

**8. Über den Einfluß der Reibung
auf die Schwingungen einer mit Flüssigkeit
gefüllten Kugel;
von Rudolf Ladenburg.**

(Hierzu Taf. V.)

Einleitung.

Die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit innerhalb eines von festen Körpern umschlossenen Raumes wird bedingt durch die *innere* Reibung, die die Flüssigkeitsteile aufeinander ausüben, und durch die *äußere* Reibung, die zwischen der Flüssigkeit und den sie begrenzenden festen Körpern wirkt. Während jene für jede Flüssigkeit eine spezifische Größe ist, ergibt sich für diese nach fast allen bisherigen Beobachtungen ¹⁾ derselbe Wert *unendlich* für jede inkompressible Flüssigkeit und bei jedem beliebigen festen Körper, mit dem die Flüssigkeit in Berührung sein mag; mit anderen Worten, die einem festen Körper anliegende Flüssigkeitsschicht hat bei allen nicht turbulenten Bewegungen dieselbe Geschwindigkeit wie dieser. Nur in dem von Helmholtz-Piotrowski ²⁾ be-

1) Vgl. E. Warburg, Pogg. Ann. **140**. p. 367. 1870 (Strömung von Quecksilber durch Glaskapillaren); M. Couette, Ann. de chim et phys. (6) **21**. p. 433. 1890 (Rotation verschiedener Flüssigkeiten zwischen Zylindern, N. Petrow (Bull. d. K. Akad. d. Wiss. zu Petersburg **5**. p. 368. 1896) folgert freilich aus Couettes Versuchen z. B. für Rapsöl einen endlichen Koeffizienten der äußeren Reibung); W. König, Wied. Ann. **32**. p. 193. 1887 (Schwingungen einer Kugel in verschiedenen Flüssigkeiten); K. Mützel, Wied. Ann. **43**. p. 15. 1891 (Schwingungen eines mit Wasser gefüllten Zylinders); E. T. Allen, Phil. Mag. (5) **50**. p. 323. 1900 (Aufsteigen von Luftblasen in Wasser); R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **22**. p. 287. 1907 (Fallen von Kugeln in zähen Flüssigkeiten).

2) H. v. Helmholtz u. G. Piotrowski, Wiener Ber. **50**. (2) p. 607. 1860, abgedruckt in H. v. Helmholtz' Wissensch. Abh. **1**. p. 172; vgl. auch A. Umani (Il Nuovo Cimento (4) **3**. p. 137. 1896), der aus Versuchen mit Quecksilber in schwingenden Hohlgefäßen den Schluß zieht, daß die äußere Reibung des Quecksilbers an vernickelten, also nicht benetzten Oberflächen endlich ist.

handelten Fall der drehenden Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Metallkugel in Luft ergab sich für die äußere Reibung ein endlicher Wert. Auf Veranlassung von Helmholtz beobachtete nämlich Piotrowski Schwingungsdauer und Dekrement eines mit Wasser gefüllten Glasgefäßes, das an zwei Drähten aufgehängt drehende Schwingungen um eine vertikale Achse ausführte, und zwar einmal wenn die Glasoberfläche unverändert und dann, wenn sie innen versilbert war: da sich im letzteren Falle ein um mehrere Prozente kleineres Dekrement ergab, schloß Helmholtz, daß bei derartigen Bewegungen Wasser an Metalloberflächen nicht haftet. Helmholtz führte dann die Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit innerhalb einer schwingenden Hohlkugel vollständig durch für den Fall eines von Null verschiedenen Gleitungskoeffizienten¹⁾ und ließ von Piotrowski sehr sorgfältige Messungen an einer Metallhohlkugel ausführen. Die Experimente bestätigten insofern die Hypothese des Gleitens, als sie für den Gleitungskoeffizienten Wasser—Gold den Wert 0,235 cm ergaben; der zugleich abgeleitete Koeffizient der inneren Reibung des Wassers stimmte freilich nur bis auf etwa 40 Proz. mit dem von Poiseuille aus Strömungsversuchen gefundenen überein.²⁾ Auf diesen Widerspruch zwischen den Resultaten von Helmholtz-Piotrowski und denen anderer Beobachter machte Wetham³⁾ im Jahre 1890 aufmerksam; indem er berechnete, daß ein Gleitungskoeffizient von der Größe, wie ihn Helmholtz-Piotrowski finden, einen sehr merklichen Einfluß auf das Strömen von Wasser durch Metallkapillaren ausüben müßte, führte er Transpirationmessungen in Glaskapillaren aus, die innen versilbert, und in solchen, die unversilbert waren, konnte jedoch keinen Unterschied konstatieren, der die Versuchsfehler von wenigen Promille überschritt. Wetham studierte dann auch drehende Schwingungen von versilberten und unversilberten Glashohlkörpern, die mit Wasser gefüllt waren, konnte aber auch hier die Helmholtz-Piotrowskischen Resultate

1) Dieser wird definiert als Verhältnis des Koeffizienten der inneren zu dem der äußeren Reibung.

2) Vgl. hierzu p. 183 u. 184 der vorliegenden Arbeit.

3) W. C. D. Wetham, Phil. Trans. A. 181. p. 559. 1890.

nicht bestätigen. Mit der Theorie und den Experimenten der mit Wasser gefüllten *Hohlkugel* hat er sich nicht näher beschäftigt.

Zur Entscheidung der vorliegenden Frage¹⁾ habe ich zunächst die Versuche in versilberten und unversilberten Glasgefäßen unter möglichst genau denselben Bedingungen wie Piotrowski wiederholt.

I. Versuche in innen versilberten und unversilberten Glasgefäßen.

In einem gegen Temperaturschwankungen gut geschützten Kellerraum des Instituts hing ich innerhalb eines Glaskastens an zwei Messingdrähten ein Fläschchen von etwa 200 ccm Inhalt, wie es zum Aufbewahren chemischer Reagenzien benutzt wird (vgl. Helmholtz' *Wissensch. Abh.* 1. p. 173), mitsamt einer horizontalen Stange auf. Diese Stange trug einen kleinen Spiegel und zwei Gewichte, die dem System eine Schwingungsdauer (Hin- und Rückgang) von etwa 24" verliehen — alles möglichst genau wie bei Piotrowski. Das Ganze wurde mit Hilfe einer einfachen elektromagnetischen Einrichtung, die ohne merkbare Nachwirkungen wirkte (vgl. p. 173), in reine drehende Schwingungen versetzt; die Umkehrpunkte mit Fernrohr und Skala beobachtet, die Schwingungsdauern durch Messung der Momente des Durchganges durch die Ruhelage mit Stoppuhr oder Metronom bestimmt. Daß die auf diese Weise gefundene Dämpfung wesentlich durch das im Fläschchen enthaltene Wasser hervorgerufen wurde, zeigten Messungen mit leeren Fläschchen, in denen die Dämpfung nur noch etwa den zehnten Teil so groß war.

Bei jedem Versuch wurden etwa 30 Umkehrpunkte bzw. Durchgänge durch die Ruhelage beobachtet und eine größere Zahl von Versuchen bei möglichst derselben Temperatur ausgeführt. Dann wurde das Fläschchen entleert, nach der Liebigschen oder anderen Methoden (vgl. F. Kohlrausch, *Lehrb. d. prakt. Phys.*, 10. Aufl. p. 37) innen versilbert, wieder

1) Vgl. auch W. Wien, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, p. 302; ferner Winkelmanns *Handbuch der Physik* (2. Aufl.) 1. p. 1378 und Lamb, *Hydrodynamics* (3. Ed.) p. 545.

mit Wasser gefüllt¹⁾ und die Schwingungsbeobachtungen bei möglichst der gleichen Temperatur wie zuvor ausgeführt.

Die mit einem derartigen Gefäß gewonnenen Zahlenwerte sind in Tab. I enthalten.

Tabelle I.

Gefäß B.

Temperatur	Logarithmisches Dekrement	Schwingungsdauer	Bemerkungen
19,02° C.	0,024991	(11,69)''	Gefäß versilbert, mit Wasser von 18,9° gefüllt
19,05		11,701	
18,81	0,025060	(11,69)	
18,81	0,025072	(11,69)	
18,92	0,025010	(11,70)	
18,76	0,025078	(11,68)	
18,78		11,698	
18,40		11,692	
19,20° C.	0,024950	(11,65)''	Gefäß neu mit Wasser von 19,0° gefüllt
19,19	0,024957	(11,65)	
19,20		11,660	
19,20		11,679	
19,20	0,024945	(11,65)	
19,20	0,024946	(11,65)	
19,20		11,679	
18,76		11,671	
18,80		11,674	
18,78	0,025067	(11,65)	
18,80° C.	0,002690	13,963''	Gefäß ohne Wasser
18,80	0,002683	13,965	
18,84° C.	0,025055	(11,77)''	Gefäß unversilbert, mit Wasser von 19,0° gefüllt
18,98		11,754	
19,00	0,025007	(11,75)	
19,02	0,024968	(11,72)	
19,04		11,762	
19,04		11,749	
19,02	0,024979	(11,73)	

1) Die Differenz der enthaltenen Wassergewichte bei versilbertem und unversilbertem Fläschchen betrug weniger als ein Zentigramm bei etwa 200 g Wasser.

