Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.

(*Di* Carlo Rosati, *a Pisa.*)

La teoria delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica C del genere p, secondo l'indirizzo da me tenuto in vari precedenti lavori [1], e che muove da una suggestiva interpretazione geometrica delle classiche equazioni di Hurwitz, può ricevere qualche utile contributo, ove insieme ai metodi della geometria proiettiva iperspaziale si applichino alcune importanti teorie aritmetiche, come quella dei numeri e dei corpi algebrici. Il riavvicinamento delle teorie medesime è reso possibile dall'introduzione della nozione di equazione minima di una corrispondenza e dall'estensione del concetto di valenza. E l'importanza delle due nozioni risulta manifesta, quando si pensi che l'equazione minima esprime il modo come una corrispondenza dipende dalle sue potenze e che le valenze della corrispondenza sono interi algebrici che, soddisfacendo a meno del segno alla detta equazione minima, sono invarianti sia rispetto alle trasformazioni birazionali della curva, sia rispetto al gruppo delle retrosezioni sulla relativa riemanniana.

Nel presente lavoro trovasi appunto, insieme ad altri risultati, l'applicazione alla teoria delle corrispondenze di uno dei più profondi teoremi della teoria dei corpi algebrici: il teorema di Dirichlet sulle unità.

[1] C. Rosati, a) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura e applicata, serie 3ª, vol. XXV (1915)]; b) *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1915-1916)]; c) *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIII (1917)]; d) *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche* [Annali di Matematica pura e applicata, serie 3ª, vol. XXVIII (1918)].

Prima però di procedere alla detta applicazione, ho creduto utile di precisare ed approfondire alcune proprietà delle valenze.

È noto che due corrispondenze T e T^{-1}, l'una inversa dell'altra, hanno le valenze immaginarie coniugate e che una valenza di T e l'immaginaria coniugata di T^{-1}, pur avendo la stessa dimensione, sono in generale associate a sistemi distinti d'integrali di 1ª specie; ed è pur noto che le valenze delle corrispondenze simmetriche sono reali e quelle delle corrispondenze emisimmetriche sono immaginarie pure.

Nel § 1 sono caratterizzate le corrispondenze simmetriche le cui valenze hanno tutte il medesimo segno, e vien dedotta da ciò una nuova dimostrazione del classico criterio di Castelnuovo per la equivalenza dei gruppi di punti di una serie algebrica.

Alla questione di decidere quando le valenze di una corrispondenza T e le immaginarie coniugate di T^{-1} sono associate agli stessi sistemi d'integrali di 1ª specie, si risponde nel § 3; ciò avviene quando e solo quando T e T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra.

Alla famiglia delle corrispondenze che sono funzioni razionali delle loro inverse appartengono, oltre che le simmetriche e le emisimmetriche, le corrispondenze *Hermitiane*, cioè quelle di cui le corrispondenze laterali sono dotate di ordinaria valenza. Nel § 4, dopo aver provato chè una corrispondenza Hermitiana del 1° ordine è equivalente o residua di una corrispondenza biunivoca, si dà una semplice dimostrazione aritmetica del noto teorema secondo cui una curva di genere $p > 1$ non può ammettere che un numero finito di corrispondenze biunivoche, e vengono infine esposte alcune proprietà delle involuzioni cicliche.

Segue l'applicazione, di cui sopra si è fatto cenno, della teoria dei corpi algebrici.

Data sulla curva C una corrispondenza singolare T, si consideri l'insieme delle corrispondenze che sono funzioni razionali di T, cioè delle corrispondenze S tali che si abbia $lS \equiv f(T)$, dove l è un intero ed f indica un polinomio a coefficienti interi. Al variare di S nel detto insieme, una valenza di S varia nel corpo algebrico definito da una valenza di T, ma non assume in generale per valori tutti gli interi (algebrici) di quel corpo, bensì descrive un insieme o che soddisfa alle condizioni di un *ordine*. Per tal ragione all'insieme delle corrispondenze S si dà pure il nome di *ordine* e si indica con $o(T)$; *grado* dell'ordine si chiama il grado dell'equazione minima di T, e l'ordine si dice *riducibile* o *irriducibile* secondochè è riducibile o irriducibile la detta equazione minima (nel campo assoluto di razionalità).

Il § 5 è dedicato a stabilire varie proprietà degli ordini. Si dimostra ivi che le corrispondenze comuni a due ordini costituiscono pure un ordine, si trovano le condizioni perchè un ordine coincida col suo inverso e si studiano in particolare gli ordini irriducibili coincidenti coi loro inversi.

Ciò premesso, si applicano (§ 6) le cose precedenti alla varietà di Jacobi. Sia dato sulla curva C un ordine irriducibile $o(T)$ ed o sia l'ordine di numeri ad esso corrispondente. Poichè ad ogni corrispondenza di C si può associare una trasformazione unirazionale della relativa varietà di Jacobi V_p, ogni numero di o individua, a meno di trasformazioni ordinarie di 1.ª specie, una tale trasformazione unirazionale; e questa risulta poi birazionale quando il detto numero è una *unità* dell'ordine o. Invocando allora il teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici, il quale vale, com'è noto, anche per gli ordini contenuti in detti corpi, si deduce che l'esistenza sulla curva C di una corrispondenza singolare T porta all'esistenza su V_p di un gruppo G, in generale infinito discontinuo, di trasformazioni birazionali due a due permutabili. La struttura di questo gruppo, cioè il numero delle trasformazioni generatrici costituenti un sistema fondamentale, dipende dal numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici immaginarie coniugate dell'equazione minima di T. Un altro gruppo G', avente la medesima struttura di G, nasce dalla considerazione della corrispondenza inversa T^{-1}; e i due gruppi $G\,G'$, quando T e T^{-1} non sono funzioni razionali l'una dell'altra, sono in generale distinti. Alle unità ridotte dell'ordine o corrispondono trasformazioni cicliche del gruppo G; quando gli ordini $o(T)$, $o(T^{-1})$ coincidono, e quindi coincidono i due gruppi $G\,G'$, le dette trasformazioni cicliche risultano Hermitiane, e quindi sono associate a corrispondenze biunivoche della curva C. In tal caso la curva C possiede una involuzione ciclica, generata da una corrispondenza biunivoca funzione razionale di T.

Segue infine un'applicazione dei concetti suesposti alle curve C di genere 2 *semplicemente singolari*, cioè tali che su di esse il numero base delle corrispondenze simmetriche è $\mu_1 = 2$. Le corrispondenze esistenti su queste curve costituiscono un ordine rispettivamente del 2°, 3°, 4° grado, secondo che il numero base delle corrispondenze emisimmetriche è $\mu_2 = 0, 1, 2$. Nel 2° caso l'ordine è certo riducibile, nel 1° e nel 3°, supposta la curva priva d'integrali ellittici, il detto ordine risulta irriducibile. In questa ipotesi, la superficie di Jacobi F relativa a C contiene infiniti sistemi Σ di dimensione, grado, indice e genere due, composti di curve irriducibili prive di punti multipli. Ora possono presentarsi i due casi seguenti: o può avvenire che i sistemi Σ siano tutti di curve birazionalmente identiche, ovvero i sistemi stessi si ripartiscono in due serie distinte di curve birazionalmente identiche, di guisa che F risulta superficie di JACOBI di due curve birazionalmente distinte. Le condizioni aritmetiche per il verificarsi dell'uno o dell'altro di questi casi furono già stabilite per via diversa da COMESSATTI e da me nell'ipotesi $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 0$ (2). Qui appunto si completa quel risultato, prendendo in esame il caso $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 2$.

§ 1. SULLE VALENZE DELLE CORRISPONDENZE SIMMETRICHE.

1. È noto (3) che una corrispondenza simmetrica T (cioè equivalente alla sua inversa T^{-1}) sopra una curva C di genere p ha le valenze semplici e reali. Vogliamo ora stabilire una ulteriore proprietà di queste valenze, la quale ci condurrà a una nuova dimostrazione dell'importante criterio di CASTELNUOVO sulla equivalenza dei gruppi di punti di una serie algebrica.

Ricorriamo perciò alla rappresentazione geometrica che abbiamo tante volte utilizzato nelle nostre ricerche. Si consideri cioè entro uno spazio S_{2p-1}, in cui sia fissato un sistema di coordinate proiettivite omogenee, l'S_{p-1} immaginario, che indicheremo con α, sostegno della stella d'iperpiani aventi per coordinate i periodi degli integrali di 1ª specie di C. Lo spazio α ed il suo immaginario coniugato α_0 si diranno gli *spazi dei periodi* della curva C e per brevità diremo *incidente* ad $\alpha\,\alpha_0$ uno spazio reale R_{2l-1}, quando congiunge un S_{l-1} di α col suo immaginario coniugato S^0_{l-1} contenuto in α_0.

Si indichi ora con Σ il sistema lineare ∞^{p^2-1} dei sistemi nulli di S_{2p-1} aventi $\alpha\,\alpha_0$ per spazi autoconiugati, e consideriamo in esso solamente i sistemi nulli reali.

Un sistema nullo reale di Σ, che non sia degenere, si dirà *principale*, quando il relativo complesso lineare non contiene alcuna retta reale incidente ad $\alpha\,\alpha_0$; ed un sistema nullo reale di Σ degenere di specie l, e quindi dotato di un R_{2l-1} singolare incidente ad $\alpha\,\alpha_0$, si dirà *semi-principale*, se il relativo

(2) A. COMESSATTI, *Sulle superficie di* JACOBI *semplicemente singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3ª, tomo XXI (1919)].

C. ROSATI, *Intorno alle corrispondenze simmetriche singolari sopra una curva di genere 2* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLIV (1920)].

(3) C. ROSATI, loc. cit. (1) c).

complesso lineare non contiene alcuna retta reale incidente ad $\alpha\,\alpha_0$, all'infuori di quelle contenute in R_{2l-1}. Si vede allora subito che un sistema nullo reale di Σ degenere di specie $p-1$ è senz'altro semiprincipale. Infatti il complesso lineare ad esso relativo è costituito da tutte e sole le rette appoggiate al suo spazio singolare R_{2p-3}, e una retta reale incidente ad $\alpha\,\alpha_0$ ed avente con R_{2p-3} un punto comune è contenuta in questo spazio [4].

Ciò premesso, riferiamo proiettivamente e in modo reale gli elementi di Σ ai punti di uno spazio lineare Σ' a p^2-1 dimensioni; nasce allora in Σ' una ipersuperficie F di ordine p, immagine della totalità dei sistemi nulli degeneri di Σ. Questa ipersuperficie è stata studiata da SCORZA [5], che ne ha messo in luce le importanti proprietà topologiche. Occorre qui, per ragioni

---

(4) È facile stabilire la condizione analitica equivalente alla suddetta condizione geometrica.

Si indichi perciò con

$$\Sigma\, m_{ik}\, x_i\, y_k \tag{1}$$

la forma bilineare alternata il cui annullarsi definisce un sistema nullo reale S di Σ, e si immagini che in (1) le x, y rappresentino le parti reali e i coefficienti dell'unità immaginaria di un punto P dello spazio α. Si può allora provare che, al variare di P entro α, se Σ è principale, la (1) conserva sempre segno costante; e se Σ è semiprincipale la (1), quando non è nulla, conserva segno costante.

