alpha\beta}\,\omega_\beta + \frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta k'_{\alpha\beta}\,\eta_\beta.$$

Die Coefficienten $k'_{\alpha\beta}$ haben nun denselben Werth wie die Coefficienten $k_{\alpha\beta}$ in (C): es ist

$$k'_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}.$$

Den Beweis hiervon habe ich schon in dem in der Einleitung erwähnten Aufsatze im Journal für Mathematik, Bd. 99, Seite 244, geliefert. Derselbe muss nur in nebensächlichen Momenten einige Aenderungen erfahren: so wird dort an Stelle der Operation δ nach a_λ differentiirt, und es werden dort nur die Gleichungen zwischen den Normalintegralen betrachtet, durch deren Integration erst die Gleichungen (C) und (D) entstehen. Aber dies alles macht nur unbedeutende Veränderungen nothwendig; in der Hauptsache bleibt der Beweis bestehen. —

Demnach ist

$$\text{(D)}\qquad \delta\eta_\alpha = \frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta l_{\alpha\beta}\,\omega_\beta + \frac{1}{2\varrho+2}\sum_\beta k_{\alpha\beta}\,\eta_\beta,$$

wo die Grössen $k_{\alpha\beta}$ durch die Gleichungen (17), (18) *und* (19), *die Grössen $l_{\alpha\beta}$ durch die Gleichungen* (21), (23), (24) *und* (25) *definirt sind.*

Dies sind die Differentialgleichungen für die Perioden der Integrale zweiter Gattung, die ich hier aufstellen wollte. *In denselben sind wiederum $2\varrho - 1$ Gleichungen zusammengefasst*, da in den Coefficienten noch die willkürliche Variable v in der $(2\varrho - 2)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt. —

Um jetzt auch noch den Ausdruck von $\delta\omega$ zu bilden, habe ich wie oben bei der Bestimmung von $\varepsilon\omega$ zu verfahren. Ich erhalte unmittelbar

$$\delta\omega = \frac{-1}{2\varrho+2} k_{11} |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}| - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\gamma} (-v)^{\gamma-1} |\eta_{\gamma\beta}\ \omega_{2\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}|$$

$$- \frac{1}{2\varrho+2} k_{22} |\omega_{1\beta}, \omega_{2\beta}, \cdots, \omega_{\varrho\beta}| - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\gamma} (-v)^{\gamma}\ |\omega_{1\beta}\ \eta_{\gamma\beta}; \cdots, \omega_{\varrho\beta}|$$

$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

oder wenn ich die $\eta_{\gamma\beta}$ enthaltenden Determinanten eben nach den Gliedern der Colonne der $\eta_{\gamma\beta}$ entwickle, indem ich wie in § 1 die adjungirten Subdeterminanten von $\omega_{\alpha\beta}$ in ω mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ bezeichne:

$$\delta\omega = \frac{-\omega}{2\varrho+2} \sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha} - \frac{1}{4\varrho+4} \sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\beta} (\omega)_{\alpha\beta} (-v)^{\alpha+\gamma-2}.$$

Hierin ist aber $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha}$ gleich Null. Denn wie aus den Gleichungen (13), (14), (15) und (16) folgt, hat ω die Invarianteneigenschaft; wie ich später zeigen werde, ist dasselbe mit

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\beta} (\omega)_{\alpha\beta} (-v)^{\alpha+\gamma-2}$$

der Fall: demnach müsste auch $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha}$, falls diese Summe nicht verschwände, diese Eigenschaft besitzen; aber dies ist nicht möglich, weil $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha}$ die Coefficienten A_λ linear, und die einzig darin vorkommende Variable v nur in dem $(2\varrho - 2)^{\text{ten}}$ Grade enthält. Folglich muss $\sum_{\alpha} k_{\alpha\alpha} = 0$ und dementsprechend

$$(26) \qquad \delta\omega = \frac{-1}{4\varrho+4} \sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\beta} (\omega)_{\alpha\beta} (-v)^{\alpha+\gamma-2}$$

sein.