Tabelle I (Fortsetzung).

Temperatur	Logarithmisches Dekrement	Schwingungsdauer	Bemerkungen
19,14° C.	0,025017	(11,68)''	Gefäß neu mit Wasser von 19,0° gefüllt
19,16	0,025037	(11,65)	
19,19		11,672	
19,19	0,025027	(11,66)	
19,16		11,680	
19,16	0,025023	(11,66)	
19,16		11,680	
19,12		11,679	

Die erste Vertikalreihe gibt die Temperatur nach einem in zwanzigstel Grad geteilten Thermometer, die zweite das logarithmische Dekrement (für die halben Schwingungsdauern in Briggischen Logarithmen ausgedrückt), die dritte die halben Schwingungsdauern. Wurde in einem Versuche aus den Umkehrpunkten das Dekrement bestimmt, so konnte gleichzeitig die Schwingungsdauer nur aus der für alle Schwingungen verbrauchten Zeit berechnet werden; sie ist deshalb nicht so genau wie der bei anderen Versuchen aus den jedesmaligen Durchgangsmomenten berechnete Wert und darum in der Tabelle eingeklammert. Auf gleiche Temperatur reduziert (1° Temperaturerhöhung bewirkte eine Abnahme des Dekrements um 0,75 Proz., die Schwingungsdauern blieben bei kleinen Temperaturänderungen unverändert) betrugen die Abweichungen der Dekremente und der Schwingungsdauern vom Mittel 1—2 Promille. Wurde das Gefäß neu gefüllt und wieder aufgehängt, so war die Schwingungsdauer bisweilen um einige Promille verändert.

Die Mittelwerte der im versilberten und unversilberten Gefäß erhaltenen Zahlen sind in Tab. II zusammengestellt, die gleichzeitig die Resultate zweier weiteren Versuchsreihen mit anderen Gefäßen, die auch nach anderen Methoden versilbert waren, enthält.

Tabelle II.

Gefäß A.

Temperatur	Logarithmisches Dekrement	Schwingungsdauer	Bemerkungen
19,00°	0,019570 ± 2	11,973'' ± 2	Unversilbert
19,00	0,019642 ± 3	12,049 ± 2	Versilbert
19,00	0,019620 ± 3	11,990 ± 1	Unversilbert

Gefäß B.

19,00°	0,025026 ± 25	11,716'' ± 4	Unversilbert
19,00	0,025011 ± 15	11,688 ± 2	Versilbert

Gefäß C.

19,00°	0,025163 ± 3	11,893'' ± 12	Unversilbert
19,00	0,025162 ± 2	11,870 ± 2	Versilbert

Wie mir scheint, zeigen diese Versuche zweifellos, daß innerhalb der erreichten Genauigkeit eine Versilberung der inneren Gefäßwand keinen Einfluß auf das Dekrement oder die Schwingungsdauer ausübt: wenn also die äußere Reibung des Wassers an *reinem* Glase unendlich groß ist, muß sie es auch an *versilbertem* Glase sein.

Man ist also gezwungen anzunehmen, daß bei den Versuchen Piotrowskis äußere Einflüsse eine Wirkung der Versilberung vorgetäuscht haben — wie Piotrowski ja auch selbst diese Möglichkeit nicht vollkommen ausschließt (l. c. p. 179), während allerdings Helmholtz auf diese Ergebnisse als ganz überzeugend ausdrücklich hinweist (l. c. p. 174).

II. Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit in einer schwingenden Hohlkugel bei unendlich großer äußerer Reibung.

Ich ging dann dazu über, auch die Erscheinungen innerhalb einer *Hohlkugel*, die theoretisch vollständig behandelt werden können, zu studieren. Und zwar habe ich zunächst die

Theorie für den Fall durchgeführt, daß die Flüssigkeit an der Kugeloberfläche nicht gleitet, sondern fest haftet: dieser Fall ist weder von Helmholtz noch, soweit mir bekannt geworden ist, von anderer Seite bisher untersucht worden. Auch die Resultate der Arbeit von Zemplén¹⁾ konnte ich nicht benutzen, der aus den Schwingungen einer Kugel innerhalb einer sie umschließenden Hohlkugel die innere Reibung des zwischen ihnen befindlichen Gases bestimmte. Zemplén setzt zwar unendlich große äußere Reibung voraus; aber abgesehen davon, daß seine Grenzbedingungen infolge der zwei begrenzenden Kugeloberflächen wesentlich von den in unserem Fall vorhandenen abweichen, ist in der Lösung der ursprünglichen Differentialgleichungen ein Fehler untergelaufen, den Hr. Zemplén, wie er mir brieflich mitteilte, demnächst selbst zu berichtigen beabsichtigt.

Die Integration der Differentialgleichungen und manche Detailrechnungen des vorliegenden Problems sind in der Untersuchung von Helmholtz bereits enthalten. Ich werde mich deshalb, soweit angängig, mit der Wiedergabe der Helmholtzschen Resultate²⁾ begnügen und mich überhaupt möglichst eng an seine Berechnungen anschließen, bis die Einführung der neuen Randbedingung das Verlassen des Helmholtzschen Weges notwendig macht.

Wir gehen aus von den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, die der Reibung unterworfen ist:

$$(1) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ Y - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ Z - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

hierin bedeuten x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Innern der bewegten Flüssigkeit; u, v, w seine

1) Gyöző Zemplén, Ann. d. Phys. 19. p. 783. 1906.

2) l. c. p. 196—214.

Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit t ; X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kraft, p den Druck, h die Dichte und $k^2 h$ den Koeffizienten der inneren Reibung der Flüssigkeit, (letzterer wird auch häufig durch *einen* Buchstaben, η , bezeichnet). Wirkt als äußere Kraft nur die Schwerkraft in Richtung der negativen z -Achse und vernachlässigt man die Produkte $u(\partial u / \partial x) \dots w(\partial w / \partial z)$, die sogenannten quadratischen Glieder, so vereinfachen sich die Gleichungen (1) in die folgenden

$$(1a) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} - k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ -g - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} - k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{array} \right.$$

Das vorliegende Problem können wir nun so formulieren, daß wir verlangen, diejenigen Lösungen der Gleichungen (1a) und (2) zu finden, die den zwei Randbedingungen genügen, daß

$$1. \quad \text{für } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r = 0$$

die Bewegung nicht diskontinuierlich wird und daß im Gegensatz zu Helmholtz

$$2. \quad \text{für } r = \text{const.} = R$$

die Winkelgeschwindigkeit einen vorgeschriebenen Wert ψ besitzt.¹⁾

Offenbar (vgl. Helmholtz l. c.) sind nun

$$(3) \quad u = -y\psi, \quad v = x\psi, \quad w = 0$$

partikuläre Integrale der Gleichungen (1a) und (2), die die Flüssigkeitsbewegung als Rotation konzentrischer Kugelschalen mit der Winkelgeschwindigkeit ψ darstellen. Unter Zugrundelegung der Randbedingung (1) lassen sich, wie Helmholtz l. c. zeigt, die Gleichungen (3) befriedigen durch den Ausdruck

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{A\sqrt{m}}{k r^2} [e^{\gamma r - \beta t} \cos(\sigma r + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\gamma r - \beta t} \cos(\sigma r - \gamma t - \varepsilon)] \\ - \frac{A}{r^3} [e^{\gamma r - \beta t} \cos(\sigma r + \gamma t) - e^{-\gamma r - \beta t} \cos(\sigma r - \gamma t)], \end{array} \right.$$

1) Wir betrachten die Bewegung erst von dem Moment an, in dem die durch die erste Ablenkung aus der Ruhelage hervorgerufenen Störungen durch den Einfluß der Reibung verschwunden sind, und deshalb werden keine Anfangsbedingungen für die Zeit $t = 0$ festgelegt.

in welchem A eine willkürliche Konstante ist und die übrigen neu eingeführten Zeichen in folgender Weise von den zwei anderen Integrationskonstanten β und γ abhängen:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \cos 2\varepsilon = -\frac{\beta}{m}, \quad \sin 2\varepsilon = \frac{\gamma}{m}, \\ \sigma = \frac{\sqrt{m}}{k} \cos \varepsilon, \quad \tau = \frac{\sqrt{m}}{k} \sin \varepsilon. \end{array} \right.$$

Mit dieser Flüssigkeitsbewegung haben wir nun mittels der Randbedingung (2) die Bewegung einer festen Hohlkugel vom Radius R zu verknüpfen, die drehende Schwingungen um die Z -Achse ausführen soll, gedämpft durch die Flüssigkeit im Innern und durch die Luft im Außenraume. Das Dekrement A und die Schwingungsdauer T dieser Schwingungen sollen der Beobachtung zugänglich sein; bedeutet Ω den Ablenkungswinkel aus der Ruhelage zur Zeit t , Ω_0 und Ω_1 zwei aufeinanderfolgende Maxima der Ablenkung nach derselben Seite, so sind β und γ als Funktionen von A und T durch die Gleichungen gegeben

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \log \operatorname{nat} \Omega_0 - \log \operatorname{nat} \Omega_1 = \beta T, \quad \gamma = \frac{2\pi}{T}, \\ \text{so daß} \\ m = \frac{\sqrt{A^2 + 4\pi^2}}{T} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{2\pi}{A} \end{array} \right.$$

wird.