Infatti se $x_r = x'_r + i\,x''_r$ sono le coordinate di P, le $p_{rs} = x'_r\,x''_s - x''_r\,x'_s$ sono le coordinate Grassmanniane della retta che congiunge il punto P col suo immaginario coniugato P_0, e si avrà

$$\Sigma\, m_{ik}\, x'_i\, x''_k = \Sigma\, m_{ik}\, p_{ik}. \tag{2}$$

Si vede subito allora che, variando P entro α, quando S è principale, la (2), non annullandosi mai, conserva sempre il medesimo segno. Supposto S semi-principale, si indichi con R_{2q-1} lo spazio singolare di S, congiungente un S_{q-1} di α col suo immaginario coniugato S^0_{q-1} di α_0. È chiaro che la (2) si annulla quando e soltanto quando P cade in S_{q-1}. Si considerino ora due punti P, Q di α, di coordinate $x_r = x'_r + i\,x''_r$, $y_r = y'_r + i\,y''_r$, esterni a S_{q-1} e siano $P_0\,Q_0$ i loro immaginari coniugati situati in α_0. Le due rette sghembe $P\,Q$, $P_0\,Q_0$, immaginarie coniugate, sono assi di una congruenza lineare contenente una ∞^2 reale di generatrici reali, della quale al più una giace in R_{2q-1} (e ciò quando la retta $P\,Q$ abbia con S_{q-1} un punto comune). Sarà dunque possibile variare con continuità una generatrice reale di detta congruenza dalla posizione iniziale $P\,P_0$ alla finale $Q\,Q_0$ senza passare per la eventuale generatrice contenuta in R_{2q-1}. La (2) passerà dunque con continuità dal valore $\Sigma\, m_{ik}\, x'_i\, x''_k$ al valore $\Sigma\, m_{ik}\, y'_i\, y''_k$ senza mai annullarsi, e perciò questi valori avranno ugual segno.

(5) G. SCORZA, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3ª, tomo XIX (1916)].

di chiarezza e per l'applicazione che dovremo farne, richiamare alcune di quelle proprietà.

Ricordiamo perciò che i punti reali di F si distribuiscono in due falde $F^{(1)}$, $F^{(2)}$: i punti della 1ª falda $F^{(1)}$ sono immagini dei sistemi nulli degeneri semi-principali, quelli di $F^{(2)}$ dei rimanenti sistemi nulli reali degeneri. Le due falde hanno comuni i punti reali della varietà di Segre (di 2ª specie e di indici uguali a $p-1$) immagine della totalità dei sistemi nulli di Σ degeneri di specie $p-1$; e la falda $F^{(1)}$ divide lo spazio reale Σ' in due regioni I ed E, la regione I rappresentando l'insieme dei sistemi nulli principali, e la regione E (a cui appartiene la falda $F^{(2)}$) l'insieme dei rimanenti sistemi nulli reali. Inoltre una retta reale contenente un punto di I ha in comune con $F^{(1)}$ due punti e soltanto due punti, e questi la dividono in due segmenti, dei quali uno (tolti gli estremi) è contenuto in I, e l'altro (tolti gli estremi) è contenuto in E. Si ha dunque la proprietà:

Se in un fascio di sistemi nulli reali trasformanti in sè $\infty\,\alpha_0$ esiste un sistema nullo principale, al fascio appartengono due e due soli sistemi nulli semi-principali, i quali dividono il fascio stesso in due tratti, uno dei quali è costituito da tutti e soli i sistemi nulli principali del fascio.

2. Sia ora T una corrispondenza simmetrica della curva C. Se Ω indica l'omografia immagine di T, si avrà, com'è noto ([6]), $\Omega = S\,A$, essendo A il sistema nullo fondamentale, ed S un sistema nullo riemanniano di C, cioè un sistema nullo razionale trasformante in sè gli spazi $\infty\,\alpha_0$ dei periodi. Rappresentando con I l'omografia identica, le valenze di T sono date dai valori di k (tutti reali) per cui l'omografia $\Omega + k\,I$ risulta singolare; e poichè si ha $\Omega + k\,I = (S + k\,A)\,A$, le stesse valenze saranno i valori di k corrispondenti a sistemi nulli degeneri del fascio $S + k\,A$. Ma il sistema nullo A del fascio (dato dal valore $k = \infty$) è principale ([7]); esistono dunque nel fascio stesso due sistemi nulli degeneri distinti $S + \gamma_1\,A$, $S + \gamma_2\,A$ $(\gamma_1 < \gamma_2)$ semiprincipali, e i sistemi nulli dati dai valori di k *esterni* all'intervallo $(\gamma_1 \ldots \gamma_2)$ saranno tutti e soli i sistemi nulli principali del fascio. I rimanenti eventuali sistemi nulli degeneri corrispondono dunque a valori interni all'intervallo stesso e non saranno semi-principali; donde segue che γ_1 e γ_2 sono le due valenze minima e massima di T. Se ora si osserva che il sistema nullo S è principale o semi-principale quando e soltanto quando il valore $k = 0$ è esterno all'intervallo $(\gamma_1 \ldots \gamma_2)$ o coincide con un suo estremo, si ottiene:

([6]) C. Rosati, loc. cit. ([1]) *a*), n.° 6.

([7]) C. Rosati, loc. cit. ([1]) *a*), n.° 8, nota a piè di pagina.

Le valenze (reali) di una corrispondenza simmetrica T sono (all'infuori di una eventuale valenza nulla) tutte dello stesso segno, quando e soltanto quando il sistema nullo S, immagine di T, è principale o semi-principale.

3. Sia data su C una serie algebrica γ_n^1 di indice ν e genere ϖ e si indichi con Γ una curva birazionalmente identica alla serie stessa. Fra C e Γ intercede allora una corrispondenza (n, ν), e se T, T^{-1} indicano le operazioni, l'una inversa dell'altra, che conducono da un punto di Γ agli n punti omologhi di C, e da un punto di C ai ν punti omologhi di Γ, è noto [8] che le corrispondenze $T^{-1}T$ della curva C e TT^{-1} della curva Γ posseggono, all'infuori di una eventuale valenza nulla, le stesse valenze reali $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_l$; e ciascuna di esse ha per le due corrispondenze la medesima dimensione. Se $q_1 q_2 \dots q_l$ sono queste dimensioni e si pone $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_l$, sarà $2q$ la caratteristica delle due matrici di T e di T^{-1}, onde si avrà $q \leqq p$, $q \leqq \varpi$. Supposto, per maggiore generalità, $q < p$, $q < \varpi$ e indicando con $\alpha\, \alpha_0$ gli spazi dei periodi di C, con $\tau\, \tau_0$ quelli di Γ, nell'S_{2p-1} relativo a C si avranno due spazi razionali indipendenti $R_{2(p-q)-1}$, R_{2q-1} incidenti ad $\alpha\, \alpha_0$, e nell'$S_{2\varpi-1}$ relativo a Γ due spazi razionali pure indipendenti $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}\, \overline{R}_{2q-1}$ incidenti a $\tau\, \tau_0$. I primi sono polari l'uno dell'altro rispetto al sistema nullo fondamentale A di C, gli altri sono polari rispetto al sistema nullo fondamentale A' di Γ. La relazione che la T induce fra i cicli di Γ e quelli di C si traduce in una omografia razionale ω che trasforma $\overline{R}_{2q-1}$ in R_{2q-1}, e nella quale si corrispondono i due spazi in cui i suddetti si appoggiano ai rispettivi spazi dei periodi; ed una analoga omografia ω', traducente la relazione che la T^{-1} induce fra i cicli di C e quelli di Γ, sussiste fra R_{2q-1} ed $\overline{R}_{2q-1}$. Indicando poi con $\lambda\, \lambda'$ i sistemi nulli sezioni di $A\, A'$ coi due spazi $R_{2q-1}\, \overline{R}_{2q-1}$, le corrispondenze simmetriche $T^{-1}T$, TT^{-1} hanno per immagine i sistemi nulli degeneri S, S' ottenuti proiettando rispettivamente da $R_{2(p-q)-1}$ il sistema nullo $\sigma = \omega' \lambda' \omega'^{-1}$ e da $R_{2(\varpi-q)-1}$ il sistema nullo $\sigma' = \omega \lambda \omega^{-1}$. Poichè i complessi lineari relativi a $\lambda' \lambda$ non posseggono rette reali incidenti agli spazi dei periodi, altrettanto avverrà per quelli relativi ai sistemi nulli $\sigma\sigma'$ trasformati dei primi mediante le omografie razionali $\omega'^{-1}\, \omega^{-1}$, e quindi i sistemi nulli S, S' sono semi-principali. Segue di qui, in forza della proprietà sopra dimostrata, che *le valenze $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_l$ hanno tutte il medesimo segno.*

---

[8] Per questa e per le altre affermazioni di questo n.º tengasi presente: C. ROSATI, loc. cit. [1] *d*).

Per vedere quale sia questo segno, si osservi che se h_{ik}, g_{ik}, H_{ik}, G_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, p$; $k = 1, 2, \ldots, \varpi$) sono gli interi caratteristici della corrispondenza data (n, ν), una corrispondenza, certo esistente, che sia equivalente ad essa, cioè possegga gli stessi interi caratteristici, ed in cui il 1.° indice sia p, ha come 2° indice il numero $\sum (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik})$ (9); dovrà dunque essere

$$\sum (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}) > 0.$$

E poichè fra le valenze $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_l$ e i suddetti interi caratteristici sussiste la relazione

$$-(\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 + \cdots + \rho_l q_l) = \sum (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}),$$

si conclude che $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_l$ sono negative. Dunque:

Le valenze che le corrispondenze $T^{-1} T$, $T T^{-1}$ posseggono, all'infuori della eventuale valenza nulla, sono tutte negative.

