

## VIII.

*Endliche Erlösung aus dem Tiefften des tiefen  
Schachtes;*

VOM

Berg-Commiff. Rath F. G. VON BUSSE zu Freiberg.

AN Euler's berühmter Aufgabe in seiner *Mechanica sive motus scientia*, §. 264 u. folg., — oder, der mehrern Anschaulichkeit wegen, zuvörderst an dem einzelnen Falle derselben, in welchem das *wirkliche* Gesetz der allgemeinen Ziehkraft zwischen *entfernten* Himmelskörpern auch innerhalb unsers Erdkörpers noch *gültig* bis zu seinem Mittelpunkte *gefordert* wird, — ihre Methode des Bejahen und Verneinen zu prüfen, hatte ich in diesen Annalen, Jahrg. 1806, B. 25 S. 236, gewisse Mathematiker, und namentlich auch den nunmehr verewigten Klügel aufgefordert. Statt seiner wurde mir in den Annal. 1807 B. 25 S. 212 von einem andern verdienstvollen Mathematiker, dem Hrn Prof. Mollweide, der sich damals auch in Halle befand, *erwidert*, und als Lösung jener Aufgabe eine Formel dargestellt, welche allerdings zu Stande gekommen war, ohne irgend einer von den mir eigenthümlichen Lehren über den Gebrauch des algebraischen  $\mp$  zu bedürfen.

Anfangs wurde von von mir mit meiner Antwort in der Hoffnung gezögert, daß Hr. Klügel selbst jene Erwiderung für bündig, und jene Formel für eine

seiner Methode gemäß gefundene erklären, oder auch ein anderer von denen Mathematikern, welche meine Lehre vom  $\mp$  nicht für die allein selig machende anerkennen wollten, irgend ein Siegesgeschrei über mich ausrufen möchten. Nachher wollte ich die Sache nicht wieder berühren, um jenem verdienstvollen Mann, der mir bereits sehr lieb und achtungswerth geworden war, nicht aufs neue unangenehm zu fallen. Jetzt aber werde ich durch den Hrn Prof. Brandes in Breslau an die rückständige *Beendigung* erinnert, indem auch dieser scharfsinnige Mathematiker in seinem *Lehrbuche der Gesetze des Gleichgewichts* etc. Theil 2 §. 65 f. jene Aufgabe *wiederum vergebens* in Angriff genommen hat.

Da ich, laut *Annalen* Jahrg. 1806 St. 6 S. 259 die ganze Aufgabe Kraft meiner Theorie des  $\mp$  kurz und bündig zu lösen weiß, so lagen mir auch sogleich die sämtlichen Schwierigkeiten vor Augen, welche den eben genannten berühmten Mathematiker veranlassen konnten, von der ferneren Bearbeitung der Aufgabe abzusehn. Was ich zu deren völliger Hebung, und zugleich über Kästners, L'Huillier's und Anderer mißlungene Angriffe so eben, während meiner Badekur in Töplitz niedergeschrieben habe, scheint mir für diese *Annalen* zu vielen Raum zu verlangen; daher ich es nach *Brünn* für den *Hesperus* mitnehmen werde.

Für diese *Annalen* aber scheinen mir meine Einwendungen gegen die vorhin erwähnte, durch den Hrn Prof. Mollweide mir entgegengesetzte Formel allerdings zu gehören, und seit unserer näheren, nunmehr auch persönlich gewordenen Bekanntschaft ist ja

zwischen uns beiden solche Zuneigung und gegenseitiges Wohlwollen eingetreten, daß wir nicht zu fürchten haben, über diese wissenschaftliche Discussion abermals in Hitze zu gerathen, obgleich ich mir, der Kürze wegen, erlauben muß, ohne Umschweife mich auszudrücken.