§ 4.

Die Differentialgleichungen der Thetafunctionen.

Aus den partiellen Differentialgleichungen für die Perioden der Normalintegrale habe ich jetzt die partiellen Differentialgleichungen für die Thetafunctionen selbst abzuleiten.

Wie ich schon in der Einleitung angeführt habe, will ich dazu gewisse Eigenschaften der Thetafunctionen benutzen und insbesondere die Eigenschaft derselben, in sich selbst multiplicirt mit einem Exponentialfactor zurückzukehren, wenn man die Argumente um ein System von Perioden vermehrt. Es ist dies, wenn man statt

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_p$$

einfach $\Theta(u_\alpha)_p$ schreibt, die Formel

$$\Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p = (-1)^N \Theta(u_\alpha)_p e^{\sum\limits_\beta 2\eta_\beta(u_\beta+\omega_\beta)}, \tag{27}$$

wo N eine ganze Zahl ist, die davon abhängt, welche Thetafunction und welche Periode man annimmt. Aus derselben folgt

$$\lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p = \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\beta 2\eta_\beta(u_\beta + \omega_\beta) + N\pi i, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta} + 2\eta_\beta, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p}{\partial u_\beta \, \partial u_\gamma} = \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \, \partial u_\gamma}. \tag{30}$$

Ferner erhält man, wenn $\varepsilon\,\Theta(u_\alpha)_p$ bedeuten soll, dass die Operation ε nur an den Coefficienten der Reihenentwicklung von $\Theta(u_\alpha)_p$ nach Potenzen der u_α ausgeführt werden soll:

$$\varepsilon \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p + \sum_\beta \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p}{\partial u_\beta} \cdot \varepsilon(2\omega_\beta)$$
$$= \varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\beta \{2(u_\beta + \omega_\beta)\,\varepsilon(\eta_\beta) + 2\eta_\beta\,\varepsilon(\omega_\beta)\},$$

welche Gleichung mit Hilfe von (29) in

$$\varepsilon \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p = \varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\beta 2(u_\beta + \omega_\beta)\,\varepsilon(\eta_\beta) - \sum_\beta 2\left(\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta} + \eta_\beta\right) \varepsilon(\omega_\beta) \tag{31}$$

übergeht. Analoge Gleichungen bestehen auch für $\zeta \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p$ und $\delta \lg \Theta(u_\alpha + 2\omega_\alpha)_p$. —

Um nun die zu dem Operationszeichen ε gehörige Differentialgleichung aufzustellen, bezeichne ich

$$(32)\qquad \varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\gamma (\gamma-1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = \chi(u_\alpha).$$

Indem man in dieser Gleichung $u_\alpha + 2\omega_\alpha$ an Stelle von u_α setzt und die Verwandlungsgleichungen (29) und (31) benutzt, findet man

$$\chi(u_\alpha + 2\omega_\alpha) = (u_\alpha),$$

d. h. $\chi(u_\alpha)$ bleibt ungeändert, wenn man die Argumente um ein System von Perioden vermehrt. Ich differentiire die Gleichung jetzt partiell nach u_β:

$$(33)\ \varepsilon \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta} + \sum_\gamma (\gamma-1) u_{\gamma-1} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \beta \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_{\beta+1}} = \frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}.$$