Indicando con H la corrispondenza simmetrica indotta su C dalla serie γ_n^1, dalla proprietà ora dimostrata e dalla relazione

$$T^{-1} T = \nu I + H$$

si trae che: *Le valenze della corrispondenza simmetrica indotta da una serie algebrica γ_n^1 sono tutte minori o uguali all'indice della serie.*

---

(9) Infatti, se la corrispondenza (p, z) è rappresentata mediante gl'integrali normali di 1ª specie u_i, v_k delle curve C, Γ mediante le formule di Hurwitz

$$u_k(y') + \ldots + u_k(y^p) = \sum_i^{1\ldots\varpi} \pi_{ki} v_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

essa può essere definita anche dall'equazione

$$\vartheta \left[u_k(y) - \sum_i^{1\ldots\varpi} \pi_{ki} v_i(x) - c_k \right] = 0,$$

dove il simbolo ϑ indica la funzione ϑ del 1° ordine a caratteristiche nulle costruita coi periodi degli integrali u_i. Ed allora il numero z dei punti x di Γ corrispondenti a un fissato punto y di C è dato da

$$z = \frac{1}{2 \pi i} \int d \log \vartheta \left| u_k(y) - \sum_i^{1\ldots\varpi} \pi_{ki} v_i (v_i(x) - c_k \right|,$$

l'integrale essendo esteso al contorno della superficie di Riemann Γ resa semplicemente connessa mediante i tagli alle retrosezioni. Eseguendo l'integrale, si ottiene facilmente

$$z = \sum (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}).$$

Se ora d indica il numero dei punti doppi della serie γ_n^1, si ha, com'è noto, la relazione

$$d = 2\nu(n + p - 1) + 2(\rho_1 q_1 + \cdots + \rho_l q_l).$$

Da questa, in forza della proprietà precedente, consegue

$$d \leq 2\nu(n + p - 1),$$

e l'uguaglianza si avrà nel solo caso $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_l = 0$, cioè quando $T^{-1}T$ è una corrispondenza a valenza zero. Ciò significa che l'insieme dei ν gruppi di γ_n^1 uscenti da un punto x di C, si muove, al variare di x, in una serie lineare; ed allora, per un teorema di SEVERI, di cui fu data una dimostrazione basata sulla teoria delle corrispondenze [10], la γ_n^1 è costituita da gruppi equivalenti. Abbiamo così ritrovato il criterio di CASTELNUOVO.

OSSERVAZIONE. L'equazione di grado p

$$z^{p-q}(z - \rho_1)^{q_1}(z - \rho_2)^{q_2} \cdots (z - \rho_l)^{q_l} = 0$$

che può dirsi l'*equazione delle valenze* della corrispondenza $T^{-1}T$ ha dunque i primi q coefficienti tutti positivi e i rimanenti nulli. Tali coefficienti, come ha mostrato recentemente CASTELNUOVO [11], sono poi degli interi che hanno un significato geometrico importante: essi sono cioè i caratteri introdotti da COMESSATTI per la serie γ_n^1. Poichè l'equazione delle valenze della TT^{-1} è

$$z^{\varpi-q}(z - \rho_1)^{q_1}(z - \rho_2)^{q_2} \cdots (z - \rho_l)^{q_l} = 0$$

si conclude che *le serie $\gamma_n^1\,\gamma_\nu^1$ indotte dalla corrispondenza* (n, ν) *sulle curve C e Γ hanno i medesimi caratteri di* COMESSATTI.

---

(10) ROSATI, loc. cit. (1) d), n.° 5.

(11) G. CASTELNUOVO, *Sulle funzioni abeliane*, Nota IV: *Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXX, serie 5ª, (1921)].

§ 2. Alcune proprietà delle omografie di uno spazio S_r.

4. Occorre ora premettere alcune osservazioni sulle omografie di uno spazio S_r, che avranno nel seguito frequente applicazione.

Teorema I. *Se un punto P è comune a due spazi fondamentali delle omografie A, B di S_r, i quali corrispondono alle radici ρ e θ delle rispettive equazioni caratteristiche, appartiene pure ad uno spazio fondamentale dell'omografia prodotto AB, dato dalla radice $\rho\theta$ della sua equazione caratteristica* [12].

Nel caso in cui alcuno dei numeri ρ, θ è nullo, la dimostrazione della proprietà è immediata. Invero se è $\rho = 0$, il punto P, essendo singolare per A, deve essere singolare per il prodotto di A per una omografia qualsiasi, e quindi anche per AB; se è poi $\rho \neq 0$, $\theta = 0$, il punto P, unito per A e singolare per B, dovrà essere singolare per AB.

Supponiamo ora ρ e θ entrambi diversi da zero e si indichi con I la sostituzione identica. Il punto P, essendo singolare per l'omografia $A - \rho I$, sarà singolare anche per

$$\Omega = (A - \rho I)(B + \theta I) = AB - \rho B + \theta A - \rho\theta I;$$

e poichè P è unito per l'omografia $A + \rho I$ e singolare per $B - \theta I$, sarà singolare per

$$\Omega_1 = (A + \rho I)(B - \theta I) = AB + \rho B - \theta A - \rho\theta I.$$

Ma allora P è singolare anche per

$$\Omega + \Omega_1 = 2(AB - \rho\theta I),$$

cioè appartiene ad uno spazio fondamentale di AB, corrispondente alla radice $\rho\theta$ dell'equazione caratteristica.

Il teorema si estende poi immediatamente al prodotto di un qualsivoglia numero di omografie.

---

(12) Per la precisione di questo e degli enunciati che seguono, occorre avvertire che delle omografie che si considerano si intendono fissati i rispettivi moduli. Inoltre con la denominazione di *spazio fondamentale* di un'omografia intendiamo significare non solo uno spazio di punti uniti, ma anche uno spazio di punti singolari, corrispondente cioè alla radice zero dell'equazione caratteristica.

5. TEOREMA II. *Se un punto P è contenuto in uno spazio fondamentale di un'omografia A, corrispondente alla radice θ dell'equazione caratteristica, appartiene pure ad uno spazio fondamentale dell'omografia $f(A)$, funzione razionale intera di A, corrispondente alla radice $f(\theta)$ della sua equazione caratteristica.*

Ammesso infatti che sia

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = a_0 (z - s_1)(z - s_2) \cdots (z - s_m),$$

si dovrà avere

$$f(A) = a_0 I (A - s_1 I)(A - s_2 I) \cdots (A - s_m I).$$

Allora, poichè per l'omografia identica $a_0 I$ il punto P è unito e corrisponde alla radice a_0 dell'equazione caratteristica, e per l'omografia $A - s_i I$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ è un punto di uno spazio fondamentale corrispondente alla radice $\theta - s_i$, in forza del Teor. I dovrà appartenere ad uno spazio fondamentale di $f(A)$, corrispondente alla radice $a_0(\theta - s_1)(\theta - s_2) \cdots (\theta - s_m) = f(\theta)$ della sua equazione caratteristica.

OSSERVAZIONE I. Ragionando sulle omografie inverse operanti sugli iperpiani, le cui sostituzioni sono le trasposte di quelle delle omografie considerate, si giunge alle proprietà correlative riguardanti iperpiani appartenenti a stelle fondamentali.

OSSERVAZIONE II. Dal Teor. II si deduce che ogni spazio fondamentale di A o coincide o è contenuto in uno spazio fondamentale di $f(A)$. Se dunque A è un'omografia generale, se cioè i suoi spazi fondamentali appartengono ad S_r, anche $B = f(A)$ sarà generale, ed ogni suo spazio fondamentale o coincide con uno di A, o congiunge più spazi fondamentali di A. Si ha ora inversamente:

TEOREMA III. *Se ogni spazio fondamentale di un'omografia generale A o coincide o è contenuto in uno di B, l'omografia B è funzione razionale di A.*

Infatti, essendo k il numero degli spazi fondamentali di A, l'equazione minima [13] di A, avendo per radici semplici tutte e sole quelle della sua equazione caratteristica, sarà di grado k, e perciò le omografie $I, A, A^2, \ldots A^{k-1}$ sono linearmente indipendenti mentre le potenze successive $A^k, A^{k+1}, \ldots$ di-

[13] C. ROSATI, loc. cit. [1] *b*).

pendono linearmente da quelle. Ne segue che le omografie funzioni razionali di A costituiscono un sistema lineare ∞^{k-1}.

D'altra parte, scrivendo il modulo di A sotto forma canonica e facendo variare con continuità i k parametri in esso contenuti, si ottengono i moduli delle omografie i cui spazi fondamentali coincidono o contengono quelli di A. E dunque quest'ultime omografie costituiscono pure un sistema lineare ∞^{k-1}.

Poichè, in virtù della precedente osservazione, ogni omografia del primo sistema lineare è contenuta in questo, si deduce che i due sistemi coincidono e perciò B è funzione razionale di A.

Corollario. *Due omografie generali A, B con gli stessi spazi fondamentali sono funzioni razionali l'una dell'altra.*

§ 3. Le corrispondenze funzioni razionali delle loro inverse.

6. Si considerino sulla curva C due corrispondenze T, T^{-1}, l'una inversa dell'altra, ed ammettiamo che T^{-1} sia funzione razionale di T; sussista cioè la relazione

$$l\,T^{-1} \equiv f(T), \tag{1}$$

in cui l è un intero positivo ed f indica un polinomio a coefficienti interi. Se n è il grado dell'equazione minima di T, il grado di f può ridursi $\leq n-1$; allora se, come è lecito supporre, nessun divisore di l divide tutti i coefficienti del polinomio f, l'intero l e i coefficienti stessi saranno dalla T individuati. Invero, se oltre alla (1) si avesse anche

$$l'\,T^{-1} \equiv f_1(T),$$

dovrà essere

$$l' f(T) - l f_1(T) \equiv 0.$$

E indicando con a_i a'_i i coefficienti in $f\,f_1$ della stessa potenza di T, si avrebbe $l' a_i = l a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; da cui dividendo per il M. C. D. δ di $l\,l'$ $(l = \delta\lambda,\ l' = \delta\lambda')$, si ottiene $\lambda' a_i = \lambda a'_i$. Il numero λ' (divisore di l') deve quindi dividere tutti i coefficienti a'_i, e λ (divisore di l) tutti i coefficienti a_i; ne segue dunque $\lambda = \lambda' = 1$, cioè $l = l'$ e $a_i = a'_i$.

È poi chiaro che, insieme alla (1) si ha pure l'altra relazione

$$l\,T = f(T^{-1}),$$

cioè il legame che abbiamo supposto sussistere fra T e T^{-1} è simmetrico.

Siano ora Ω, Ω' le omografie dello spazio S_{2p-1} immagini di T e di T^{-1};

poichè si ha

$$\Omega' = \frac{1}{l} f(\Omega) \qquad \Omega = \frac{1}{l} f(\Omega'),$$

Ω e Ω' dovranno possedere gli stessi spazi e le stesse stelle fondamentali (n° 5, Teor. II). Indichiamo con S_{q-1} Σ_{q-1} uno spazio fondamentale e la stella coniugata comuni ad Ω Ω', e siano θ ρ le radici corrispondenti delle rispettive equazioni caratteristiche.

Le omografie $\Omega + \Omega'$, $\Omega - \Omega'$ sono funzioni razionali di Ω; dunque S_{q-1} Σ_{q-1} coincideranno o saranno contenuti in spazi e stelle fondamentali di quest'ultime, associati alle radici $\theta + \rho$, $\theta - \rho$ delle rispettive equazioni caratteristiche. Ma le radici dell'equazione caratteristica di $\Omega + \Omega'$, immagine della corrispondenza simmetrica $T + T^{-1}$, sono tutte reali, e quelle dell'equazione caratteristica di $\Omega - \Omega'$, immagine della corrispondenza emisimmetrica $T - T^{-1}$ sono, all'infuori di una eventuale radice nulla, immaginarie pure [14]. Segue di qui $\rho = \theta_0$, essendo θ_0 il numero immaginario coniugato di θ. Le radici delle equazioni caratteristiche di Ω, Ω', associate allo stesso spazio e alla stessa stella fondamentali, sono dunque immaginarie coniugate.