Durch jene Formel wird die Bewegung des Körpers dies- und jenfeit des Mittelpunktes allerdings so ausgedrückt, wie sie mit Hülfe einiger bekannten Fallgesetze, der gesunde Menschenverstand ohne besondern Calcul als *schicklich* und *natürlich vermuthen*, auch nach *Annalen* Jahrg. 1806 und 1807 ein Nicolaus Klimm sie in Erfahrung bringen mußte. Eben so würde sicherlich schon Euler, würde auch neuerlicher L'Huillier sie geradezu anerkannt haben, wenn nur nicht *ihr Calcul* etwas anderes ihnen zu glauben auferlegt hätte! Eine *Formel darzustellen*, durch welche Klimm's Erfahrung, wie ich in der Kürze sie nennen will, richtig *ausgedrückt* wird, dieses ist für jeden nicht ganz ungeübten Algebraisten eine so leichte Arbeit, daß *davon* in meiner Aufforderung natürlich nicht die Rede seyn sollte. In jener Erwiderung durch den Hrn Prof. Mollweide wird daher auch ganz natürlich vorausgesetzt, daß die dortige Formel nicht etwa bloß der Klimm'schen Erfahrung angepaßt, sondern als eine *Auflösung* der Aufgabe aus *den Datis derselben bündig gefolgert* sey; und diese Voraussetzung dürfte, meines Erachtens, durch jede von den drei folgenden Gegen-Erinnerungen einzeln genommen, schon völlig widerlegt seyn.

1. Die dortige Auffindung der Formel hat *petitionem principii* in sich; indem sie als ausgemacht

annimmt, daß der Körper, welcher diesseit des Mittelpunktes, und, um in der Kürze anschaulich zu sprechen, von *Europa* her die Entfernung  $\equiv a$  bis zum Mittelpunkte der Erde durchfallen war, dann auch nun  $\equiv a$  nach *Amerika* hin jenseit des Mittelpunktes sich bewegen müsse. Aber! wohin, und wie weit der Körper, nach erreichtem Mittelpunkte sich ferner bewege, dieses gehört ja wesentlich zu den gesuchten Größen der Aufgabe, welche eben durch den *Calcul* sollen gefunden, nicht aber als Geschenk demselben untergelegt werden.

Dieser Zirkel in der Auflösung ist hier um so auffallender, wenn man folgendes bedenkt:

Euler glaubte für die Bewegung des Körpers jenseit des Mittelpunktes, durch seinen *unmittelbar dafür angelegten* *Calcul* entschieden zu sehen, daß sie *unmöglich* sey. Vermittelt seines *späteren* *Calculs* für die elliptische Bewegung, glaubte er dann als völlig ausgemacht auch für jene geradlinige Bewegung gefunden zu haben, daß sie von dem Mittelpunkte dann *rückgängig* werden müsse! L'Huillier hatte durch seinen *Calcul* sogar gefunden, daß die Bewegung des fallenden Körpers schon *vor Erreichung* des Mittelpunktes unmöglich werde, und der Körper schon früher als nach Euler *rückgängig*, wiederum nach *Europa* hinaufsteigen müsse! Klinker hatte dagegen mir anvertraut, daß er in dem feigern Schachte, von dessen Tagepunkte in *Europa* an, völlig bis in den Mittelpunkt der Erde nicht nur gefallen, sondern auch durch denselben hindurch, und bis zum jenseitigen Tagepunkte in *Amerika* sich fortbewegt habe. Ich versicherte dann öffentlich, daß *mein algebraischer Calcul* mit Klinker's

Erfahrung völlig übereinstimmend antwor-te, forderte namentlich auch Klügel, meinen Nebenbuhler in  $\mp$ , auf, durch seine von mir bestrittene Methode ebenfalls jene vernünftige Antwort heraus zu calculiren; und — ein Klügel gab es zu, daß unter seinen Augen in Halle, so gut als folgendes gedruckt wurde: *da der Körper, wenn er den Mittelpunkt erreicht hat, jenseit desselben sich eben so weit von demselben entfernen muß, als er dießseits desselben zugefallen ist, so erhalten wir hiermit folgende Formel, welche dem gefunden Menschenverstande Genüge leistet, weil ihr gemäß der Körper nicht vom Mittelpunkte an rückgängig wird!!*

2. Bei der dortigen Verfertigung der Formel wird die *unendlich groÙe Geschwindigkeit* im Mittelpunkte, welche doch zur Bestimmung der Integral-Constante für die Bewegung jenseit des Mittelpunktes wesentlich entscheidend ist, *ganz unberührt* gelassen; welches allein schon hinreichend wäre, den dortigen Schlüssen vorzuwerfen, daß sie nicht consequent sind, nicht die Bewegung dies- und jenseit des Mittelpunktes als aneinander hängend, und einer einzigen Aufgabe zugehörig behandeln. Ich hatte doch früherhin gegen die eben so fehlgehenden Versuche anderer Mathematiker schon erinnert, daß man seinen Calcul nicht das eine Mal von Europa her, das andere Mal von Amerika her anlegen müsse.