Nun ist $\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}$ eine rationale Function von Quotienten der Thetafunctionen; u_α ist eine Summe von Integralen erster Gattung; $\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta}$ ist eine Summe von Integralen zweiter Gattung plus einem rationalen Ausdruck von Quotienten der Thetafunctionen, und demnach sind auch die in $\varepsilon \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta}$ vorkommenden Glieder $\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta \partial A_\lambda}$ gleich Integralen erster und zweiter Gattung plus einer rationalen Function von Quotienten der Thetafunctionen. Daraus erkennt man, dass $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ eine rationale Function von Quotienten der Thetafunctionen plus einer Summe von Integralen erster und zweiter Gattung ist, welch letztere aber noch mit rationalen Functionen von Quotienten der Thetafunctionen multiplicirt sein können. Da aber $\chi(u_\alpha)$ bei Vermehrung der Argumente um Systeme von Perioden ungeändert bleibt und dies demnach auch bei $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ der Fall ist, so müssen sich in dem Ausdruck für $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ die Integrale erster und zweiter Gattung weggehoben haben, so dass derselbe nur aus einer rationalen Function von Quotienten der Thetafunctionen bestehen kann.

Denke ich mir nun beide Seiten der Gleichung (33) mit $\Theta^2(u_\alpha)_p$ multiplicirt, so bleibt alsdann die linke Seite für alle endlichen Werthe der Argumente endlich und dies muss demnach auch mit $\Theta^2(u_\alpha)_p \frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ der Fall sein. Hieraus folgt, wenn man den Umstand hinzunimmt, dass $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ bei Vermehrung der Argumente um ein System von Perioden ungeändert bleibt, dass diese Function nur eine Summe von Quadraten der Thetafunctionen sein kann:

$$(34) \qquad \frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta} = \sum_r c_r \frac{\Theta^2(u_\alpha)_r}{\Theta^2(u_\alpha)_p},$$

wo die c_r Constanten sind.

Ich will mich jetzt vorerst nur auf gerade Thetafunctionen beschränken. Ist aber $\Theta(u_\alpha)_p$ eine gerade Function der Argumente, so muss, wie aus (33) folgt, $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ eine ungerade Function dieser Argumente sein. Dies ist aber im Widerspruch mit der Darstellung (34) von $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$, wenn in derselben die c_r von Null verschieden sind. Folglich müssen die c_r und mithin auch $\frac{\partial \chi(u_\alpha)}{\partial u_\beta}$ gleich Null, und demgemäss $\chi(u_\alpha)$ selbst eine Constante, C, sein, so dass jetzt aus der Gleichung (32) sich ergiebt:

$$\varepsilon \lg \Theta(u_\alpha)_p + \sum_\gamma (\gamma - 1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_1,$$

oder, wenn man an Stelle des Operationszeichens ε den Differentialausdruck setzt:

$$(35) \quad \sum_\lambda (2\varrho + 3 - \lambda) A_\lambda \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} + \sum_\gamma (\gamma - 1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_1.$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für gerade Thetafunctionen. Dass sie auch für ungerade Thetafunctionen richtig ist, kann man durch eine ähnliche Betrachtung beweisen; aber man kann auch davon ausgehen, dass jede Thetafunction in jede andere übergeht, wenn man die Argumente um ein passendes System halber Perioden vermehrt:

$$(36) \qquad \Theta(u_\alpha + \omega_\alpha)_p = e^{\frac{\pi i}{4} M}\, \Theta(u_\alpha)_q\, e^{\sum_\beta \eta_\beta (u_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta)}$$

Setzt man nämlich in (35) $u_\alpha + \omega_\alpha$ an Stelle von u_α und benutzt diese Formel (36) zur Umformung, wie dies oben mit (27) geschehen ist, so wird die Gleichung (35) wieder ihre ursprüngliche Form annehmen, nur dass an Stelle von $\Theta(u_\alpha)_p$ jetzt $\Theta(u_\alpha)_q$ steht. Daraus folgt, dass diese Differentialgleichung für alle Thetafunctionen gilt, und dass dabei die Constante C_1 immer den gleichen Werth hat.