D'altra parte, indicando A il sistema nullo fondamentale della curva C, ed Ω^{-1} l'omografia, inversa di Ω, operante sugli iperpiani, fra Ω Ω' sussiste, com'è noto [15], la relazione

$$\Omega' = A\, \Omega^{-1} A; \tag{2}$$

e questa dice che gli spazi e le stelle fondamentali di Ω vengono da A trasformati nelle stelle e negli spazi fondamentali di Ω', essendo corrispondenti in A uno spazio (o una stella) di Ω e una stella (o uno spazio) di Ω' associati alla medesima radice delle rispettive equazioni caratteristiche. Denotando allora con S^0_{q-1} Σ^0_{q-1} lo spazio e la stella fondamentali di Ω associati alla radice θ_0 (i quali coincideranno con S_{q-1} Σ_{q-1} quando θ è reale), da questa e dalla precedente osservazione si deduce che il sistema nullo A trasforma S^0_{q-1} Σ^0_{q-1} rispettivamente in Σ_{q-1} S_{q-1}.

La proprietà ora dimostrata, ove si introduca il *coniugio* K di S_{2p-1}, può enunciarsi semplicemente così:

Se una corrispondenza T è funzione razionale della sua inversa, l'omografia Ω immagine di T gode delle proprietà che ogni suo spazio fondamen-

---

(14) C. Rosati, loc. cit. (1) *b*).

(15) C. Rosati, loc. cit. (1) *a*), n.° 7.

tale è trasformato nella stella coniugata dall'antireciprocità KA, prodotto del coniugio per il sistema nullo fondamentale.

7. Il precedente risultato può facilmente invertirsi. Supponiamo infatti che nell'omografia Ω immagine di una corrispondenza T ogni spazio fondamentale venga trasformato nella stella coniugata dall'antireciprocità KA. Essendo Ω reale, K muterà ogni spazio o stella fondamentali di Ω in uno spazio e in una stella pure fondamentali; dunque A trasformerà ogni spazio o stella fondamentali di Ω in una stella e in uno spazio pure fondamentali; da ciò, tenendo presente la (2), si deduce che Ω, Ω' hanno comuni gli spazi e le stelle fondamentali. Ed allora, in virtù dell'osservazione in fine al n° 5 si potrà concludere che Ω, Ω' e quindi T, T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra, quando si provi che Ω è un'omografia generale, che cioè ogni suo spazio fondamentale è indipendente dal sostegno della stella coniugata. Ora è facile giustificare quest'ultima affermazione.

Invero, siano S_{q-1} Σ_{q-1} lo spazio e la stella fondamentali di Ω associati alla radice θ. Supposto θ reale, q dovrà essere pari ($q = 2q'$), e tanto S_{q-1} come il sostegno di Σ_{q-1} saranno due spazi reali $R_{2q'-1}$, $R_{2(p-q')-1}$ incidenti ad $\alpha\ \alpha_0$; e poichè $R_{2q'-1}$, $R_{2(p-q')-1}$ sono, per l'ipotesi fatta, polari l'uno dell'altro rispetto a A, dovranno essere indipendenti ([16]). Se poi θ è complesso, si considerino, insieme ad S_{q-1} Σ_{q-1}, lo spazio e la stella fondamentali $S^0{}_{q-1}$, $\Sigma^0{}_{q-1}$, immaginari coniugati dei precedenti, associati alla radice θ_0.

Se lo spazio S_{q-1} avesse comune col sostegno S_{2p-1-q} della stella coniugata un S_{l-1} ($l > 0$), lo spazio S^0_{q-1} avrebbe comune un S^0_{l-1} col sostegno S^0_{2p-1-q} della stella coniugata. Ed allora, tenuto conto che S_{2p-1-q} contiene S^0_{q-1} ed S^0_{2p-1-q} contiene S_{q-1}, lo spazio reale R_{2q-1}, congiungente S_{q-1} S^0_{q-1}, e lo spazio reale $R_{2(p-q)-1}$, intersezione di S_{2p-1-q} S^0_{2p-1-q}, avrebbero comune lo spazio reale R_{2l-1} che congiunge S_{l-1} con S^0_{l-1}; e ciò è assurdo, perchè, come è subito visto, R_{2q-1} $R_{2(p-q)-1}$ sono incidenti ad $\alpha\ \alpha_0$ e polari l'uno dell'altro rispetto a A. Abbiamo dunque:

Se nell'omografia Ω immagine di una corrispondenza T ogni spazio fondamentale è trasformato nella stella coniugata dall'antireciprocità KA, Ω è un'omografia generale e la corrispondenza T è funzione razionale della sua inversa.

([16]) C. Rosati, loc. cit. ([7]).

8. I risultati precedenti assumono forma più espressiva, quando si prendano in considerazione le valenze della corrispondenza.

È noto che due corrispondenze T, T^{-1} l'una inversa dell'altra hanno valenze immaginarie coniugate, e che una valenza di T e la immaginaria coniugata di T^{-1}, pur avendo la stessa dimensione, sono in generale associate a sistemi distinti d'integrali di 1ª specie. Orbene, si può ora dimostrare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T sia funzione razionale della sua inversa T^{-1}, è che ciascuna valenza di T e la immaginaria coniugata di T^{-1} siano associate allo stesso sistema d'integrali di 1ª specie.

Ma per procedere con chiarezza, sarà bene anzitutto richiamare alcune proprietà riguardanti la nozione di valenza.

Ricordiamo perciò che le valenze di T, cambiate di segno, sono le radici dell'equazione caratteristica di Ω, cui corrispondono spazi fondamentali o contenuti o appoggiati ad α_0: precisamente se S_{q-1} Σ_{q-1} sono lo spazio e la stella fondamentali associati alla radice θ, ed S_{q-1} ha comune con α_0 un S_{l-1} $(l > 0)$ e quindi Σ_{q-1} ha comune con la stella (α) una stella Σ_{l-1}, il numero $-\theta$ è una valenza di T di dimensione l, e Σ_{l-1} è l'immagine del sistema d'integrali ad essa associato. Sappiamo inoltre che trasformando S_{l-1} mediante l'antireciprocità KA, si ottiene una stella Σ'_{l-1}, contenuta nella stella (α), la quale è immagine del sistema d'integrali associato alla valenza $-\theta_0$ di T^{-1} [17].

Ciò premesso, la necessità della condizione espressa nel precedente enunciato risulta immediata, perchè se T è funzione razionale di T^{-1}, nelle omografie Ω, Ω' immagini di T e di T^{-1} coincidono gli spazi e le stelle fondamentali associati a radici immaginarie coniugate delle rispettive equazioni caratteristiche.

Per dimostrare la sufficienza della condizione medesima, basterà far vedere che, supposta soddisfatta, nell'omografia Ω immagine di T ogni spazio fondamentale vien mutato dall'antireciprocità KA nella stella coniugata. Siano dunque S_{q-1} Σ_{q-1} lo spazio e la stella fondamentali di Ω associati alla radice θ. Se S_{q-1} è contenuto in α_0 e quindi Σ_{q-1} nella stella (α), la proprietà è conseguenza immediata dell'ipotesi. Se S_{q-1} è contenuto in α e quindi Σ_{q-1} nella stella (α_0), si considerino lo spazio S^0_{q-1} e la stella Σ^0_{q-1} associati alla radice θ_0. Per l'ipotesi, KA trasforma S^0_{q-1} in Σ^0_{q-1}; dunque muterà anche

(17) C. Rosati, loc. cit. (1) c).

S_{q-1} in Σ_{q-1}. Ammettiamo infine che S_{q-1} congiunga un S_{m-1} di α con un S_{n-1} di α_0, e quindi Σ_{q-1} congiunga una stella Σ_{n-1} appartenente ad (α) con una stella Σ_{m-1} appartenente ad (α_0). L'antireciprocità KA trasforma ora S_{n-1} in Σ_{n-1}; se dunque θ è reale, e quindi $m=n$, poichè $S_{m-1}\,\Sigma_{m-1}$ sono immaginari coniugati di $S_{n-1}\,\Sigma_{n-1}$, KA trasformerà pure S_{m-1} in Σ_{m-1} e quindi S_{q-1} in Σ_{q-1}. Se poi θ è complesso, si considerino lo spazio S^0_{q-1} e la stella Σ^0_{q-1} associati alla radice θ_0: S^0_{q-1} si appoggia ad α_0 nell'S^0_{m-1} immaginario coniugato di S_{m-1}, e Σ^0_{q-1} ha comune con la stella (α) la stella Σ^0_{m-1} immaginaria coniugata di Σ_{m-1}, e KA trasformerà S^0_{m-1} in Σ^0_{m-1}. Ma allora KA muterà ancora S_{m-1} in Σ_{m-1} e quindi S_{q-1} in Σ_{q-1}. La proprietà è dunque dimostrata.

Osservazione. Quali sono le corrispondenze che dipendono *linearmente* dalle loro inverse? Se T è una tale corrispondenza, si avrà $l\,T^{-1}\equiv a\,T+b\,I$ e quindi $l\,T\equiv a\,T^{-1}+b\,I$, da cui, sommando, si deduce $(a-l)\,(T+T^{-1})+ +2\,b\,I\equiv 0$. Ed allora o sarà $a=l$, $b=0$ e quindi $T\equiv T^{-1}$, ovvero dovrà $2\,b$ essere divisibile per $a-l$ e quindi $T+T^{-1}\equiv k\,I$. Dunque:

Le corrispondenze dipendenti linearmente dalle loro inverse sono le corrispondenze simmetriche e quelle che aggiunte alle loro inverse danno origine a corrispondenze a valenza [18] *(in particolare le emisimmetriche).*

§ 4. Corrispondenze Hermitiane. Corrispondenze biunivoche.

9. Due corrispondenze S, T della curva C si dicono *permutabili* quando i prodotti $S\,T$, $T\,S$ sono corrispondenze equivalenti, cioè quando $S\,T-T\,S\equiv 0$.

Se due corrispondenze sono permutabili, saranno permutabili le sostituzioni lineari associate e quindi le omografie immagini. Ma si può inversamente provare che se le omografie immagini di S, T sono permutabili, anche le corrispondenze sono permutabili. In altri termini, se i prodotti $S\,T$, $T\,S$ sono dipendenti, sono addirittura equivalenti. Invero se Ω, Ω' sono le sostituzioni lineari associate ad S, T, avendosi dall'ipotesi $\lambda\,\Omega\,\Omega'=\mu\,\Omega'\,\Omega$,

---

(18) Le corrispondenze indipendenti soddisfacenti a questa condizione sono in numero di μ_2+1, indicando μ_2 il numero base delle corrispondenze emisimmetriche. Cfr. C. Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie 5ª, (1910)], Nota II, n. 11.

si deduce che le equazioni caratteristiche delle sostituzioni lineari $\Omega\,\Omega'$, $\Omega'\,\Omega$ hanno le radici proporzionali. Ma, per un noto teorema ([19]), i determinanti che costituiscono i moduli di tali sostituzioni hanno uguali le somme dei minori principali dello stesso ordine; ne segue che le radici suddette sono addirittura uguali, e quindi è $\lambda = \mu$.