3. Nachdem für die Bewegung bis zum Mittelpunkte  $v dv = \frac{2g b^2 ds}{(a-s)^2}$  richtig angesetzt ist, so wird dann wegen der entgegen gerichteten anziehenden Kraft jenseit des Mittelpunktes, nicht etwa blos

$v \cdot dv = - \frac{2g b^2 ds}{(a-s)^2}$  angesetzt (welches wiederum richtig wäre, sondern) „Ferner (heißt es S. 214) wird „hier  $s > a$ , also muß  $(s-a)^2$  statt  $(a-s)^2$  angesetzt „werden, und zwar, weil es die Natur der Sache so „mit sich bringt, denn die Algebra entscheidet hier- „über nichts, da bekanntlich  $(a-s)^2 = (s-a)^2$  ist.“ — Hier höre ich gleichsam den verewigten Klügel selbst sprechen. Aber so gut als gar keine Methode in der Anlage seines algebraischen Calculs hat man, wenn man während der Auflösung noch fragen muß, ob man etwa  $(s-a)^2$  gegen  $(a-s)^2$  eintauschen müßte, damit die Formel der Natur der Sache gemäß sich ergebe! Denn eine andre Natur der Sache weiß ich hier nicht aufzufinden, welche für diese zweite Umwendung des  $\mp$  sprechen könnte. Gegen dieselbe würde vielmehr eine sehr bekannte Natur des  $\mp$  zu erinnern haben, daß durch eine zweite Umkehrung desselben die erste aufgehoben wird. Wenn Hrn Klügel's Methode eingesteht, daß sie a priori zwischen  $(a-s)^2$  und  $(s-a)^2$  hier unentschieden bleibe: so gesteht sie eben damit ein, daß sie zwischen  $\int \frac{ds}{(a-s)^2}$  und  $\int \frac{ds}{(s-a)^2}$  nur nach Gründen a posteriori müssen zu wählen suchen. — Eben deshalb aber, weil das letzte Integral die Gegengröße des ersten ausmacht, ist es ja gewiß, daß hier zweimal umgekehrt wird, und vermöge einer bündigen Beurtheilung des  $\mp$  ist es ja auch völlig einleuchtend, daß die dadurch gefundene Formel keinesweges für die Bewegung von dem Mittelpunkte der Erde nach Amerika hin, sondern

*umgekehrt, für die Bewegung von Amerika aus nach dem Mittelpunkte hin gehört.*

In den *Annalen* 1807 B. 25 S. 220 heisst es, dass man mir sogar *zwei* Formeln statt *einer* darzustellen wisse! Es ist nur allzu wahr, dass mir *zwei Auflösungen* für *zwei leichte* Aufgaben, statt *einer Auflösung* für *eine* schwierige Aufgabe eingeliefert sind. Die beiden leichten Aufgaben sind I) die Bewegung eines Körpers vom europäischen Tagepunkte bis zum Mittelpunkte der Erde, und dann eben so II) die Bewegung eines Körpers vom amerikanischen Tagepunkte bis zum Mittelpunkte der Erde zu finden. Die *eine* schwierige Aufgabe ist, die Bewegung des Körpers nicht nur bis zum Mittelpunkte hin, sondern auch von da aus *fernerhin*, während der *darauf folgenden fernerer Zeit*, durch *bündigen Calcul* zu bestimmen.