Für die Bewegung der Hohlkugel können wir dann die Gleichung aufstellen

$$(7) \quad M \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + f^2 \Omega = P_F + P_L,$$

indem wir unter M das Trägheitsmoment, unter f^2 die durch die Aufhängung der Kugel bedingten richtenden Kräfte und unter P_F und P_L die Momente der Widerstandskräfte verstehen wollen, die von der eingeschlossenen Flüssigkeit und von der äußeren Luft herrühren. Die Werte von Ω und von $d^2 \Omega / dt^2$ erhalten wir aus der zweiten Randbedingung

$$(8) \quad (\psi)_{r=R} = \psi = \frac{d \Omega}{dt}$$

mit Benutzung des durch Gleichung (4) gegebenen Wertes von ψ . Vernachlässigen wir nämlich in dieser Gleichung die mit $e^{-\tau \tau}$ multiplizierten Glieder, da diese an der Kugelober-

fläche als klein gegen die anderen Glieder angesehen werden können (vgl. Helmholtz l. c. p. 214 und p. 172 dieser Arbeit), so ergibt sich durch Integration aus der Gleichung

$$(9a) \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) - \frac{A}{R^3} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t)$$

mit Benutzung der Gleichung (5) die folgende

$$(9b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} \frac{1}{m} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon) \\ &\quad - \frac{A}{R^3} \frac{1}{m} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t - 2\varepsilon), \end{aligned} \right.$$

und es wird

$$(9c) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dt^2} &= \frac{A\sqrt{m}m}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon) \\ &\quad - \frac{Am}{R^3} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Die Größe P_F der Gleichung (7) läßt sich berechnen als Drehmoment der Reibungskraft der Flüssigkeit an der Kugel aus bekannten theoretischen Betrachtungen über die Kraftkomponenten, die eine bewegte Flüssigkeit auf eine oberflächliche Schicht ausübt, wie dies außer bei Helmholtz¹⁾ l. c. z. B. bei W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik p. 264 zu finden ist. Es ergibt sich

$$(9d) \quad P_F = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R},$$

wobei $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R}$ nach Gleichung (4), wieder durch Vernachlässigung der mit $e^{-\tau R}$ multiplizierten Glieder, den Wert hat:

$$(9e) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} &= \frac{Am}{k^2 R^3} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \\ &\quad - \frac{3A\sqrt{m}}{kR^3} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) + \frac{3A}{R^4} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t). \end{aligned} \right.$$

Was den Widerstand P_L der Luft betrifft, so kommt hier, wie Helmholtz ausführlich auseinandersetzt, nur der von der Reibung der Luft herrührende Teil in Betracht, und nicht auch die durch die Mitbewegung von Luft hervorgerufene Vergrößerung des Trägheitsmomentes. Da es sich außerdem

1) Bei Helmholtz (l. c. p. 207) befindet sich in der Gleichung (7c) ein Druckfehler: das Integral ist offenbar von 0 bis π und nicht von 0 bis $\pi/2$ zu erstrecken, und nur dann ergibt sich obiger Wert von P_F .

nur um langsame Schwingungen handelt und da überdies dieses Glied nur eine Korrektur im Vergleich zu der viel größeren Wasserreibung bedeutet, so können wir P_L unbedenklich der Winkelgeschwindigkeit der Kugel proportional setzen:

$$(9f) \quad P_L = -K \cdot \frac{d\Omega}{dt},$$

wobei der Faktor K vorläufig noch unbestimmt bleibt (seine Berechnung vgl. p. 168). Durch Einsetzen der Werte von Ω , $d\Omega/dt$, $d^2\Omega/dt^2$, P_F und P_L aus den Gleichungen (9) in die Bewegungsgleichung (7) der Kugel erhalten wir die gesuchte Koppelung der Bewegung der Flüssigkeit mit derjenigen der Kugel, nämlich die Gleichung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & M e^{\tau R - \beta t} \left[\frac{A \sqrt{m}}{k R^2} \cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon) - \frac{A m}{R^3} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \right] \\ & + f^2 e^{\tau R - \beta t} \left[\frac{A \sqrt{m}}{k R^2 m} \cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon) - \frac{A}{R^3 m} \cos(\sigma R + \gamma t - 2\varepsilon) \right] \\ & = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 e^{\tau R - \beta t} \left[\frac{A m}{k^3 R^2} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \right. \\ & \quad \left. - \frac{3 A \sqrt{m}}{k R^3} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) + \frac{3 A}{R^4} \cos(\sigma R + \gamma t) \right] \\ & - K e^{\tau R - \beta t} \left[\frac{A \sqrt{m}}{k R^2} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) - \frac{A}{R^3} \cos(\sigma R + \gamma t) \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung (10) muß für alle Werte von t Gültigkeit haben, falls die Bewegung der Flüssigkeit und die der Kugel in jedem Moment den Grenzbedingungen genügt. Darum wird die zu beobachtende Schwingung¹⁾ dargestellt durch die zwei Gleichungen, die wir aus (10) erhalten, indem wir die einzelnen Glieder in solche zerlegen, die mit $\cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon)$, und solche, die mit dem Sinus desselben Winkels multipliziert sind, und die Summe der betreffenden Faktoren in beiden Fällen einander gleich setzen:

$$(11a) \quad \left\{ \begin{aligned} & M m \left(\frac{\sqrt{m}}{k} \cos 4\varepsilon - \frac{1}{R} \cos 3\varepsilon \right) + f^2 \left(\frac{\sqrt{m}}{k m} - \frac{1}{R m} \cos \varepsilon \right) \\ & = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left(\frac{m}{k^2} \cos 3\varepsilon - \frac{3 \sqrt{m}}{k R} \cos 2\varepsilon + \frac{3}{R^2} \cos \varepsilon \right) \\ & \quad - K \left(\frac{\sqrt{m}}{k} \cos 2\varepsilon - \frac{1}{R} \cos \varepsilon \right) \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. p. 164 Anm. 1.

und

$$(11b) \quad \left\{ \begin{aligned} & Mm \left(\frac{\sqrt{m}}{k} \sin 4\varepsilon - \frac{1}{R} \sin 3\varepsilon \right) + f^2 \frac{1}{Rm} \sin \varepsilon \\ &= -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left(\frac{m}{k^2} \sin 3\varepsilon - \frac{3\sqrt{m}}{kR} \sin 2\varepsilon + \frac{3}{R} \sin \varepsilon \right) \\ &\quad - K \left(\frac{\sqrt{m}}{k} \sin 2\varepsilon - \frac{1}{R} \sin \varepsilon \right). \end{aligned} \right.$$

Die hierin enthaltene GröÙe K können wir bestimmen, indem wir, ähnlich wie Helmholtz, die Gleichungen (11) auf den Fall anwenden, daß die Kugel mit Luft statt mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt ist. Die Luft ist zwar eine kompressible Flüssigkeit, für die die Gleichung (2) (p. 163) im allgemeinen nicht gültig ist; wie aber Helmholtz ausführlich zeigt, können wir unbedenklich so verfahren, zumal das Glied, das sich auf die Reibung der Luft im Innern der Kugel bezieht, nur eine untergeordnete Rolle spielt. Eine besondere Überlegung (vgl. Helmholtz l. c. p. 210) zeigt ferner, daß „es genügt, das größte Glied des Einflusses allein zu berücksichtigen, indem wir $1/\sigma R$, das für bewegliche Flüssigkeiten eine kleine GröÙe ist, auch für die Luftreibung als eine solche annehmen“. Dann vereinfachen sich die Werte von ψ und $\partial\psi/\partial r$ an der Kugeloberfläche wesentlich. Es wird nämlich

$$(\psi)_{r=R} = \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon)$$

und

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{Am}{k^2 R^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon).$$