Si abbiano sulla curva C due corrispondenze S, T soddisfacenti alla condizione $T\,S \equiv k\,I$, in cui k è un intero non nullo. Le corrispondenze S, T saranno allora non speciali; inoltre dovrà pure essere $S\,T \equiv k\,I$, perchè le omografie immagini, l'una inversa dell'altra, sono permutabili. Due corrispondenze nelle condizioni suddette si dicono *complementari.*

Di una corrispondenza non speciale T esistono infinite complementari, ma è facile provare che queste sono tra loro due a due dipendenti. Invero dalle due relazioni

$$T\,S \equiv k\,I, \qquad T\,S' \equiv k'\,I$$

si deduce

$$T\,(k'\,S - k\,S') \equiv 0.$$

E poichè l'omografia immagine di T è non singolare, $k'\,S - k\,S'$ avrà per immagine l'omografia nulla, cioè

$$k'\,S - k\,S' \equiv 0.$$

Dimostriamo ora la proprietà:

Due corrispondenze complementari sono funzioni razionali l'una dell'altra.

Sia infatti

$$T^n + a_1\,T^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,T + a_n\,I \equiv 0 \tag{3}$$

l'equazione minima di T, nella quale, supponendosi T non speciale, sarà $a_n \neq 0$. Poichè la (3) può mettersi sotto la forma

$$T\,(T^{n-1} + a_1\,T^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,I) \equiv -\,a_n\,I,$$

si deduce che la corrispondenza

$$S \equiv T^{n-1} + a_1\,T^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,I \tag{4}$$

è complementare di T: ed ogni corrispondenza complementare di T, dovendo dipendere da S, sarà funzione razionale di T.

([19]) Cfr. ad es. E. PASCAL, « I determinanti ... » Manuale Hoepli, 1897, pag. 69.

Si può inoltre osservare che se T è simmetrica, la S, come combinazione lineare di più corrispondenze simmetriche, è pure simmetrica. Se invece T è emisimmetrica, la (3) avendo radici tutte immaginarie pure e nessuna nulla, conterrà soltanto potenze pari di T, e nell'espressione (4) della S saranno contenute soltanto potenze dispari. La S è allora combinazione lineare di più corrispondenze emisimmetriche, e quindi è emisimmetrica. Dunque:

Ogni corrispondenza complementare di una corrispondenza simmetrica o emisimmetrica è pure simmetrica o emisimmetrica.

10. Una corrispondenza non speciale T che sia complementare della sua inversa, cioè tale che si abbia

$$T^{-1}\,T \equiv k\,I,$$

si dirà una *corrispondenza Hermitiana*; e l'intero k che, come si è visto al n.° 3, deve essere positivo, si dirà l'*ordine* della corrispondenza Hermitiana. Se n, ν sono gl'indici di T e di T^{-1}, ed S, S' sono le corrispondenze *laterali* della corrispondenza data (n, ν), cioè le corrispondenze simmetriche in cui sono omologhi due punti appartenenti rispettivamente allo stesso gruppo delle serie γ'_n γ'_ν indotte su C da T e da T^{-1}, dalle relazioni

$$T^{-1}\,T \equiv S + \nu\,I \qquad T\,T^{-1} \equiv S' + n\,I$$

si deduce che le corrispondenze Hermitiane sono quelle che hanno le corrispondenze laterali dotate di ordinaria valenza. Se dunque la curva è priva di corrispondenze simmetriche singolari, ogni corrispondenza è necessariamente Hermitiana.

Una corrispondenza Hermitiana è funzione razionale della sua inversa, e se k è il suo ordine, le sue valenze hanno tutte ugual modulo, che è $\sqrt{k}$. Si ha ora inversamente:

Una corrispondenza T che sia funzione razionale della sua inversa e di cui le valenze abbian tutte ugual modulo, è Hermitiana.

Infatti la $T^{-1}\,T$, venendo a possedere, rispetto all'intero sistema d'integrali di 1.ª specie, un'unica valenza reale $-k$, uguale al quadrato di detto modulo cambiato di segno, avrà per immagine un'omografia Ω nella quale sono uniti tutti gli iperpiani uscenti dagli spazi $\alpha\,\alpha_0$ dei periodi, e quindi tutti i punti degli spazi medesimi. Ma poichè l'equazione caratteristica di Ω, per il fatto che la valenza di $T^{-1}\,T$ è reale, non può avere due radici immaginarie coniugate, si conclude che Ω è l'identità e quindi k è un intero.

11. Consideriamo ora in modo particolare le corrispondenze Hermitiane del 1.° ordine, soddisfacenti cioè alla condizione

$$T^{-1}\,T \equiv I. \tag{5}$$

Una corrispondenza biunivoca è manifestamente Hermitiana del 1.° ordine; si può ora inversamente provare che:

Data sopra una curva C di genere $p>1$ una corrispondenza Hermitiana del 1° ordine T, in una delle due classi $(\pm T)$ è contenuta una ed una sola corrispondenza biunivoca. Se C è iperellittica, e solo allora, in entrambe le classi è contenuta una tale corrispondenza.

Se T è una corrispondenza a valenza (necessariamente uguale a ± 1) la proprietà risulta subito osservando che sopra una curva di genere $p>1$ le sole corrispondenze biunivoche non singolari sono l'identità, che ha la valenza -1, e, quando la curva è iperellittica, la corrispondenza di valenza $+1$ definita dalla sua g_2^1 ([20]).

Quando invece T è singolare, la proprietà medesima discende da un noto teorema di R. TORELLI ([21]), il quale afferma che *avendosi sopra C una serie algebrica γ_p^1 di ordine, indice e genere p, priva di gruppi speciali e non di livello costante per alcun integrale di 1ª specie, nella classe di γ_p^1 esiste l'involuzione del 1° ordine data dai punti della curva.*

Si consideri infatti nella classe (T) il sistema continuo ∞^p di corrispondenze aventi il 1° indice $=p$. Indichiamo ancora con T la corrispondenza generica di questo sistema continuo e sia γ_p^1 la serie da essa indotta su C. Poichè T, soddisfacendo alla (5), è non speciale, la γ_p^1 non è di livello costante per alcun integrale di 1ª specie di C. Inoltre la γ_p^1 è birazionalmente identica a C ed ha quindi il genere p. Infatti non può il gruppo generico di γ_p corrispondere ad $\varepsilon>1$ punti di C, chè, altrimenti, la serie indotta da

---

([20]) Che sopra una curva di genere $p>1$ una corrispondenza biunivoca di valenza -1 è necessariamente l'identità può provarsi con le seguenti semplici considerazioni. Ammesso che C possegga una corrispondenza biunivoca non identica di valenza -1, si indichi con $(A\,A')$ una coppia fissa e con $(X\,X')$ una coppia variabile di punti omologhi. Si avrà allora $A'-A\equiv X'-X$, e quindi $A'+X\equiv A+X'$. Il gruppo $A'+X$ in cui X è variabile ammette dunque un gruppo equivalente contenente A, e quindi distinto da esso; perciò la curva, possedendo infinite g_2^1, sarà ellittica o razionale.

([21]) R. TORELLI, *Sulle varietà di* JACOBI, Nota I [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXII (1913)].

T^{-1} sarebbe composta con una involuzione I_t, ed ogni integrale di C per cui la I_t è di livello costante darebbe somma costante nei gruppi di quest'ultima serie, onde T^{-1} sarebbe speciale. Infine la γ_p^1, per il fatto che T è stata scelta genericamente nel suo sistema continuo, è priva di gruppi speciali; il suo indice coincide perciò col difetto di equivalenza ([22]), il quale è, in forza della (5), uguale a p. Valgono dunque per la γ_p^1 le ipotesi del teorema di TORELLI; ne segue allora che un gruppo G_p variabile in γ_p individua su C un punto P' tale che $G_p \pm P'$ varia in una serie lineare. E poichè si è supposto T singolare, il punto P' dovrà essere distinto dal punto P che ha nella T il gruppo G_p per corrispondente. Se allora si indica con U la corrispondenza biunivoca nella quale P ha per omologo P', dovrà essere $T \pm U \equiv 0$ e quindi $U \equiv \pm T$, cioè nella classe $(+T)$ o nella classe $(-T)$ esiste la corrispondenza biunivoca U.

Ed è chiaro che nella stessa classe non può esser contenuta un'altra corrispondenza biunivoca. Se infatti V fosse una tale corrispondenza, dovrà essere $U - V \equiv 0$, e quindi $U V^{-1} - I \equiv 0$; e si avrebbe su C una corrispondenza biunivoca non identica $U V^{-1}$ di valenza -1, il che è assurdo, essendo $p > 1$ (Vedasi la nota ([20])).

Nel caso iperellittico si vede subito che entrambe le classi $(\pm T)$ contengono una corrispondenza biunivoca, perchè moltiplicando U per la corrispondenza definita dalla g_2^1 si ottiene una corrispondenza U' residua di U ([23]).

12. Dal precedente risultato può dedursi una semplice dimostrazione aritmetica del noto teorema, secondo il quale una curva di genere $p > 1$ non può possedere che un numero finito di corrispondenze biunivoche.

Abbiamo visto infatti che le corrispondenze Hermitiane del 1.° ordine sono tutte e sole le corrispondenze non speciali T le quali inducono sulla curva serie algebriche aventi uguale a p il difetto di equivalenza. Il numero

---

([22]) R. TORELLI, *Sulle serie semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVII (1914)], n° 4.

([23]) Più in generale, se sopra una curva di genere $p > 1$ si hanno due corrispondenze biunivoche U, V fra loro dipendenti, la curva è iperellittica e una corrispondenza si deduce dall'altra moltiplicandola per la corrispondenza G definita dalla g_2^1. Se infatti è $\lambda V + \mu U \equiv 0$, si avrà $\lambda U^{-1} V + \mu I \equiv 0$; e la corrispondenza non identica $U^{-1} V$, dipendendo dall'identità, sarà dotata di valenza. La curva è dunque iperellittica ed è $V \equiv U G$.

delle corrispondenze biunivoche possedute da una curva C di genere $p > 1$ uguaglia dunque il numero delle corrispondenze soddisfacenti alle condizioni suddette o è la metà di questo, secondochè C è o non è iperellittica. Sia ora $(T_1\, T_2 \ldots T_\mu)$ una base minima per il sistema di corrispondenze esistenti sulla curva, $\alpha_i\, \beta_i\, \nu_{ii}$ indichino rispettivamente gl'indici e il grado virtuale di T_i e ν_{ik} il numero delle coppie comuni a T_i, T_k. Ponendo allora

$$\omega_{ik} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i - \nu_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ \mu),$$

è noto [24] che la corrispondenza $T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_\mu T_\mu$ induce sulla curva una serie il cui difetto di equivalenza è $\frac{1}{2} \sum_{ik}^{1\ldots\mu} \lambda_i \lambda_k \omega_{ik}$. Segue da ciò che C possiede corrispondenze biunivoche quando e soltanto quando l'equazione

$$\sum \lambda_i \lambda_k \omega_{ik} = 2p \tag{6}$$

ammette soluzioni intere, le quali siano associate a corrispondenze non speciali; ed il numero di tali soluzioni uguaglia il numero delle corrispondenze biunivoche di C o è il doppio di questo, secondochè C è o non è iperellittica.