Dieselbe Betrachtungsweise zeigt dann auch die Richtigkeit der folgenden Differentialgleichungen:

$$\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda} + \sum_\gamma (\varrho-\gamma) u_{\gamma+1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_1',$$

$$\sum_\lambda \lambda A_\lambda \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda} - \sum_\gamma \gamma u_\gamma \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_2,$$

$$\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_{\lambda-1} \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} - \sum_\gamma (\varrho+1-\gamma) u_\gamma \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = C_2',$$

(die Summation bezüglich λ ist von 1 bis $2\varrho+2$ auszuführen,) und

$$\begin{aligned}
&(2\varrho+2)\,\delta \lg \Theta(u_\alpha)_p \\
&- \frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma} + \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta}\cdot\frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}\right)(-v)^{\beta+\gamma-2} \\
&- \sum_{\beta\gamma} k_{\beta\gamma}\, u_\beta \frac{\partial \lg \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} - \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} l_{\beta\gamma} u_\beta u_\gamma = C_3,
\end{aligned}$$

worin die Constanten C_1', C_2, C_2' und C_3 ebenfalls für alle Thetafunctionen dieselben Werthe haben.

Es handelt sich jetzt noch darum diese Werthe zu bestimmen. Hierzu benutze ich am besten die Entwicklung (10) der Fundamentalthetafunction. Dieselbe ist eine Fourier'sche Reihe im weitern Sinne; es muss also Glied für Glied einzeln den Differentialgleichungen genügen, insbesondere auch das Glied $e^{\eta(u)}$, welches dem Werthe Null der Summationsbuchstaben entspricht. Indem ich dies Glied in die Differentialgleichungen einsetze und die Argumente Null werden lasse, finde ich

$$C_1 = C_1' = C_2 = C_2' = 0,$$

$$C_3 = -\frac{1}{4\omega}\sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\beta\alpha}(\omega)_{\gamma\alpha}(-v)^{\beta+\gamma-2}.$$

Wenn man nun noch die Differentiation des Logarithmus in den Differentialgleichungen ausführt, so ist man zu dem gesuchten *System der partiellen Differentialgleichungen der Thetafunctionen* gelangt:

$$(\mathrm{E})\left\{\begin{aligned}
&\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda} + \sum_\gamma (\varrho-\gamma) u_{\gamma+1} \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = 0, \\
&\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_\lambda \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} + \sum_\gamma (\gamma-1) u_{\gamma-1} \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = 0, \\
&\sum_\lambda \lambda A_\lambda \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda} - \sum_\gamma \gamma u_\gamma \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = 0, \\
&\sum_\lambda (2\varrho+3-\lambda) A_{\lambda-1} \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}} - \sum_\gamma (\varrho+1-\gamma) u_\gamma \frac{\partial \Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma} = 0,
\end{aligned}\right.$$

(wo über λ von 1 bis $2\varrho+2$ summirt wird,) und

(F)
$$(2\varrho+2)\delta\,\Theta(u_\alpha)_p$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma}(-v)^{\beta+\gamma-2}+\sum_{\beta\gamma}k_{\beta\gamma}\,u_\beta\frac{\partial\Theta(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma}l_{\beta\gamma}\,u_\beta u_\gamma\,\Theta(u_\alpha)_p-\frac{1}{4\omega}\sum_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\beta\alpha}(\omega)_{\gamma\alpha}(-v)^{\beta+\gamma-2}\Theta(u_\alpha)_p\,.$$

In denselben kann $\Theta(u_\alpha)_p$ *jede der Thetafunctionen bedeuten. — In der letzten Gleichung sind wieder* $2\varrho-1$ *einzelne Gleichungen zusammengefasst,* da in derselben noch die willkürliche Variable v in der $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt. —