Zur Unterscheidung von den Versuchen mit der inkompressiblen Flüssigkeit sollen die GröÙen, die für die Versuche der mit Luft gefüllten Kugel einen anderen Wert haben, im folgenden mit dem Index 0 versehen werden. Dann führen dieselben Überlegungen, die uns zur Aufstellung der Gleichungen (11) geführt haben, zu den Gleichungen

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} & Mm_0 \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \cos 4\varepsilon_0 + f_0^2 \frac{\sqrt{m_0}}{k_0 m_0} = -\frac{8}{3} \pi h_0 k_0^2 R^4 \frac{m_0}{k_0^2} \cos 3\varepsilon_0 \\ &\quad - K \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \cos 2\varepsilon_0 \end{aligned} \right.$$

und

$$M m_0 \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \sin 4 \varepsilon = - \frac{8}{3} \pi h_0 k_0^2 R^4 \frac{m_0}{k_0^2} \sin 3 \varepsilon_0 - K \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \sin 2 \varepsilon_0,$$

aus denen sich

$$(12) \quad K = - \frac{f_0^2}{m_0} \frac{\sin 4 \varepsilon_0}{\sin 2 \varepsilon_0} - \frac{8}{3} \pi h_0 k_0 \sqrt{m_0} R^4 \frac{\sin \varepsilon_0}{\sin 2 \varepsilon_0}$$

ergibt.

Somit bleiben in den Gleichungen (11) noch M , f^2 und k unbekannt. Da f^2 aus den Daten der Aufhängung bestimmbar und außerdem, wie weiter unten ausführlich gezeigt werden wird, experimentell durch Schwingungsversuche mit der leeren Kugel sehr genau gefunden werden kann, wollen wir M und k als Unbekannte betrachten. Da uns nur die letztere Größe interessiert, eliminieren wir M aus den Gleichungen (11) und erhalten für k die Gleichung:

$$\begin{aligned} & f^2 \left[\frac{\sin 4 \varepsilon}{k^2} - \frac{\sqrt{m}}{k m R} (\sin 3 \varepsilon + \sin 5 \varepsilon) + \frac{\sin 4 \varepsilon}{m R^2} \right] \\ &= - \frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left[\frac{m \sqrt{m}}{k^3} \sin \varepsilon - \frac{3 m \sin 2 \varepsilon}{k^2 R} + \frac{3 \sqrt{m}}{k R^2} (\sin \varepsilon + \sin 3 \varepsilon) \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{R^3} \sin 2 \varepsilon \right] \\ & - K \left[\frac{m}{k^2} \sin 2 \varepsilon - \frac{\sqrt{m}}{k R} (\sin \varepsilon + \sin 3 \varepsilon) + \frac{1}{R^2} \sin 2 \varepsilon \right] \end{aligned}$$

oder

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & 8 \pi h k^4 R \sin 2 \varepsilon - 16 \pi h k^3 R^2 \sqrt{m} \sin 2 \varepsilon \cos \varepsilon \\ & + k^2 \left(8 \pi h R^3 m \sin 2 \varepsilon - \frac{f^2 \sin 4 \varepsilon}{m R^2} - K \frac{\sin 2 \varepsilon}{R^2} \right) \\ & - k \left(\frac{8}{3} \pi h R^4 m \sqrt{m} \sin \varepsilon - 2 \frac{f^2 \sqrt{m}}{m R} \sin 4 \varepsilon \cos \varepsilon \right. \\ & \quad \left. - 2 K \frac{\sqrt{m}}{R} \sin 2 \varepsilon \cos \varepsilon \right) \\ & - f^2 \sin 4 \varepsilon - K m \sin 2 \varepsilon = 0. \end{aligned} \right.$$

Berechnet man die Koeffizienten dieser Gleichung mit Hilfe der im 3. Abschnitt dieser Arbeit enthaltenen Versuchsergebnisse, so ersieht man durch Anwendung des Sturmschen Satzes, daß nur zwei der vier Wurzeln reell und zwar positiv reell sind. Bezieht sich k auf Wasser von 20° , so zeigt sich ferner, daß die eine Wurzel in unmittelbarer Nähe von 0,1 und die andere zwischen 0,2 und 0,3 liegt. Da nun der Reibungskoeffizient des Wassers dieser Temperatur, wie er z. B. von

Poiseuille bestimmt wurde, ziemlich genau 0,01 ist¹⁾, so sieht man, daß als Lösung die kleinste reelle Wurzel der Gleichung (13) zu benutzen ist.

Zur praktischen Berechnung bei beweglichen Flüssigkeiten erhält man eine erste Annäherung von h durch Fortlassen der mit h^4 und h^3 multiplizierten Glieder und Auflösung der restierenden quadratischen Gleichung; setzen wir zur Abkürzung

$$(14) \quad \begin{cases} a) & \left\{ \begin{aligned} 8 \pi h R^3 m \sin 2 \varepsilon - \frac{f^2 \sin 4 \varepsilon}{m R^2} - \frac{K}{R^2} \sin 2 \varepsilon &= a, \\ b) & \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{3} \pi h R^4 m \sqrt{m} \sin \varepsilon - \frac{f^2 \sqrt{m}}{m R} \sin 4 \varepsilon \cos \varepsilon \\ - K \frac{\sqrt{m}}{R} \sin 2 \varepsilon \cos \varepsilon &= b, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

so erhalten wir²⁾

$$(14c) \quad h = \frac{1}{a} \{ b - \sqrt{b^2 + a \cdot (f^2 \sin 4 \varepsilon + K m \sin 2 \varepsilon)} \}.$$

Hieraus ist h^4 und h^3 berechenbar; bezeichnet h' den ungenaueren, h'' den genaueren Wert von h , so wird

$$(14d) \quad \left\{ \begin{aligned} k'' &= \frac{1}{a} \{ b - \sqrt{b^2 + a \cdot (f^2 \sin 4 \varepsilon + K m \sin 2 \varepsilon - 8 \pi h k'^4 R \sin 2 \varepsilon} \\ &\quad + 16 \pi h k'^3 R^2 \sqrt{m} \sin 2 \varepsilon \cos \varepsilon) \}. \end{aligned} \right.$$

Auf diese Weise fortfahrend kann man sich dem wahren Wert von h beliebig nähern.

So erhält man den Reibungskoeffizienten $k^2 \cdot h$ aus der Beobachtung der Schwingungsdauer und des Dekrementes der mit Flüssigkeit und der mit Luft gefüllten Kugel, da der Wert von K entsprechend der Gleichung (12) auch aus den zwei letzteren Größen berechenbar ist. Was schließlich noch den Wert von f^2 betrifft, so ist bei biflarer Aufhängung (vgl. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Phys. 10. Aufl. p. 112)

$$(15) \quad f^2 = g G \frac{e_1 e_2}{4(l-\delta)} + \frac{2\pi}{5} [E] \frac{q^4}{l},$$

wobei

$$\delta = \rho^2 \sqrt{\frac{2\pi [E]}{g G}}$$

1) Wie schon oben bemerkt, bezeichnet man das Produkt $k^2 \cdot h$ als Reibungskoeffizient.

2) Durch Benutzung des negativen Vorzeichens der Quadratwurzel erhalten wir den verlangten kleineren Wert.

gesetzt ist und die Buchstaben folgende Bedeutung haben: e_1 bzw. e_2 sind der untere bzw. obere Abstand der Aufhänge-drähte, l ihre mittlere Länge, ϱ ihr Radius, $[E]$ ihr Elektrizitäts-modul; G ist das Gewicht der aufgehängten festen Teile plus dem halben Gewicht der Drähte und g die Erdbeschleunigung.