Poichè la forma $\sum \lambda_i \lambda_k \omega_{ik}$ è definita positiva, il numero delle soluzioni intere della (6) è finito [25], ed è quindi finito il numero delle corrispondenze biunivoche di C.

---

(24) C. Rosati, loc. cit. (18), n° 9.

(25) Si consideri infatti una μ^{pla} polare della quadrica $\Sigma \lambda_i \lambda_k \omega_{ik} = 0$, i cui vertici $P_1\, P_2 \ldots P_\mu$ siano punti razionali e indichino $c_{1i} \ldots c_{\mu i}$ le coordinate intere di P_i. Eseguendo allora sulle λ la sostituzione lineare

$$\lambda_i = \sum_k^{1\ldots\mu} c_{ik} X_k \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, \mu) \tag{a}$$

si otterrà

$$\sum_{ik} \lambda_i \lambda_k \omega_{ik} = \sum_i^{1\ldots\mu} \rho_i X_i^2,$$

essendo i numeri ρ_i interi positivi. Indicando con Δ il modulo della sostituzione (a), a valori interi delle λ_i corrispondono per le X_i valori razionali col denominatore Δ, cioè della forma $\frac{Y_i}{\Delta}$. Ed allora ad una soluzione intera della (6) corrisponde una soluzione intera della

$$\Sigma \rho_i Y_i^2 = 2p\,\Delta^2.$$

Ma quest'ultima, dovendo essere $\rho_i Y_i^2 \leq 2p\,\Delta^2$ $(i = 1,\ 2, \ldots, \mu)$, ammette un numero finito di soluzioni; dunque è finito anche il numero delle soluzioni della (6).

13. Una corrispondenza biunivoca U di periodo m soddisfa all'equazione $U^m - I = 0$; se dunque $\psi(U) \equiv 0$ è l'equazione minima di U, dovrà essere $\psi(z)$ un divisore di $z^m - 1$ ([26]), e le radici di $\psi(z) = 0$ saranno radici m^{me} dell'unità.

Preso ora un divisore δ del periodo $m\,(m = n\,\delta)$, si separino le radici di $\psi(z) = 0$ in due gruppi, ponendo nel 1.° gruppo le radici $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_r$ $(r \geqq 0)$ appartenenti all'esponente δ o ad un esponente divisore di δ, nel 2.° gruppo le rimanenti radici $\theta_1\,\theta_2 \ldots \theta_s$. Si indichi con Ω l'omografia immagine di U, con $A_1\,A_2 \ldots A_r$ gli spazi fondamentali di Ω associati alle radici del 1.° gruppo, con $B_1\,B_2 \ldots B_s$ quelli associati alle radici del 2.° gruppo, e si consideri la corrispondenza

$$f(U) = I + U^{\delta} + U^{2\delta} + \cdots + U^{(n-1)\delta},$$

cioè l'involuzione ciclica I_n generata dalla corrispondenza U^{δ}.

Poichè è manifestamente

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_r) = n, \qquad f(\theta_1) = f(\theta_2) = \cdots = f(\theta_s) = 0,$$

l'omografia $f(\Omega)$ immagine di $f(U)$ sarà singolare ed avrà come 1° spazio singolare lo spazio B congiungente $B_1\,B_2 \cdots B_s$, e come 2° spazio singolare quello A congiungente $A_1\,A_2 \cdots A_r$. I due spazi B ed A saranno dunque razionali, incidenti ad $\alpha\ \alpha_0$ e polari l'uno dell'altro rispetto al sistema nullo A. Se allora $2\pi - 1$, $2(p - \pi) - 1$ indicano le dimensioni di A e di B, ciò significa che l'involuzione I_n è di livello costante per un sistema regolare riducibile costituito da $p - \pi$ integrali di 1ª specie, ed è quindi di genere π.

Si osservi d'altra parte che l'$S_{\pi-1}$ comune ad A e ad α_0 è lo spazio congiungente gli spazi comuni ad α_0 e ad $A_1\,A_2 \cdots A_r$, e che se A_i ha comune con α_0 un S_{m_i-1} $(m_i \geqq 1)$, $-\rho_i$ risulta una valenza di U della dimensione m_i. Si ha dunque la proprietà:

Se U è una corrispondenza biunivoca di periodo m e δ è un divisore di m, $(m = n\,\delta)$, la somma delle dimensioni delle valenze di U che cambiate di segno danno origine a radici m^{me} dell'unità appartenenti all'esponente δ o a un esponente divisore di δ, uguaglia il genere dell'involuzione ciclica I_n generata da U^{δ}.

Ne segue che l'involuzione I_n sarà razionale o irrazionale secondochè

([26]) C. Rosati, loc. cit. ([1]) *b*).

l'equazione $\psi(z) = 0$ non ammette ovvero ammette radici appartenenti all'esponente δ o a un esponente divisore di δ.

In particolare, per $\delta = 1$, si ha il risultato:

L'involuzione ciclica generata da una corrispondenza biunivoca U è razionale o irrazionale secondochè la U non ammette ovvero ammette la parziale valenza -1. Nel 2° caso la dimensione di questa valenza uguaglia il genere dell'involuzione.

14. Può una corrispondenza biunivoca U essere simmetrica o emisimmetrica? Se U è simmetrica, dovrà essere $U - U^{-1} \equiv 0$ e quindi $U^2 - I \equiv 0$. Supposto $p > 1$, la U^2, di valenza ordinaria -1, sarà l'identità, ed U genera un'involuzione del 2° ordine (razionale o irrazionale). Se U è emisimmetrica, dovrà essere $U + U^{-1} \equiv 0$, e quindi $U^2 + I \equiv 0$. La curva è dunque iperellittica e la U^2 è definita dalla sua g_2^1; inoltre l'equazione minima di U è $z^2 + 1 = 0$, e la U possiede le due valenze $\pm i$. Ma allora U^4, di valenza ordinaria -1, è l'identità, e la U genera una involuzione ciclica del 4° ordine razionale. Dunque:

Le corrispondenze biunivoche simmetriche sulle curve di genere $p > 1$ sono a periodo 2; le corrispondenze biunivoche emisimmetriche non possono esistere che sulle curve iperellittiche, sono a periodo 4, e generano involuzioni razionali.

§ 5. Le corrispondenze costituenti un ordine. Proprietà degli ordini.

15. Si consideri sulla curva C una corrispondenza singolare T e sia

$$\psi(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_{n-1} T + a_n I \equiv 0$$

la sua equazione minima. Facciamo l'ipotesi, alla quale sempre ci atterremo, che l'equazione $\psi(z) = 0$ sia priva di radici multiple. La omografia Ω immagine di T è in tal caso generale e la T possiede valenze tutte semplici [27].

L'equazione $\psi(z) = 0$ può essere riducibile o irriducibile nel campo assoluto di razionalità. Se è riducibile, e se $A(z)$ è un fattore di $\psi(z)$, la cor-

[27] C. Rosati, loc. cit. [1] *b*) *c*).

rispondenza $A(T)$, funzione razionale di T, avendo per immagine l'omografia singolare $A(\Omega)$, è speciale. Supponiamo inversamente che esista una corrispondenza speciale S funzione razionale di T, cioè tale che sia $lS = f(T)$. Dette $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_t$ le radici di $f(z) = 0$, l'omografia $f(\Omega) = (\Omega - \rho_1 I)(\Omega - \rho_2 I)\ldots \ldots(\Omega - \rho_t I)$ deve essere singolare, e sarà perciò singolare uno almeno dei fattori $\Omega - \rho_i I$. L'equazione $f(z) = 0$ ha dunque qualche radice comune con $\psi(z) = 0$ senza essere $f(z)$ divisibile per $\psi(z)$. Il M. C. D. di $f(z)$ e $\psi(z)$ è allora un polinomio a coefficienti interi di grado $< n$, e perciò l'equazione $\psi(z) = 0$ è riducibile. Dunque:

L'equazione minima di una corrispondenza T è riducibile o irriducibile, secondochè esistono o no corrispondenze speciali funzioni razionali di T.

16. Sia $\varphi(z) = 0$ l'equazione caratteristica di Ω e supponiamo che $\psi(z) = 0$ sia irriducibile. Poichè $\varphi(z) = 0$ ammette per radici tutte e sole quelle di $\psi(z) = 0$, dovrà essere

$$\varphi(z) = [\psi(z)]^q$$

e quindi $2p = nq$. Le radici di $\varphi(z) = 0$ hanno dunque tutte la stessa molteplicità q, donde segue che gli spazi fondamentali di Ω hanno tutti la stessa dimensione $q - 1$. Sia S_{q-1} uno di questi spazi e ρ la radice corrispondente dell'equazione caratteristica. Se ρ è reale, sarà $q = 2q'$, l'S_{q-1} è un $R_{2q'-1}$ reale incidente agli spazi dei periodi, e $-\rho$ è una valenza di T della dimensione q'. Se ρ è immaginaria, l'S_{q-1} congiunge un S_{m-1} contenuto in α con un S_{n-1} di α_0 ($m, n \geq 0$, $m + n = q$) e $-\rho$ è valenza della dimensione n. Alla radice immaginaria coniugata ρ_0 corrisponde un S^0_{q-1} congiungente un S^0_{n-1} di α con un S^0_{m-1} di α_0, e $-\rho_0$ è valenza della dimensione m. Il numero q ha dunque questo significato: esso uguaglia la somma delle dimensioni di due valenze di T immaginarie coniugate o il doppio della dimensione di una valenza reale.

Quando invece l'equazione minima di T è riducibile e

$$\psi(T) = A_1(T) \,.\, A_2(T) \ldots A_l(T) \equiv 0$$

è l'equazione stessa decomposta nei suoi fattori irriducibili, si avrà

$$\varphi(z) = [A_1(z)]^{q_1} [A_2(z)]^{q_2} \ldots [A_l(z)]^{q_l},$$

e se m_i indica il grado di $A_i(z)$ sarà $2p = m_1 q_1 + m_2 q_2 + \cdots + m_l q_l$.

A ciascuna radice ρ_i di $A_i(z) = 0$ è associato uno spazio fondamentale di Ω di dimensione $q_i - 1$, onde q_i sarà il doppio della dimensione della valenza $-\rho_i$ se ρ_i è reale, o la somma delle dimensioni della valenza $-\rho_i$ e della immaginaria coniugata, se ρ_i è immaginaria. L'omografia singolare $A_i(\Omega)$, immagine della corrispondenza speciale $A_i(T)$, ha per 1° spazio singolare l'$S_{m_i q_i - 1}$ congiungente i suddetti spazi fondamentali; esso dovrà dunque essere razionale, di dimensione dispari e incidente ad $\alpha\ \alpha_0$. Segue di qui che i sistemi d'integrali associati alle valenze $-\rho_i$ appartengono a un sistema regolare di $\frac{1}{2} m_i q_i$ integrali riducibili.