Schwierig nämlich ist diese Aufgabe dadurch geworden und geblieben, dass die ersten und meisten Mathematiker, Euler, La Place, Cousin, Kästner u. s. w. (man siehe *Annalen* a. a. O.) eine wohl begründete Lehre von den entgegen gesetzten Grössen zu gebrauchen vermeinten, auch Klügel, nachdem ich dessen neue Lehre darüber sehr einleuchtend widerlegt hatte, dann hier und da es drucken liess, dass *er ja seine Lehre dem Gebrauche jener grossen Männer gemäfs dargestellt habe*; auch in den *Annalen* a. a. O. versichert wird, die *Hauptschwierigkeit* begreifen zu wollen, sey eine *unmögliche Forderung*, setze eine *Verwirrung der Begriffe* voraus, und sey *von mir durch Einmischung der Lehre von den entgegengesetzten Grössen in ein ganz falsches Licht gestellt!*

Vergebens hatte ich also, auch bei dieser Schwierigkeit, wie bei so mancher andern, versichert, daß sie durch einen unrichtigen Gebrauch des Bejahten und Verneinten entstanden sey, vergebens sogar unter einigen dahin gehörigen mir eigenthümlichen Lehren in *Annalen* J. 1806 B. 23 auch *diejenige* mit aufgeführt, durch deren *Betrachtung die ganze Schwierigkeit hier gehoben wird!*

Bündige Auflösung der schwierig gewesenenen Aufgabe.

1) Wenn eine *absolute* Größe *neben bejahten* und *verneinten* in Rechnung zu bringen ist, so *muß* sie als *bejahte* angeführt und behandelt werden; folglich

2) auch das absolute arithmetische Nichts  $= 0$ , welches ebenfalls *weder + noch -* ist, (nicht also nach Belieben sowohl für  $= + 0$  als  $= - 0$  geachtet werden darf). Wenn aber

3) die 0 als Gränze *bejahter* Größen zu betrachten ist, so muß sie als *solche* nothwendig, als  $= + 0$  behandelt werden, und dagegen

4) eben so nothwendig als  $= - 0$  beachtet werden, wo sie als Gränze von *verneinten* Größen vorkommt.

Ich kann hier in Töplitz nicht nachschlagen, wo diese Sätze am nächsten bei einander zu finden seyen; vermuthet aber, daß sie sämmtlich schon in meinen *Neuen Erörterungen über  $\mp$* , Cöthen 1798 systematisch erwiesen mit vorkommen. Die beiden letzten gehören mit zu denen, welchen ich hauptsächlich meine *Neue Methode des Größten und Kleinsten* zu verdanken habe. Die drei ersten sind von den Mathemati-



kern schon häufig, aber meistens unbemerkt gebraucht, nicht als *nothwendige Folgen der algebraischen Maafse* leiter gehörig beachtet worden; daher denn auch der 4te von ihnen verfehlt werden konnte. Namentlich durch diesen 4ten Satz wird nun die gewaltige Schwierigkeit, welche seit beinahe 100 Jahren so viel vergebene Arbeit gekostet hat, gänzlich gehoben. Denn

I. es sey  $AC + CB = +a + a$  der Erde Durchmesser, und  $AP = s$  während  $t$  Secunden von einem freien Körper, wegen der in  $C$  befindlichen ihn anziehenden Kraft durchlaufen, also am Ende der  $t$ ten Secunde seine Geschwindigkeit  $v = \frac{ds}{dt}$ , so ist in eben diesem Zeitpunkte die Beschleunigungszahl

$$\frac{dv}{2g dt} = \mp \left( \frac{a}{a-s} \right)^2 \begin{matrix} \text{diesseits} \\ \text{jenseits} \end{matrix} C *).$$

II. Für die Bewegung zwischen  $A$  und  $C$  also  $\frac{v dv}{2g} = + \frac{a^2}{(a-s)^2} ds$ , und daher  $\frac{vv}{4g} = + \frac{a^2}{a-s} + \text{Const.}$

Im ersten Anfange dieser Bewegung, für  $s = 0$ ,

\*) Dafs  $\frac{dv}{2g dt}$  nicht beschleunigende Kraft, oder Beschleunigung, sondern der phoronomische Ausdruck der Beschleunigungszahl ist, findet man gelegentlich in *Theorie der Hölischen Wafersäulen-Maschine* erinnert; dafs man aber in der *Algebra Herrschaft* behaupten kann und *mufs*, *bejahte* und *verneinte Zahlen* zu haben, denke ich in den dahin gehörigen Schriften genügend erwiesen zu haben. Die ängstlichen Anhänger des veralteten engeren Zahl-Begriffes würden dagegen an das Beschleunigungsmoment  $\frac{dv}{2dt} = \pm g \cdot \left( \frac{a}{a-s} \right)^2$  sogleich ohne alle *Gewissensbisse* sich halten. Wahrlich ein kleiner Schritt von der Verdammnis zur Seeligkeit! v. B.