Am Ende des vorigen Paragraphen wurde bei der Bestimmung von $\delta\omega$ von der dort noch nicht bewiesenen Eigenschaft der Function

$$\sum_{\alpha\beta\gamma}\eta_{\gamma\alpha}(\omega)_{\beta\alpha}(-v)^{\beta+\gamma-2}=\mathsf{H}$$

eine Covariante zu sein, Gebrauch gemacht. Der Beweis hiervon soll hier nachgeholt werden. Wie schon einige Zeilen weiter oben angeführt ist, müssen die einzelnen Glieder der Entwicklung (10) der Fundamentalthetafunction, insbesondere $e^{\eta(u)}$, diesem System von Differentialgleichungen genügen. Aus den vier ersten Gleichungen folgt

$$\sum_{\lambda}\lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\,\eta(u)}{\partial A_\lambda}+\sum_{\gamma}(\varrho-\gamma)\,u_{\gamma+1}\frac{\partial\,\eta(u)}{\partial u_\gamma}=0,$$
u. s. w.

und diese Gleichungen gehen, wenn man $(-v_1)^{\gamma-1}v_2^{\varrho-\gamma}$ für u_γ und demgemäss $\frac{1}{2\omega}\mathsf{H}$ für $\eta(u)$ setzt, über in das System

$$\sum\lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial A_\lambda}-v_1\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial v_2}=0,$$
u. s. w.

welches eben ausdrückt, dass H eine Covariante ist. —

Das System der Differentialgleichungen (E) und (F) will ich noch dadurch umformen, dass ich an Stelle der Thetafunction selbst diese dividirt durch $\left[\omega:\left(\frac{\pi}{2}\right)^\varrho\right]^{\frac{1}{2}}$ unter der Bezeichnung

$$\mathrm{Th}(u_\alpha)_p=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\varrho}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}\,\Theta(u_\alpha)_p$$

einführe. Es wird dadurch erreicht, dass auch in der letzten der

Differentialgleichungen keine transcendenten Grössen vorkommen. Unter Berücksichtigung von (13), (14), (15), (16) und (26) findet man

$$(\mathrm{E}_1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda}+\sum_\gamma(\varrho-\gamma)u_{\gamma+1}\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=0,\\
&\sum_\lambda(2\varrho+3-\lambda)A_\lambda\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}}+\sum_\gamma(\gamma-1)u_{\gamma-1}\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=0,\\
&\sum_\lambda \lambda A_\lambda\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_\lambda}-\sum_\gamma\gamma u_\gamma\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}=\frac14\varrho(\varrho+1)\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p,\\
&\sum_\lambda(2\varrho+3-\lambda)A_{\lambda-1}\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial A_{\lambda-1}}-\sum_\gamma(\varrho+1-\gamma)u_\gamma\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}\\
&\qquad\qquad=\frac14\varrho(\varrho+1)\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p,
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_1)\quad(2\varrho+2)\,\delta\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p=\frac14\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma}(-v)^{\beta+\gamma-2}$$
$$+\sum_{\beta\gamma}k_{\beta\gamma}'u_\beta\frac{\partial\,\mathrm{Th}(u_\alpha)_p}{\partial u_\gamma}+\frac12\sum_{\beta\gamma}l_{\beta\gamma}u_\beta u_\gamma\mathrm{Th}(u_\alpha)_p,$$

welche ebenfalls für alle Thetafunctionen gelten.

§ 5.

Umformung der Ausdrücke, in denen nach den Parametern differentiirt wird.

Bekanntlich treten, wenn man die Argumente Null werden lässt, in den Thetafunctionen, falls sie nicht verschwinden, und sonst in den ersten oder höheren Ableitungen derselben, als Factoren die achten Wurzeln aus den Discriminanten der beiden ganzen Functionen $g(x)$ und $\bar g(x)$ auf, deren Product

$$(37)\qquad g(x)\,\bar g(x)=f(x)$$

ist. Dementsprechend kann es unter Umständen vortheilhaft sein, dass in den obigen Differentialgleichungen an Stelle der Differentiation nach den Coefficienten A_λ von $f(x)$ eine Differentiation nach den Coefficienten von $g(x)$ und $\bar g(x)$ tritt. Wie dies bei den Differentialausdrücken $\sum_\lambda \lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial}{\partial A_\lambda}$ u. s. w. geschieht, ist bekannt: wenn