Osservazione. Si consideri una corrispondenza speciale S funzione razionale di T e sia $lS = f(T)$. Il polinomio $f(z)$ dovrà contenere una o più volte qualcuno dei fattori irriducibili di $\psi(z)$. Se si ha ad es. $lS \equiv A_1(T)^{k_1} \cdots A_r(T)^{k_r} B(T)$, in cui è $1 \leqq r < l$ e $B(T)$ è una corrispondenza non speciale, si vede facilmente che il sistema regolare riducibile per cui è di livello costante la S è quello che ha per immagine la stella d'iperpiani uscenti da α e contenenti gli spazi fondamentali di Ω associati alle radici dei rimanenti fattori $A_{r+1}(z), \ldots, A_l(z)$. Si deduce di qui che ***i sistemi regolari riducibili per cui sono di livello costante le corrispondenze speciali funzioni razionali di** T **sono in numero di*** $\binom{l}{1} + \binom{l}{2} + \cdots + \binom{l}{l-1} = 2^l - 2$.

17. Date sulla curva C m corrispondenze indipendenti $T_1\, T_2 \ldots T_m$, l'insieme delle corrispondenze S che dipendono linearmente da quelle, cioè tali che sia

$$lS \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_m T_m$$

si dice una ***rete di specie m.***

Se T è una corrispondenza qualsiasi di C ed n è il grado della sua equazione minima, l'insieme delle corrispondenze funzioni razionali di T, cioè delle corrispondenze S tali che

$$lS \equiv f(T)$$

costituisce manifestamente una rete di specie n. Le corrispondenze di questa rete sono due a due permutabili e si riproducono, oltre che per addizione e sottrazione, anche per moltiplicazione; in essa sono poi contenute tutte le corrispondenze a valenza. A questa rete daremo il nome di *ordine* e si indicherà con $o(T)$; la corrispondenza T si dirà *generatrice* dell'ordine, ed

n il suo *grado.* Un ordine si dice ***riducibile*** o ***irriducibile*** secondochè è riducibile o irriducibile l'equazione minima della corrispondenza generatrice.

Se una corrispondenza S è funzione razionale di T, l'ordine $o(S)$ è contenuto nell'ordine $o(T)$; due corrispondenze funzioni razionali l'una dell'altra generano lo stesso ordine.

Si può ora dimostrare che:

Se l'ordine $o(T)$ è irriducibile, ogni ordine $o(S)$ in esso contenuto è pure irriducibile ed ha per grado un divisore di quello di $o(T)$.

La irriducibilità di $o(S)$ è conseguenza immediata di ciò che si è detto al n° 15. Si osservi ora che, essendo S funzione razionale di T, ogni spazio fondamentale dell'omografia Ω' immagine di S o coincide con uno dell'omografia Ω immagine di T, o congiunge più spazi fondamentali di questa. Ma, per la irriducibilità delle equazioni minime di T e di S, Ω e Ω' hanno spazi fondamentali tutti della stessa dimensione (n° 16); ne segue che gli spazi fondamentali di Ω' congiungono k a k quelli di Ω. Se dunque n, n' indicano i gradi di $o(T)$ e di $o(S)$, sarà $n = kn'$.

18. Alla ricerca di ulteriori proprietà degli ordini giova premettere la seguente proposizione fondamentale:

In ogni rete di specie k contenuta in un ordine di grado n $(k < n)$ si può in infiniti modi scegliere una corrispondenza di cui tutte le corrispondenze della rete sono funzioni razionali.

Nel caso $k = 1$ la proprietà è evidente, essendo le corrispondenze della rete due a due dipendenti.

Supposto $k > 1$, si indichi con T la corrispondenza generatrice dell'ordine, con $\theta_1\, \theta_2 \dots \theta_n$ le radici della sua equazione minima e con $S_{q_1-1}\, S_{q_2-1}\, S_{q_n-1}$ gli spazi fondamentali dell'omografia Ω, immagine di T, associati a quelle radici. Se $S_1\, S_2 \dots S_k$ sono k corrispondenze indipendenti della rete considerata, dovrà aversi $l_i S_i \equiv f_i(T)$. Si ponga allora $f_i^{(rs)} = f_i(\theta_r) - f_i(\theta_s)$ e si scrivano le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni lineari

$$x_1 f_1^{(rs)} + x_2 f_2^{(rs)} + \cdots + x_k f_k^{(rs)} = 0 \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\dots,\ n). \tag{7}$$

Queste non sono tutte identità nelle x, chè, altrimenti, si avrebbe

$$\frac{1}{l_i} f_i(\theta_1) = \frac{1}{l_i} f_i(\theta_2) = \cdots = \frac{1}{l_i} f_i(\theta_n) \qquad (i = 1,\ 2,\dots,\ n),$$

e tutte le S_i, avendo per immagine l'identità, sarebbero a valenza.

Se dunque si interpretano le $x_1\, x_2 \ldots x_k$ come coordinate omogenee di un S_{k-1}, le (7) sono le equazioni di m iperpiani $\left(1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}\right)$ di questo spazio. Si prenda allora in S_{k-1} un punto razionale non situato in alcuno dei detti iperpiani e siano $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ le sue coordinate intere; dico che la corrispondenza

$$S \equiv F(T) = \lambda_1 f_1(T) + \lambda_2 f_2(T) + \cdots + \lambda_k f_k(T)$$

soddisfa alla condizione richiesta. Invero, poichè è

$$F(\theta_r) - F(\theta_s) = \lambda_1 f_1^{(rs)} + \lambda_2 f_2^{(rs)} + \cdots + \lambda_k f_k^{(rs)} \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

si vede che per ogni coppia $(r,\ s)$ per cui è $F(\theta_r) = F(\theta_s)$ dovrà aversi $f_1^{(rs)} = f_2^{(rs)} = \cdots = f_k^{(rs)} = 0$. Ciò significa che se due spazi $S_{q_r-1}\, S_{q_s-1}$ fondamentali di Ω sono contenuti nello stesso spazio fondamentale dell'omografia immagine di S, sono contenuti anche nello stesso spazio fondamentale delle omografie immagini di $S_1\, S_2 \ldots S_k$; e dunque l'omografia immagine di S ha gli spazi fondamentali contenuti o coincidenti con quelli delle omografie immagini di $S_1\, S_2 \ldots S_k$. Le corrispondenze $S_1\, S_2 \ldots S_k$ sono dunque funzioni razionali di S, e quindi ogni corrispondenza della rete è funzione razionale di S.

19. Dal teorema dimostrato discendono varie notevoli conseguenze:

a) *Le corrispondenze simmetriche contenute in un ordine $o(T)$ costituiscono un ordine.*

Poichè le corrispondenze a valenza sono contenute in qualsiasi ordine, è chiaro che ogni ordine contiene sempre corrispondenze simmetriche; e siccome ogni combinazione lineare di più corrispondenze simmetriche è pure una corrispondenza simmetrica, si deduce intanto che le corrispondenze simmetriche dell'ordine $o(T)$ formano una rete Σ. Per il teorema precedente può scegliersi in Σ una corrispondenza H tale che le corrispondenze di Σ sono tutte funzioni razionali di H; la rete Σ è dunque contenuta nell'ordine $o(H)$. Ma poichè ogni funzione razionale di una corrispondenza simmetrica H è pure simmetrica e l'ordine $o(H)$ è contenuto in $o(T)$, si deduce che $o(H)$ è formato da corrispondenze simmetriche di $o(T)$, cioè $o(H)$ è contenuto in Σ. Ne segue che la rete Σ coincide con l'ordine $o(H)$.

Se dunque l'ordine $o(T)$ è irriducibile, dovrà essere il grado di $o(H)$ un divisore del grado di $o(T)$. Dal che segue il corollario:

Un ordine irriducibile che ha per grado un numero primo o è tutto di corrispondenze simmetriche, o le corrispondenze simmetriche contenute in esso sono a valenza.

b) *Le corrispondenze comuni a due ordini costituiscono un ordine.*

Poichè un ordine è una rete, è chiaro che le corrispondenze comuni a due ordini formano una rete. Indichiamo con Σ la rete delle corrispondenze comuni agli ordini $o(T)$ $o(T_1)$, e in essa si scelga una corrispondenza H tale che tutte le corrispondenze di Σ siano funzioni razionali di H. La rete Σ è contenuta in $o(H)$, ma $o(H)$ è contenuto in $o(T)$ e in $o(T_1)$ e quindi in Σ; dunque Σ ed $o(H)$ coincidono.

20. Siano $o(T)$ $o(T^{-1})$ gli ordini generati da due corrispondenze l'una inversa dell'altra e si indichi con $o(T,\ T^{-1})$ l'ordine costituito dalle corrispondenze comuni. Se le corrispondenze T, T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra, si ha $o(T) = o(T^{-1}) = o(T,\ T^{-1})$. In ogni caso $o(T)$ e $o(T^{-1})$ sono biunivocamente riferiti, essendo omologhe due loro corrispondenze inversa l'una dell'altra, e in questo riferimento $o(T,\ T^{-1})$ corrisponde a se stesso; $o(T,\ T^{-1})$ contiene cioè l'inversa di ogni sua corrispondenza. Si può inoltre provare che *ogni corrispondenza di* $o(T,\ T^{-1})$ *è funzione razionale della sua inversa*

Si considerino infatti due corrispondenze $S\ S^{-1}$, l'una inversa dell'altra, di $o(T,\ T^{-1})$; siano $\Gamma\ \Gamma'$ le omografie immagini di queste corrispondenze e indichiamo con $S_{q_1-1}\ S_{q_2-1} \dots S_{q_n-1}$ gli spazi fondamentali dell'omografia Ω immagine di T associati alle radici $\theta_1\ \theta_2 \dots \theta_n$ della sua equazione minima. Supposto $lS = f(T)$, $l'S^{-1} = \varphi(T)$, lo spazio S_{q_i-1} è contenuto in due spazi fondamentali di $\Gamma\ \Gamma'$, associati alle radici $\frac{1}{l} f(\theta_i)$, $\frac{1}{l'} \varphi(\theta_i)$ delle rispettive equazioni caratteristiche (n.° 5); ed è anche contenuto in due spazi fondamentali delle omografie $\Gamma + \Gamma'$, $\Gamma - \Gamma'$ corrispondenti alle radici

$$\frac{1}{l} f(\theta_i) + \frac{1}{l'} \varphi(\theta_i), \qquad \frac{1}{l} f(\theta_i) - \frac{1}{l'} \varphi(\theta_i).$$

Ma essendo $\Gamma + \Gamma'$ immagine della corrispondenza simmetrica $S + S^{-1}$, e $\Gamma - \Gamma'$ immagine della corrispondenza emisimmetrica $S - S^{-1}$, queste ultime radici dovranno risultare l'una reale, l'altra immaginaria pura; donde segue che $\frac{1}{l} f(\theta_i)$, $\frac{1}{l'} \varphi(\theta_i)$ sono numeri immaginari coniugati. Si deduce di qui che se $\alpha\,\alpha'$ sono due spazi fondamentali di $\Gamma\,\Gamma'$ associati a radici immaginarie coniugate delle rispettive equazioni caratteristiche, ogni spazio fondamentale di Ω contenuto in α è anche contenuto in α' e viceversa. E poichè gli spazi fondamentali di Ω contenuti in α e in α' appartengono a questi spazi, dovrà essere $\alpha = \alpha'$. Ma allora $\Gamma\,\Gamma'$ hanno comuni gli spazi fondamentali e perciò S ed S^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra.