*fol*l  $v = 0$  seyn, wodurch sich  $\text{Const} = -a$ , und demnach die Geschwindigkeits-Höhe

$$\frac{vv}{4g} = + \frac{aa}{a-s} - a \text{ für die Bewegung zwischen } A \text{ und } C,$$

und somit auch

$$= + \frac{aa}{+0} - a \text{ als die Geschwindigkeits-Höhe in } C$$

ergiebt.

III. Für die Bewegung jenseits  $C$  haben wir (aus I)

$$\frac{v dv}{2g} = - \frac{s^2}{(a-s)^2} ds, \text{ folglich } \frac{vv}{4g} = - \frac{aa}{a-s} + \text{Const.}$$

Da nun im *Anfange dieser* Bewegung die Geschwindigkeits-Höhe eben diejenige  $+ \frac{aa}{+0} - a$  seyn muß, welche am *Ende* der *vorigen* Bewegung eingetreten war; das  $s = a$  aber für den *Anfang dieser* Bewegung das *erste* von *denen*  $AP = s$  ist, welche *größer* als  $AC = a$  werdend sind: so ist das  $a - s = a - a$  hier  $= -0$  (Satz 4), und so haben wir am *Anfange dieser* Bewegung  $+ \frac{aa}{+0} - a = - \frac{aa}{-0} + \text{Const.}$ , also  $\text{Const.} = -a$ , und demnach  $\frac{vv}{4g} = - \frac{aa}{a-s} - a$  für die Bewegung jenseits  $C$ .

Hiermit ist nun die schwierige Aufgabe schon gelöst, indem wir die sehr vernünftigen Ausprüche des Calculs erhalten haben, daß *während derjenigen Sekunden*  $t$ , da sich der Körper zwischen  $A$  und  $C$  bewegt, die Geschwindigkeits-Höhen

$$\frac{vv}{4g} = \frac{aa}{a-s} - a \text{ sind,}$$

und dagegen  $= \frac{aa}{s-a} - a$  seyn müssen, wenn der Körper jenseits  $C$  sich bewegt.

Durch diese *calculatorische bündige* Auflösung liegt es nunmehr vor Augen, daß die Fallbrücke, weshalb die Mathematiker seit mehr 10 Jahren über den Mittelpunkt der Erde nicht hinaus kommen konnten, durch eine gehörige Unterscheidung zwischen dem  $\mp 0$  als Gränze <sup>bejahter</sup> <sub>verneinter</sub> Gröſſen,  $a-s$ , <sup>dieſſeits</sup> <sub>jenſeits</sub>  $C$ , mit völliger Sicherheit begangen wird.

Allerdings bin ich auch ſo vorſichtig geweſen; für die Geſchwindigkeits-Höhe im Mittelpunkte neben ihrem unendlichen Gliede  $a \cdot \frac{a}{0} = a \cdot \infty$  auch ihr endliches Glied  $-a$  beizubehalten. Ich wenigſtens habe dieſe und manche andere Vorſicht, ohne welche namentlich auch die Integral-Constanten uns manche Noth machen, ſicherlich meinen zuverläſſigen Systemen im Gebrauche des  $\mp$  mit zu verdanken; denn bis zum letzten Quinquennio des vorigen Jahrhunderts hin gieng es mir damit, wie es andern Mathematikern auch in dem gegenwärtigen Jahrhundert noch ergeht, welche die Schwierigkeit am *unrechten Orte* vermuthen, und am Ende ſich damit beruhigen, daß man nun einmal bei dem Uebergange zwischen endlichen und unendlichen Gröſſen mancherlei Unbegreiflichkeiten verſchlucken müſſe. So darf ich ſprechen, weil ich ja dergleichen mehrere in meinen Schriften aufgedeckt und vermöge meiner Theorie des Bejahten und Verneinten ſie fortgeſchafft habe.