Experimentell genauer bestimmt sich f^2 nach der aus den Gleichungen (11') folgenden Gleichung¹⁾

$$(16a) \quad M = \frac{f_0^2}{m_0^2} = \frac{f_0^2}{T_0^2} (4\pi^2 + \Delta_0^2).$$

Wir können nämlich die Gleichung (15) in der Form schreiben

$$f^2 = agG + b,$$

wobei a und b für eine bestimmte Aufhängung Konstante sind, unabhängig von den angehängten Massen.²⁾ Es handelt sich dann nur noch um deren Bestimmung, die entsprechend der Gleichung (16a) aus drei Schwingungsbeobachtungen der nur mit Luft gefüllten Kugel bei drei verschiedenen Zusatz-trägheitsmomenten bekannter Größe erfolgen kann. Damit die Luftreibung bei verschiedenen Trägheitsmomenten nicht in verschiedenem Grade wirkt, ist es zweckmäßig, konzentrische, genau aufeinander passende Ringe zu benutzen; sind K_1 , K_2 und K_3 deren Trägheitsmomente, die aus Gewicht und Radien der Ringe in bekannter Weise zu berechnen sind, beziehen sich die Indizes 1, 2 und 3 auf diese drei Fälle, und setzen wir abkürzend

$$\frac{4\pi^2 + \Delta^2}{T^2} = S,$$

so folgt aus

$$M + K_1 = S(agG_1 + b)$$

und zwei entsprechenden Gleichungen

$$(16b) \quad g \cdot a = \frac{(K_1 - K_2)(S_1 - S_3) - (K_1 - K_3)(S_1 - S_2)}{(G_1 S_1 - G_2 S_2)(S_1 - S_3) - (G_1 S_1 - G_3 S_3)(S_1 - S_2)}$$

und

$$(16c) \quad b = \frac{K_1 - K_2 - ag(G_1 S_1 - G_2 S_2)}{S_1 - S_2}.$$

1) Dabei ist das mit dem Reibungskoeffizienten der Luft multiplizierte Glied als unwesentlich fortgelassen.

2) Der im Nenner des ersten Summanden von f^2 vorkommende Ausdruck δ enthält zwar das angehängte Gewicht; praktisch genügt aber zu seiner Berechnung ein konstanter Mittelwert von G .

Zusammengefaßt ergeben sich als Bedingungen, unter denen die abgeleiteten Gleichungen Gültigkeit haben sollen:

1. Die Terme $u(\partial u / \partial x) \dots$, $w(\partial w / \partial z)$ sind zu vernachlässigen; dies setzt möglichst kleine Geschwindigkeiten, also praktisch große Schwingungsdauern und kleine Amplituden voraus.

2. Die durch die erste Ablenkung aus der Ruhelage erfolgten Störungen haben sich durch den Einfluß der Reibung ausgeglichen, ein Bewegungszustand, der praktisch durch Konstanz des Dekrementes in die Erscheinung treten muß.

3. Die mit $e^{-\tau R}$ multiplizierten Glieder der Gleichung (4) sind zu vernachlässigen: praktisch ist

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{T k^2}} \sin \varepsilon$$

zu setzen und ε nur wenig von 45° verschieden; für Wasser und für $R = 5 \text{ cm}$ und $T = 100''$ (vgl. die folgenden Versuche) ist

$$\tau R \text{ etwa gleich } 8,$$

so daß in der Tat $e^{-\tau R}$ klein gegen $e^{\tau R}$ ist¹⁾, wenn es sich um Flüssigkeiten von der Zähigkeit des Wassers handelt.

4. Die äußere Reibung ist unendlich groß — die Prüfung dieser Voraussetzung ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung.

III. Versuche mit schwingenden Hohlkugeln.

Zur experimentellen Prüfung der theoretisch abgeleiteten Beziehung für den Reibungskoeffizienten ist es vor allem nötig, die gemachten Voraussetzungen soweit als möglich zu erfüllen. Ich wählte deshalb bei einem Kugelradius R von 5 cm die Aufhängung und Zusatzträgheitsmomente derart, daß die Schwingungsdauer nicht unter $100''$ lag; nur dadurch wurde es auch möglich, die Schwingungsdauern mit Sicherheit bis auf wenige zehntel Promille zu messen (vgl. p. 176 ff.).

1) Die mit den positiven und negativen Potenzen multiplizierten Ausdrücke sind von gleicher Größenordnung, so daß es nur auf die Größe der Potenzen selbst ankommt.

Die Details des Schwingungsapparates sind aus der Photographie ($\frac{1}{5}$ nat. Größe, Taf. V) zu ersehen.

In dem thermisch geschützten Kellerraume, der nur zu den Messungen betreten wurde, war ein großer Glaskasten mit aufgesetzter Glasröhre *G* aufgestellt, der gegen die Strahlung des Beobachters und der Skalenbeleuchtung durch Schirme (in der Photographie fortgelassen) geschützt war; in ihm war ein selbsttätiger Temperaturregulator angebracht (in der Photographie sind *R* die zur regulierenden Gasflamme führenden Röhren und Schläuche, *Q* ist der Quecksilberregulator), so daß die Temperaturschwankungen nicht $\frac{1}{10}$ Grad überstiegen. An der Decke des Raumes waren an einem Torsionskopf zwei $1\frac{1}{2}$ m lange Messingdrähte von wenigen Millimetern Abstand (die genauen Zahlen vgl. p. 179) innerhalb der Glasröhre *G* aufgehängt. Diese Drähte waren durch schwaches Ausglühen enttordiert worden und hingen in der endgültigen Lage mehrere Monate vor der Ausführung der definitiven Versuche. An ihnen ist mittels eines Hakens *H* das Schwingungssystem befestigt, dessen wesentlicher Teil ein stabiles Messingkreuz *M*, möglichst symmetrisch gearbeitet, ist. Dieses wiederum trägt an den gegenüberliegenden Enden zweier Arme je einen kleinen Zylinder *Z* von 1,4 cm Höhe und 0,7 cm Durchmesser aus weichem Eisen, die, wie ich mich besonders überzeuete, dem Apparate kein meßbares magnetisches Drehmoment infolge des Erdfeldes gaben; ferner den Spiegel *S*, zwei Gewinde zur Befestigung der Zusatzträgheitsmomente und schließlich die Kugel *K*. Als Zusatzträgheitsmomente dienten vier Ringe (in der Photographie sind zwei Ringe *J* aufgelegt) von 1,2 cm Breite und 0,1 . . . 0,4 cm Höhe, die aus einem einzigen gegossenen und abgedrehten Stück Rotguß geschnitten waren (vgl. p. 171). Die erste Ablenkung des Apparates aus der Ruhelage erfolgte elektromagnetisch durch Schließen eines Stromes, der in mehreren Windungen zwei in symmetrischer Lage zu den Eisenzylindern *Z* innerhalb des Kastens befestigte Stücke *E* aus weichem Eisen umfloß (*D* sind die zu den Elektromagneten führenden Drähte). Zur Vermeidung von remanentem Magnetismus wurde der Strom nach dem Unterbrechen mit Hilfe eines geeigneten Kommutators mehrmals kommutiert und zugleich geschwächt. Daß in der

Tat keine magnetischen Drehkräfte zurückblieben, ergab sich aus der Konstanz des beobachteten logarithmischen Dekrementes (vgl. Tab. III, p. 176—177): es waren nur Schwankungen von einigen Promille zu konstatieren, die auf zufälligen Störungen oder Ablesefehlern beruhten und in der Tat keinen einseitigen Gang zeigten. Diese Konstanz des Dekrementes ist zugleich ein Beweis, daß die durch die erste Ablenkung aus der Ruhelage hervorgerufenen Störungen verschwunden sind, so daß die abgeleiteten Gleichungen für die beobachtete Bewegung Gültigkeit haben (vgl. Bedingung 2 p. 172).

Als Kugeln benutzte ich sowohl eine Glas- als eine Metallkugel (letztere ist in der Photographie, Taf. V, abgebildet) von je 5—6 cm Radius. Die Glaskugel war unter einer größeren Zahl ausgesucht, ihr äußerer Durchmesser schwankte zwischen 11,6 und 11,9 cm. An einer Stelle der Kugel war möglichst unmittelbar eine 2 mm weite Röhre angeblasen, die zum Füllen und Aufhängen der Kugel diente. Da die hierdurch bedingte Abweichung von der Kugelform in unmittelbarer Nähe der Achse der Schwingungen lag, konnte sie keinen merklichen Fehler hervorrufen. Auf die Röhre war eine Messinghülse mit Gewinde aufgekittet; die Gewindemutter trug zentrisch ein in die Röhre eingepaßtes Stück Glas, das bis zur inneren Oberfläche der Kugel reichte und dadurch die Kugelgestalt wahrte, außerdem eine aus der Photographie ersichtliche Vorrichtung *V* zum Aufhängen der Kugel. Aus der Wägung der Kugel mit und ohne Wasser ergab sich ihr Radius zu 5,295 cm.