$$(37)\qquad g(x)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a_i x^i,$$

$$\bar{g}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\bar{\alpha}_j x^j,$$

wo

$$m+n=2\varrho+2,$$

so ist

$$\sum_{\lambda}\lambda A_{\lambda-1}\frac{\partial}{\partial A_\lambda}=\sum_i i\,\alpha_{i-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+\sum_j j\,\bar{\alpha}_{j-1}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_j},$$

$$\sum_{\lambda}(2\varrho+3-\lambda)A_\lambda\frac{\partial}{\partial A_{\lambda-1}}=\sum_i(m+1-i)\alpha_i\frac{\partial}{\partial\alpha_{i-1}}$$
$$+\sum_j(n+1-j)\bar{\alpha}_j\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_{i-1}},$$

$$\sum_{\lambda}\lambda A_\lambda\frac{\partial}{\partial A_\lambda}=\sum_i i\,\alpha_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+\sum_j j\,\bar{\alpha}_j\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_j},$$

$$\sum_{\lambda}(2\varrho+3-\lambda)A_{\lambda-1}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda-1}}=\sum_i(m+1-i)\alpha_{i-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_{i-1}}$$
$$+\sum_j(n+1-j)\bar{\alpha}_{j-1}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_{j-1}},$$

wo über i, bez. j von 1 bis m, bez. n zu summiren ist.

Bei der Operation δ, behaupte ich, geschieht dies in folgender Weise: es ist

$$\delta=\sum_{i=0}^{m}\chi_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+\sum_{j=0}^{n}\bar{\chi}_j\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_j},$$

wo

$$\chi(x)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\chi_i x^i=\frac{\psi_{01}(x)g_{10}(x)-\psi_{10}(x)g_{01}(x)}{x-v},$$

$$\bar{\chi}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\bar{\chi}_j x^j=\frac{\psi_{01}(x)\bar{g}_{10}(x)-\psi_{10}(x)\bar{g}_{01}(x)}{x-v}.$$

Denn einerseits findet man aus (37), dass

$$\binom{2\varrho+2}{\mu}A_\mu=\sum_h\binom{m}{h}\binom{n}{\mu-h}\alpha_h\bar{\alpha}_{\mu-h},$$

und hieraus folgt

$$(38)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i}=\displaystyle\sum_{\mu=i}^{n}\frac{\binom{m}{i}\binom{n}{\mu-i}}{\binom{2\varrho+2}{\mu}}\bar{\alpha}_{\mu-i}\frac{\partial}{\partial A_\mu},\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_j}=\displaystyle\sum_{\mu=j}^{m}\frac{\binom{n}{j}\binom{m}{\mu-j}}{\binom{2\varrho+2}{\mu}}\alpha_{\mu-j}\frac{\partial}{\partial A_\mu};\end{cases}$$

anderseits ergiebt sich aus dem Ausdrucke (17) von φ, wenn man in denselben $g(x)\,\bar{g}(x)$ für $f(x)$ setzt:

$$\varphi(x) = \bar{g}(x)\,\chi(x) + g(x)\,\bar{\chi}(x),$$

dass

$$(39)\qquad \binom{2\varrho+2}{\mu}\varphi_\mu = \sum_h \binom{m}{h}\binom{n}{\mu-h}\bar{\alpha}_h\,\chi_{\mu-h} + \sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{\mu-k}\alpha_k\,\bar{\chi}_{\mu-k}.$$

Und mit Hilfe dieser drei Gleichungen (38) und (39) verwandelt sich, wie man sich leicht überzeugt, der Ausdruck $\sum_i \chi_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_j \bar{\chi}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j}$ in $\sum_\mu \varphi_\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu}$, d. i. in δ, wie behauptet.

Halle a. S., im September 1887.