Vermöge dieſer Theorie kann dann auch für die obige Aufgabe es bündig nachgewieſen werden: durch die einzige Annahme für die Anlegung des algebraiſchen Calculs, welche den Erd-Durchmeſſer  $AC + CB$

$= +a + a$  und den von  $A$  aus durchlaufenen Weg  $AP = +s$  gesetzt hat, ist es gewiß und nothwendig, daß

1. die *bejahnte* Geschwindigkeit  $v = +2\sqrt{g\sqrt{\left(\frac{aa}{a-s} - a\right)}}$   
für die erste, dritte, fünfte etc. Bewegung zwischen  $A$  u.  $C$ .

2. die *bejahnte* Geschwindigkeit.  $v = +2\sqrt{g\sqrt{\left(-\frac{aa}{a-s} - a\right)}}$   
für die erste, dritte, fünfte etc. Bewegung zwischen  $C$  u.  $B$ .

5. die *verneinte* Geschwind.  $v = -2\sqrt{g\sqrt{\left(-\frac{aa}{a-s} - a\right)}}$   
für die zweite, vierte, sechste etc. Bewegung zwischen  
 $B$  und  $C$ , und

4. die *verneinte* Geschwindigkeit.  $v = -2\sqrt{g\sqrt{\left(\frac{aa}{a-s} - a\right)}}$   
für die zweite, vierte, sechste etc. Bewegung zwischen  
 $C$  und  $A$  gehört.

Aber! mehrere Lehrbücher auch des jetzigen Jahrhunderts könnte ich nun aufführen, durch welche man veranlaßt seyn müßte, diese bejahten und verneinten Geschwindigkeits-Maasse als entgegengesetzt *gelegene* Länien aufzusuchen! Schlechterdings durch entgegengesetzte *Richtungen* muß das algebraische  $\mp$  für die Theorie *construirt* werden, wenn man nicht den ungereimtesten Folgerungen ausgeletzt seyn will. Möchten diejenigen, welche Lehrbücher drucken lassen, wenigstens die *ersten Gründe* eines haltbaren Systems, wie ich in der *zweiten* Auflage meines *ersten Unterrichts in der algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben* sie mitzutheilen gesucht habe, der Beachtung werth halten. Selbst auch in einem der empfehlungswürdigsten unter den neuesten Lehrbüchern, vom Hrn Prof. Zimmermann in Berlin, werden die Lehlrlinge hierin fehl geleitet.

Geschrieben zu Töplitz im J. 1820.

## N a c h s c h r i f t

des

Hrn Prof. Mollweide in Leipzig.

Hr. Berg-Commissions-Rath von Buffe hat gewünscht, und der würdige Herausgeber dieser Annalen mir erlaubt, dem vorstehenden Aufsatze einige Bemerkungen beizufügen. Ich benutze diese Erlaubniß nur in so fern, als ich dadurch alle weiteren Erörterungen von meiner Seite überflüssig zu machen hoffe.

Hr. Commissions-Rath von Buffe wirft meiner vor nunmehr funfzehn Jahren auf seine Aufforderung bekannt gemachten Auflösung des in Frage stehenden Problems vor, daß in ihr die Bewegung des Körpers jenseits des Mittelpunktes der Anziehung nicht als von diesem Mittelpunkte, sondern als von dem jenfeitigen Endpunkte anhebend betrachtet werde, und zwar weil ich in der Differenzial-Gleichung für diese Bewegung

$$v dv = - \frac{2gb^2 ds}{(a-s)^2}$$

$(s-a)^2$  statt  $(a-s)^2$  gesetzt habe. Allein für die Integration ist es ganz gleichgültig, ob man in der vorigen Gleichung  $(s-a)^2$  oder  $(a-s)^2$  schreibt, (die Behauptung, daß diese Vertauschung nöthig sey, lasse ich jetzt gern fallen), und Hrn von Buffes Gleichung

$$\frac{v dv}{2g} = - \left( \frac{a}{a-s} \right)^2 ds$$

ist ja keine andere als die obige,  $b$  darin  $= a$  gemacht. Ich sehe daher nicht, wie Hr. von Buffe das Integral  $\int \frac{ds}{(s-a)^2}$  die Gegengröße, wenn unter diesem Ausdruck das Entgegengesetzte einer Größe zu verstehen ist, von  $\int \frac{ds}{(a-s)^2}$  nennen kann, da jenes Inte-

gral  $= \frac{1}{s-a} + \text{Const.}$ , dieses  $\frac{1}{a-s} + \text{Const.}$  ist, welches doch wohl mit jenem, wenn die Constanten beidermal auf einerlei Art bestimmt werden, auf eins hinauskommt.