Um ferner mit einer möglichst vollkommenen Kugel zu arbeiten und zugleich dasselbe Kugelmateriel wie Helmholtz-Piotrowski zu benutzen, ließ ich mir eine Metallkugel anfertigen, die innen, auf Hochglanz poliert, sehr gut spiegelte. Die Kugel wurde, wie aus der Photographie zu ersehen, aus zwei Hälften zusammengesetzt, die aus Messingblech auf eine genau abgedrehte Holzkugel aufgedrückt worden waren. Die überstehenden Ränder konnten mittels sechs Schrauben aufeinander gepreßt werden, so daß die Kugel wasserdicht war. Der Verschluß und die Aufhängung dieser Kugel waren wie bei der Glaskugel. Ich überzeugte mich durch einfache optische Beobachtungen (vgl. auch Helmholtz-Piotrowski, l. c., p. 181), daß nirgends erhebliche Ab-

weichungen von der Kugelform vorhanden waren. Der äußere Durchmesser der Kugel schwankte zwischen 10,05 und 10,02 cm, die doppelte Wandstärke betrug im Mittel 0,10 cm, so daß sich der innere Durchmesser zu $9,935 \pm 15$ ergab, während der aus

dem Wassergewicht berechnete 9,955 cm betrug. Als Versuchsfüssigkeit habe ich reines destilliertes Wasser benutzt.

Die Beobachtungen geschahen mittels Fernrohr und Skala. Die an der Skala abgelesenen Umkehrpunkte konnten direkt zur Berechnung des Dekrementes benutzt werden, da die Skala einen Teil eines Kreises bildete und der Abstand des Spiegels von der Skala gleich dem Radius dieses Kreises (225 cm) gewählt wurde. Die Schwingungsdauern wurden aus den ebenso wie oben (p. 159) beobachteten Durchgangszeiten durch die Ruhelage berechnet, die Abweichungen der Schwingungsmittelpunkte von der Ruhelage betrugen nur wenige zehntel Millimeter, wie aus dem explizite angeführten Beispiele in Tab. III, Vertikalreihe *B* (p. 176), zu ersehen ist. Beobachtete ich durch das Fernrohr während einer Schwingung einen in der Drehachse gelegenen Punkt, so schien er in Ruhe zu sein: ein Beweis, daß das System reine drehende Schwingungen ausführte.

Nachstehende Tab. III, p. 176—177, enthält als Beispiel die Resultate einer Beobachtung, die mit der mit Wasser gefüllten Metallkugel und bei Aufliegen der zwei mittleren Ringe als Zusatzträgheitsmomente ausgeführt wurde.

Die Ruhelage vor dem Versuch war 500,0 mm, die Skalenteile sind Millimeter. Die erste Vertikalreihe *A* gibt die direkt abgelesenen Umkehrpunkte, *B* die aus drei aufeinander folgenden Umkehrpunkten A_1, A_2, A_3 berechneten Schwingungsmittelpunkte; die Zahlen unter *C* stellen die Schwingungsbögen dar und sind aus *A* nach der Formel $\pm \frac{1}{2}(A_1 - 2A_2 + A_3)$ gebildet, unter *D* sind ihre Briggischen Logarithmen angeführt, unter *E* die Differenzen zweier aufeinander folgender Zahlen der vorhergehenden Kolonne, d. h. die logarithmischen Dekremente; *F* enthält die Mittel aus je zehn Werten, *G* die Differenzen des 1. und 25. Logarithmus, des 2. und 26. Logarithmus usw., jedesmal durch 24 dividiert: die Maximalabweichungen vom Mittel betragen 2 Promille. Unter *H* sind ferner die zwischen

Tabelle III.

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
898,2							10° 15' 20,3"		19,20°
110,5	499,3	777,6	89076				16 25,7		
877,9	499,4	757,1	87915	01161			17 30,9		
131,1	499,5	736,9	86741	01174			18 36,7		
858,1	499,4	717,4	85576	01165			19 42,0		
150,3	499,6	698,6	84423	01153			20 47,6		
399,6	499,6	680,0	83251	01172	011644		21 53,0		
168,8	499,8	662,0	82086	01165			22 58,5		
821,9	499,7	644,5	80922	01164			24 03,5		
186,0	499,8	627,5	79761	01161			25 09,1		
805,0	499,6	610,8	78590	01171			26 14,1		
202,4	499,7	594,6	77422	01168			27 19,3		
789,0	499,6	578,8	76253	01169			28 24,2		
218,0	499,7	563,5	75089	01166			29 29,7		
774,0	499,8	548,5	73918	01171			30 34,5		
232,9	499,9	534,0	72754	01164	011675		31 41,0		
759,7	499,8	519,8	71584	01170			32 45,8		
246,9	499,9	506,0	70415	01169			33 51,7		
746,1	499,8	492,6	69249	01166			34 57,0		
260,0	499,8	479,7	68088	01161			36 02,4		
733,2	499,8	466,8	66913	01175			37 07,5		
272,8	499,9	454,3	65734	01179			38 13,1		
721,0	499,9	442,2	64562	01172			39 17,6		

284,8	499,9	430,3	63377	01185	011750	011680	40 23,2	130,64"	19,26°
709,2	499,8	418,8	62201	01176			41 28,0	130,67	
269,0	499,9	407,8	61045	01166			42 33,7	130,71	
698,3	499,9	396,8	59857	01188			43 39,7	130,67	
307,0	500,1	386,2	58681	01176	011691	011692	44 44,8	130,70	19,29°
688,0	500,0	376,0	57519	01162			45 50,4	130,67	
317,0	500,0	366,0	56348	01171			46 55,6	130,67	
678,0	500,0	356,1	55157	01191			48 01,0	130,67	
326,8	500,1	346,6	53983	01174	011710	011711	49 06,1	130,63	19,29°
668,8	500,1	337,4	52815	01168			50 11,1	130,63	
335,9	500,1	328,5	51654	01161			51 16,5	130,62	
660,0	500,1	319,8	50488	01166			52 21,4	130,61	
344,2	500,1	311,4	49332	01156	011710	011704	53 26,7	130,62	19,29°
651,6	500,1	303,0	48144	01188			54 32,0	130,65	
352,7	500,1	294,9	46967	01177			55 37,7	130,67	
643,5	500,0	287,0	45788	01179			56 43,1	130,72	
360,3	500,0	279,5	44638	01150	011736	011735	57 48,6	130,63	19,29°
636,0	500,0	271,9	43441	01167			58 54,2	130,70	
367,8	500,1	264,7	42275	01166			59 59,5	130,65	
628,9	500,1	257,6	41095	01180			11° 09 04,6	130,62	
374,8	500,1	250,7	39915	01180	011700	011739	02 10,0	130,62	19,29°
622,1	500,0	244,1	38757	01158			03 14,8	130,61	
381,2	500,1	237,7	37603	01154			—	—	
615,8	500,1	231,3	36418	01185			05 25,3	130,64	
387,7					Mittel	011712 ± 23	06 30,7	130,62	19,29°
								± 5	

zwei Umkehrpunkten beobachteten Momente des Durchganges durch die Ruhelage 500 bis auf zehntel Sekunden angegeben, J enthält die Differenzen zweier um je zwölf ganze Schwingungen voneinander entfernter Momente dividiert durch 12: die einzelnen Werte weichen von ihrem Mittel im Höchsthalle um 0,4 Promille ab; die letzte Vertikalreihe schließlich enthält die von Zeit zu Zeit an dem Thermometer T abgelesene Temperatur. Diese steigt während des dargestellten Versuches durch die Strahlung des Beobachters und der Skalenbeleuchtung um $\frac{9}{100}$ Grad, was einer Abnahme des Dekrementes um 1 Promille entsprechen würde.

Enthielt die Kugel Luft statt Wasser, so konnten die Dekremente nicht so genau gemessen werden, da sie nur etwa den zehnten Teil so groß waren. Die Schwingungsbeobachtungen wurden dabei stets über mehrere Stunden ausgedehnt, aber nur von Zeit zu Zeit 5–10 Schwingungen beobachtet. Auch bei über 160 Schwingungen während etwa dreier Stunden blieb die Schwingungsdauer bis auf weniger als 1 Promille konstant und das Dekrement bis auf weniger als 1 Proz.

Zur Berechnung des Reibungskoeffizienten ist die Kenntnis der absoluten Größe aller beobachteten Zahlen nötig; deshalb wurde das Dekrement der natürlichen Logarithmen auf eine ganze Schwingungsdauer bezogen (vgl. Theoret. Teil, p. 165) benutzt; es ergibt sich aus dem im Beispiel Tab. III berechneten durch Multiplikation mit 4,605. Ferner wurde der Gang des Chronometers nach der Sternwartenzeit korrigiert, die Gewichte, wo nötig, auf den leeren Raum usw. berechnet und das benutzte Thermometer unter den üblichen Vorsichtsmaßregeln mit einem von der Reichsanstalt geprüften Thermometer verglichen, dessen Nullpunkt besonders kontrolliert worden war.

Da die mit der Metallkugel erhaltenen Zahlen die zuverlässigeren sind, will ich explizite alle die Daten angeben, die zur Berechnung des Reibungskoeffizienten bei einem der Versuche der Metallkugel benutzt wurden.

Was zunächst die „Direktionskraft“ f^2 der Aufhängung betrifft, so ließ sich angenähert ihr Wert nach der Gleichung (15), p. 170, berechnen. Bei meinen Versuchen war:

der gegenseitige Abstand der	{	$e_1 = 0,15$ cm
Aufhängedrähte	{	$e_2 = 0,31$ „
ihre Länge		$l = 138$ „
ihr mittlerer Radius		$\varrho = 0,0106$ cm
ihr Torsionsmodul		$F = \frac{2}{3} E = 31,2 \cdot 10^{10}$ C.G.S.

(der letztere wurde aus Torsionsschwingungen eines unifilar aufgehängten Zylinders in üblicher Weise gemessen). Die Korrektion δ war gegen l zu vernachlässigen. Aus diesen Werten ergibt sich für die Größenordnung

von $g \cdot a$: 0,080

und für diejenige

von b : 90.

Zur exakten Bestimmung von f^2 andererseits sind, wie p. 171 auseinandergesetzt, mindestens drei Versuche mit leerer Kugel bei drei verschiedenen Zusatzträgheitsmomenten erforderlich. Es war:

das Gewicht der leeren Metallkugel	142,264 g
„ „ „ mit Wasser von 19,2° gefüllten Kugel	657,45 „
„ „ „ des Tragekreuzes	338,880 „
„ „ „ des Ringes I	73,264 „
„ „ „ „ II	166,087 „
„ „ „ „ III	245,320 „
„ „ „ „ IV	341,910 „

Die Durchmesser der Ringe waren { $2 r_i = 24,50$ cm
 $2 r_a = 26,91$ „

Für die Werte der Schwingungsdauern erhielt ich im Mittel mehrerer Versuchsreihen beim Aufliegen:

des Ringes I	$T = 97,214''$
	± 10
„ „ II	$T = 115,363$
	± 5
„ „ III	$T = 127,441$
	± 15
der Ringe I u. III	$T = 136,860$
	± 0
„ „ II u. III	$T = 146,900$
	± 6

Das logarithmische Dekrement erwies sich zur Berechnung von f^2 unnötig. Nach den Gleichungen (16, a, b, c), p. 171, wird:

1. aus den Versuchen mit den Ringen I, III und II + III

$$ag = 0,08753, \quad b = 80,978,$$

2. aus den Versuchen mit den Ringen I, II und I + III

$$ag = 0,08873, \quad b = 79,572.$$

Daraus folgt für die Größe von f^2 beim Aufliegen der Ringe II + III

$$1. \quad f^2 = 204,22,$$

$$2. \quad f^2 = 204,52.$$

Außer dem Kugelradius, der sich aus dem Wassergewicht zu $R = 4,9778$ cm ergab, bedürfen wir nun zur Berechnung von k noch der Kenntnis der logarithmischen Dekremente und der Schwingungsdauern für die mit Luft und die mit Wasser gefüllte Kugel. Diese Werte sind in der folgenden Tab. IV zusammengestellt.¹⁾ Der erste Teil bezieht sich auf Versuche mit der Glaskugel, der zweite auf die mit der Metallkugel. Es sind jedesmal die mit zwei verschiedenen Ringen erhaltenen Resultate angegeben, die also als voneinander unabhängig anzusehen sind. Aus den Versuchen mit der Glaskugel folgt

$$\eta_{17,5^\circ} = 0,01065 \text{ (C.G.S.)}$$

$\pm \quad 10$

Aus den für die Metallkugel und den für Ring II + III angegebenen Werten ergibt sich

$$\Delta = 0,053896, \quad m = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 4\pi^2}}{T^2} = 0,048094,$$

$$K^2) = \frac{4_0}{\pi} \frac{f_0^2}{m_0} = 12,490,$$

also nach den Gleichungen (14) p. 170

$$k' = 0,1255,$$

$$k'' = 0,0996,$$

$$k''' = 0,1027 \text{ usw.},$$

schließlich

$$k^{\text{VII}} = 0,1015$$

und

$$k^2 h = \eta_{19,2^\circ} = 0,01028 \text{ (C.G.S.)}.$$

1) Das Dekrement $\bar{\Delta}$ ist hier für die halbe Schwingungsdauer in Briggischen Logarithmen angegeben.

2) Das in Gleichung (12) mit dem Reibungskoeffizient der Luft multiplizierte Glied ist zu vernachlässigen und

$$\frac{\sin 4\varepsilon_0}{\sin 2\varepsilon_0} = 2 \cos 2\varepsilon_0 = -\frac{4_0}{\pi}$$

zu setzen.

Tabelle IV.

Versuche mit der Glaskugel bei 17,5° C.

	Schwingungs- dauer T	Logarithmisches Dekrement \bar{A}	Reibungskoeff. $\eta = k^2 h$ (C.G.S.)
Kugel leer Ring II	116,232'' 116,223	0,003637 0,003638	
Ring IV	140,880'' 140,864	0,002732 0,002714	
Kugel mit dest. Wasser gefüllt Ring II	96,940'' 96,955 96,960	0,034328 0,034311 0,034308	0,01077
Ring IV	117,80'' 117,97	0,023191 0,023241	0,01052

Versuche mit der Metallkugel bei 19,2° bzw. 19,1° C.

Kugel leer Ring II	115,368'' 115,358	0,003372 0,003360	
Ring II + III	146,902'' 146,900	0,0022944 0,0022931	
Kugel mit destilliertem Wasser gefüllt Ring II + III 19,2° C.	130,646'' 130,680 130,671 130,657 130,651 130,653 130,642 130,637	0,011727 0,011678 0,011705 0,011694 0,011726 0,011673 0,011725 0,011720	0,01028
Ring II 19,1° C.	101,908'' 101,940 101,950 101,982 101,976	0,019363 0,019377 0,019333 0,019329 0,019356	0,01039

Da eine Änderung des Dekrementes oder der Schwingungsdauer um 1 Promille den Reibungskoeffizienten um je 4 Promille ändert und da das Dekrement bis auf ± 2 Promille, die Schwingungsdauer bis auf $\pm 0,2$ Promille genau gemessen

werden konnte, ist der mögliche Fehler des Resultates ± 9 Promille.

Vergleichen wir die gewonnenen Werte mit den Ergebnissen, die nach anderen Methoden gefunden wurden (Tab. V), so müssen wir aus der Übereinstimmung den Schluß ziehen, daß alle bei der vorliegenden Methode gemachten Voraussetzungen innerhalb der Beobachtungsfehler durch die Versuche bestätigt werden, also in erster Linie, daß auch in diesem Falle *die äußere Reibung zwischen Wasser und Glas oder Wasser und Metall unendlich groß ist.*

Tabelle V.

Beobachter	Methode	Reibungskoeffizient des Wassers bei	
		17,5° C.	19,2° C.
Poiseuille ¹⁾ (1846)	Strömung durch Kapillaren	0,01076	0,01031
Sprung ²⁾ (1876)	„	0,01065	0,01027
Slotte ³⁾ (1883)	„	0,01075	0,01030
Thorpe u. Rodger ⁴⁾ (1894)	„	0,01067	0,01025
W. König ⁵⁾ (1887)	Schwingung einer Vollkugel	0,01099	0,01054
K. Mützel ⁶⁾ (1891)	Schwingung eines Hohlzylinders	0,01082	0,01037
R. Ladenburg (1908)	Schwingung einer Hohlkugel	0,01065	0,01032

IV. Berechnung des Reibungskoeffizienten aus den Piotrowskischen Versuchen.

Was nun schließlich die von Piotrowski erhaltenen Resultate betrifft, so habe ich die von ihm für „ausgekochtes“

1) J. L. M. Poiseuille, Compt. rend. 15. p. 1167. 1842.

2) A. Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 1. 1876.

3) K. F. Slotte, Wied. Ann. 14. p. 13. 1881.

4) J. E. Thorpe u. J. W. Rodger, Phil. Trans. 185. p. 397. 1894.

5) W. König, Wied. Ann. 32. p. 193. 1887.

6) K. Mützel, Wied. Ann. 43. p. 15. 1891.