Hr. von Buffe giebt mir ferner *petitionem principii* Schuld, indem meine Auflösung schon als ausgemacht voraussetze, daß der Körper sich jenseits des Mittelpunktes fort bewegen werde bis er wieder in die anfängliche Entfernung vom Mittelpunkte  $= a$  gekommen sey. Wir wollen sehen, ob Hr. von Buffe's Auflösung von einer solchen *petitio principii*, wenn man es so nennen will, frei sey.

In seiner Rechnung für die Bewegung jenseits des Mittelpunktes bestimmt Hr. v. Buffe die Constante dadurch, daß er die Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört, womit der Körper im Mittelpunkte anlangt, aus der Formel für die diesseitige Bewegung  $= + \frac{aa}{+o} - a$ , die Höhe aber, welche der Geschwindigkeit entspricht, womit der Körper den Mittelpunkt verläßt, nach einer ihm eigenthümlichen Behauptung über die Behandlung der 0, aus der Formel für die jenseitige Bewegung  $= - \frac{aa}{-o} + \text{Const.}$  macht, und so nach, weil jene Höhe dieser gleich seyn muß,  $\text{Const.} = -a$  findet.

Allein hier behandelt Hr. v. Buffe offenbar die 0 nicht als Null, sondern als eine wirkliche GröÙe, und die Voraussetzung, wodurch die Constante bestimmt wird, ist eigentlich, daß in gleichen, wenn auch unendlich kleinen Entfernungen zu beiden Seiten des Mittelpunktes, die Geschwindigkeit des Körpers gleich

groß sey. Um sich hiervon zu überzeugen, darf man nur in II. bei Hrn v. B.  $s = a - \omega$  setzen, so wird  $\frac{vv}{4g} = \frac{aa}{\omega} - a$ . Aus III. hingegen ist,  $s = a + \omega$  gemacht,  $\frac{vv}{4g} = -\frac{aa}{-\omega} + \text{Const.}$ , also, das erste  $\frac{vv}{4g}$  dem zweiten gleich gesetzt,  $\text{Const.} = -a$ . Dieses ist eigentlich die Rechnung, welche Hr. v. Buffe geführt hat, wobei  $\omega$  jeden beliebigen Werth  $< a$  außer 0 haben kann. Denn wird  $\omega = 0$  gemacht, so folgt  $\infty = \infty + \text{Const.}$ , also  $\text{Const.} = \frac{0}{0}$ . Hr. von Buffe sagt selbst, daß er so vorsichtig gewesen sey, für die Geschwindigkeits-Höhe im Mittelpunkte neben ihrem unendlichen Gliede  $a \cdot \frac{a}{0} = a \cdot \infty$  auch ihr endliches Glied  $-a$  beizubehalten. Allein, wodurch die Beibehaltung dieses Gliedes bedingt sey, erfahren wir nicht. Vermuthlich doch wohl, um Hrn v. Buffe's eigenen Ausdruck zu gebrauchen, durch die vertrauliche Eröffnung des Küsters Klimm? Aber wie, wenn eine solche vertrauliche Eröffnung fehlt, wie bei Aufgaben der reinen Analysis? Hr. v. Buffe würde sich um das mathematische Publikum verdient gemacht haben, wenn er an ein Paar solchen Aufgaben das ihm eigenthümliche Verfahren die Integral-Constanten zu bestimmen, bewährt hätte. Vielleicht hätten wir dann nicht nöthig, zur Bestimmung der Constans bei den Integral-Logarithmen, oder  $\int \frac{dx}{\log x}$ , Umwege zu nehmen \*).

\*) Schon Vega hat übrigens in einer Wien 1800 einzeln gedruckten Abhandlung, die Constante für die jenseitige Bewegung auf dieselbe Art wie H. v. B. zu bestimmen gesucht. M.