Wasser von $21,7^{\circ}$ C. angegebenen Werte ($A = 0,054668$, $T = 22,9745''$) in die oben abgeleitete Gleichung für k eingesetzt und finde als Wert des Reibungskoeffizienten (in C.G.S.)

$$(k^2 \cdot h)_{21,7^{\circ}} = 0,00992,$$

während der Mittelwert der nach Strömungsversuchen erhaltenen Zahlen für reines Wasser dieser Temperatur

$$0,00964$$

ist. Die Differenz von 3 Proz. liegt innerhalb der Piotrowskischen Versuchsfehler, da die beobachteten Dekremente Schwankungen von 2 Proz. aufweisen. Von Interesse sind besonders noch die von Piotrowski für Äthyläther gefundenen Werte, da dieser bedeutend leichter beweglich als Wasser ist. Aus seinen für $21,6^{\circ}$ C. angegebenen Zahlen finde ich nach der obigen Gleichung

$$k^2 h = 0,00218,$$

während Thorpe und Rödger nach der Strömungsmethode

$$0,00234 \quad \text{bei } 20^{\circ}$$

$$0,00212 \quad \text{bei } 30^{\circ}$$

erhalten. Es sind also auch für Äther bei den relativ kleinen Schwingungsdauern von $24''$ die Geschwindigkeiten als so klein anzusehen, daß man die quadratischen Terme in den Differentialgleichungen vernachlässigen darf.

Helmholtz dagegen findet nach seiner Theorie aus den Piotrowskischen Versuchen für Äthyläther als Reibungskoeffizient bei $21,6^{\circ}$

$$k^2 h = 0,00251$$

und für Wasser von $24,5^{\circ}$

$$k = 0,1186 \text{ C.G.S.},$$

also den Reibungskoeffizienten

$$k^2 \cdot h = 0,01402,$$

während sich aus Strömungsversuchen für dieselbe Temperatur

$$0,00905$$

ergibt, d. h. eine Abweichung von mehr als 40 Proz.; und zugleich erhält Helmholtz für den Gleitungskoeffizient Wasser-Metall

$$\lambda = 0,235 \text{ cm.}$$

Der Grund für diese Differenzen scheint mir in einem Punkt der Theorie zu liegen, auf den Helmholtz selbst als

sehr ungünstig für die numerische Ausrechnung hingewiesen hat (l. c. p. 213): von wesentlichem Einfluß ist nämlich die Differenz

$$\frac{f^2}{M} - m^2$$

(die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie bei Helmholtz und wie in der oben abgeleiteten Theorie), „für deren Größe bereits Unterschiede in den Hundertteilen der Sekunde bei Bestimmung der Schwingungsdauern (d. h. bei 24'' Schwingungsdauer Unterschiede von weniger als 1 Promille) maßgebend sind.“ Benutzt man nun zur Berechnung von λ statt des von Piotrowski für M angegebenen Wertes (21 250) nur einen um 1 Proz. kleineren, der innerhalb der von Piotrowski angegebenen Fehlergrenzen liegt, so erhält man für λ den Wert 0,009 cm statt wie Helmholtz 0,235 cm, also einen Wert, der noch kleiner ist als derjenige, den Helmholtz aus den Piotrowskischen Resultaten für Äther (0,012) ableitet, und bereits für Äther schließt Helmholtz aus den Piotrowskischen Versuchen auf ein vollständiges Haften an der Metallfläche. Aus diesen Werten von M und λ und aus den übrigen Piotrowskischen Zahlen erhält man schließlich mit Benutzung der Helmholtzschen Theorie einen Reibungskoeffizienten des Wassers, der nur noch um 8 Proz. von dem aus Strömungsversuchen abgeleiteten abweicht.

Mithin müssen wir, wie mir scheint, auch aus den Piotrowskischen Versuchen, auf eine unendlich große äußere Reibung zwischen Wasser und Metall schließen.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Schwingungsdauer und Dekrement eines mit Wasser gefüllten Glasgefäßes, das drehende Schwingungen um eine vertikale Achse ausführte, änderten sich nicht bei Versilberung der inneren Oberfläche.

2. Die Helmholtzsche Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit innerhalb einer schwingenden Kugel wurde auf den Fall unendlich großer äußerer Reibung angewendet.

3. Diese Theorie konnte durch Versuche in Glas- und Metallkugeln bestätigt werden: der auf diese Weise bestimmte

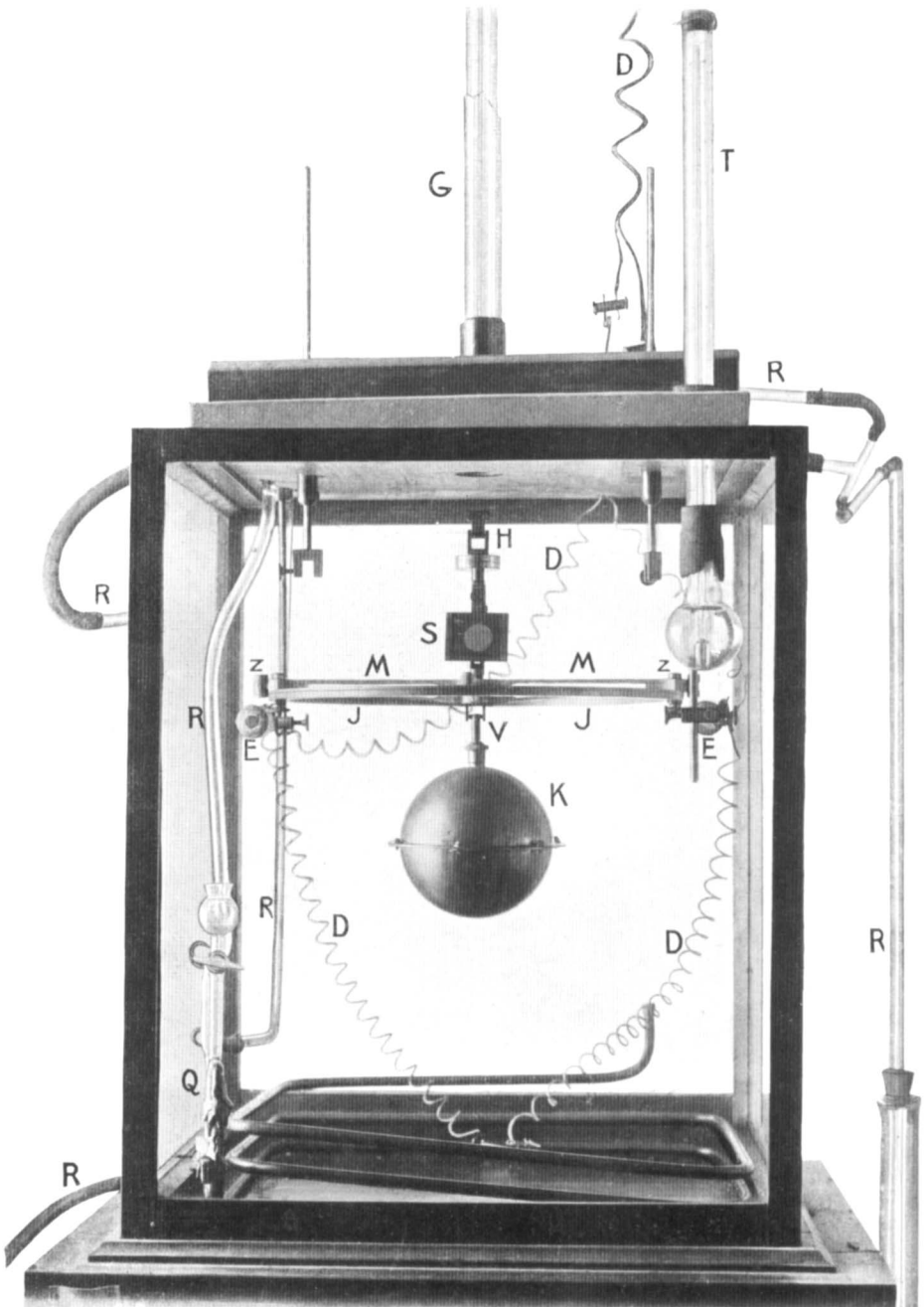
Reibungskoeffizient des Wassers stimmte mit dem nach anderen Methoden gefundenen bis auf wenige Promille überein.

4. Nach derselben Theorie ergab sich aus den Versuchen von Piotrowski für Wasser ein nur um 3 Proz. von dem Poiseuilleschen Werte abweichender Reibungskoeffizient, während Helmholtz nach seiner Theorie einen um 40 Proz. größeren Wert findet und einen merklich von Null verschiedenen Wert des Gleitungskoeffizienten.

Zum Schluß sei es mir gestattet, den Herren Professoren Lummer und Pringsheim meinen aufrichtigen Dank zu sagen für die lebenswürdige Überlassung der zu den Versuchen nötigen Apparate und für das große Interesse, das sie der vorliegenden Arbeit jederzeit entgegengebracht haben.

Breslau, Physik. Institut der Univ., im August 1908.

(Eingegangen 10. August 1908.)



R. Ladenburg.