È chiaro inversamente che se una corrispondenza S di $o(T)$ è funzione razionale di S^{-1}, sarà anche funzione razionale di T^{-1} ed appartiene quindi ad $o(T,\ T^{-1})$. L'ordine $o(T,\ T^{-1})$ contiene dunque tutte e sole le corrispondenze di $o(T)$ funzioni razionali delle loro inverse.

Corollario. In particolare, se T è funzione razionale di T^{-1}, si ha:

Se un ordine $o(T)$ coincide col suo inverso, ogni ordine contenuto in $o(T)$ coincide pure col suo inverso.

21. Nella rappresentazione geometrica, che abbiamo data altrove [28], nella quale le corrispondenze della curva C sono rappresentate dai punti razionali di uno spazio lineare Σ, i due ordini $o(T)$ $o(T^{-1})$ hanno per immagine due S_{n-1} corrispondenti nell'omografia involutoria I che ha per spazi di punti uniti l'S_{μ_1-1} e l'S_{μ_2-1} immagini delle reti delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche di C.

L'ordine $o(T,\ T^{-1})$ è rappresentato dallo spazio S_{m-1}, trasformato in sè da I, intersezione dei suddetti S_{n-1}. In S_{m-1} è contenuto il punto di S_{μ_1-1} immagine delle corrispondenze a valenza. Se dunque S_{m-1} non è tutto contenuto in S_{μ_1-1}, dovrà congiungere un S_{ν_1-1} di S_{μ_1-1} con un S_{ν_2-1} di S_{μ_2-1}, e sarà $m = \nu_1 + \nu_2$. Segue di qui la condizione perchè i due ordini $o(T)$ $o(T^{-1})$ coincidano; occorre e basta, perchè ciò avvenga, che sia $n = \nu_1 + \nu_2$. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T sia funzione razionale della sua inversa, è che il grado dell'equazione minima di T uguagli la somma dei numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti che sono funzioni razionali di T.

22. Vogliamo ora stabilire alcune proprietà di un ordine $o(T)$ coincidente con l'inverso, nell'ipotesi che $o(T)$ sia irriducibile.

Sia S una corrispondenza di $o(T)$ la quale possegga una valenza reale. La S^{-1}, che è funzione razionale di S, avrà la stessa valenza associata al

---

(28) C. Rosati, loc. cit. (18).

medesimo sistema d'integrali di 1.ª specie, e la $S - S^{-1}$ avrà una valenza nulla. Ma poichè $S - S^{-1}$ è pure contenuta in $o(T)$ e l'ordine $o(T)$ è irriducibile, dovrà essere (n.° 15) $S - S^{-1} \equiv 0$, cioè la S è una corrispondenza simmetrica.

In modo analogo si dimostra che se una corrispondenza S di $o(T)$ ammette una valenza immaginaria pura, la S è emisimmetrica.

Infine si ammetta che in $o(T)$ sia contenuta una corrispondenza S, di cui una valenza abbia per modulo $\sqrt{k}$, essendo k un intero positivo. La $S^{-1}S$ possiede allora la valenza intera $-k$, cioè $S^{-1}S - kI$, contenuta in $o(T)$, ha una valenza nulla. Ne segue che $S^{-1}S \equiv kI$, cioè la S è una corrispondenza Hermitiana. Si ha dunque:

In un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso ogni corrispondenza che ha una valenza reale è simmetrica, una corrispondenza che ha una valenza immaginaria pura è emisimmetrica, una corrispondenza di cui una valenza ha per modulo $\sqrt{k}$, con k intero, è Hermitiana.

Abbiamo visto nel n.° precedente che un ordine $o(T)$ del grado n coincidente con l'inverso, se non è tutto di corrispondenze simmetriche, contiene due reti indipendenti Σ_1 Σ_2 di specie ν_1 ν_2, una di corrispondenze simmetriche, l'altra di emisimmetriche ed è $n = \nu_1 + \nu_2$. Poichè la rete Σ_1 è un ordine, se $o(T)$ è irriducibile, dovrà essere ν_1 un divisore di n (n.° 17) e quindi anche di ν_2.

Si scelga ora in Σ_2 una corrispondenza K di cui tutte le corrispondenze di Σ_2 siano funzioni razionali, e si consideri l'ordine $o(K)$.

Essendo K una corrispondenza non speciale, la sua equazione minima ammette radici tutte immaginarie pure e nessuna di esse è nulla; il grado di $o(K)$ sarà dunque un numero pari $2h$. Se ora S è una corrispondenza di $o(K)$, sarà

$$lS \equiv a_0 K^{2h-1} + a_1 K^{2h-2} + a_2 K^{2h-3} + \cdots + a_{2h-2} K + a_{2h-1} I; \tag{8}$$

di qui, ricordando che una potenza di K è simmetrica o emisimmetrica secondochè l'esponente è pari o dispari, si deduce

$$lS^{-1} \equiv - a_0 K^{2h-1} + a_1 K^{2h-2} - a_2 K^{2h-3} + \cdots - a_{2h-2} K + a_{2h-1} I; \tag{9}$$

e dalle (8) (9), sommando e sottraendo, si ottiene

$$l(S + S^{-1}) \equiv 2a_1 K^{2h-2} + 2a_3 K^{2h-4} + \cdots + 2a_{2h-1} I$$

$$l(S - S^{-1}) \equiv 2a_0 K^{2h-1} + 2a_2 K^{2h-3} + \cdots + 2a_{2h-2} K.$$

Se ora ammettiamo che S sia simmetrica ($S - S^{-1} \equiv 0$) ovvero emisimmetrica ($S + S^{-1} \equiv 0$), dovrà essere nel 1.° caso $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2h-2} = 0$, e nel 2.° caso $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2h-1} = 0$. Ciò significa che nell'ordine $o(K)$ le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche costituiscono due reti di specie h. Ma poichè $o(K)$ è contenuto in $o(T)$ le due reti saranno contenute rispettivamente in Σ_1 Σ_2; si avrà dunque $h \leq \nu_1$ $h \leq \nu_2$. Ma per il modo con cui è stata scelta K, è Σ_2 la rete delle corrispondenze emisimmetriche di $o(K)$, e perciò $h = \nu_2$. Ma allora è $\nu_2 \leq \nu_1$ ed essendo ν_1 un divisore di ν_2, dovrà infine aversi $\nu_1 = \nu_2$. Si ottiene dunque il notevole risultato:

In un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso, se non è tutto di corrispondenze simmetriche, il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche. Inoltre come generatrice dell'ordine può scegliersi una corrispondenza emisimmetrica K e le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche dell'ordine sono date da funzioni razionali contenenti soltanto potenze pari o dispari di K.

Gli ordini irriducibili coincidenti coi loro inversi sono dunque quelli che ammettono come generatrice o una corrispondenza simmetrica o una emisimmetrica.

§ 6. La varietà di Jacobi V_p.

a) **Le corrispondenze simmetriche della curva C e i sistemi algebrici contenuti in V_p.**

23. Si consideri la varietà di Jacobi [28] relativa alla curva C, cioè la varietà algebrica a p dimensioni V_p i cui punti corrispondono biunivocamente senza eccezione alle serie lineari g_p di ordine p di C. Fissato sulla riemanniana di C un sistema di retrosezioni, si indichino con $j_1(\zeta)$, $j_2(\zeta)$, $\ldots j_p(\zeta)$ i valori nel punto generico ζ di C dei p integrali normali di 1ª specie re-

[28] Cfr. la Memoria di G. Castelnuovo: *Sulle funzioni abeliane* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª (1921)], Nota III: *Le varietà di* Jacobi.

lativi al detto sistema e sia

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 \ldots 0 & \tau_{11} \ldots \tau_{1p} \\ 0 & 1 \ldots 0 & \tau_{21} \ldots \tau_{2p} \\ . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ 0 & 0 \ldots 1 & \tau_{p1} \ldots \tau_{pp} \end{array}\right| \tag{10}$$

la tabella dei loro periodi. La V_p si può allora rappresentare uguagliando le coordinate cartesiane di un punto di S_{p+1} a $p+1$ funzioni abeliane indipendenti dei p parametri

$$u_i = j_i(\zeta_1) + j_i(\zeta_2) + \cdots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

con la matrice (10) dei periodi.

In V_p esiste un sistema algebrico ∞^p, $\{\Theta\}$, di varietà a $p-1$ dimensioni, ciascuna delle quali si ottiene annullando una funzione ϑ del 1° ordine a caratteristiche nulle delle p variabili $u_1 u_2 \ldots u_p$. I punti di una varietà Θ rappresentano le g_p contenute in una g_{2p-1}^{p-1}. Alle g_{2p-1}^{p-1} aventi un punto fisso corrispondono varietà Θ (*speciali*) costituenti un sistema ∞^1 di grado 1 e di indice p, birazionalmente identico a C. Le varietà Θ speciali contengono poi tutte la W_{p-2} rappresentante l'insieme delle g_p speciali di C. Ogni altra varietà algebrica a $p-1$ dimensioni Φ di V_p, se non è contenuta nel sistema $\{\Theta\}$ o in un suo multiplo, si ottiene annullando una funzione intermediaria φ. Ad ogni funzione intermediaria è associato un determinante gobbo simmetrico di ordine $2p$ costituito da interi m_{ik} (*interi caratteristici* di φ) e quindi una forma bilineare alternata

$$\sum_{ik}^{1\ldots 2p} m_{ik}\, x_i\, y_k \,. \tag{11}$$

Le condizioni cui devono soddisfare gli interi m_{ik} perchè siano caratteristici di un sistema di funzioni intermediarie di V_p sono state stabilite recentemente per via diversa da LEFSCHETZ [29] e da CASTELNUOVO [30]; nel

[29] S. LEFSCHETZ, *Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª (1921)].

[30] G. CASTELNUOVO, *Sulle funzioni abeliane*; Nota I: *Le funzioni intermediarie* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª (1921)].

caso $|m_{ik}| == 0$ esse si esprimono dicendo che la forma

$$\sum_{ik}^{1\ldots 2p} M_{ik}\, \xi_i\, \eta_k \tag{12}$$

reciproca della (11) si annulla sostituendo in luogo delle $\xi\ \eta$ gli elementi di due righe qualsiansi della matrice (10) e conserva sempre segno positivo quando in luogo delle $\xi\ \eta$ si pongano le parti reali e i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una qualsiasi combinazione lineare di $u_1\, u_2 \ldots u_p$.

Nella nostra rappresentazione geometrica ([31]) la detta condizione equivale all'altra che il sistema nullo Σ definito annullando la primitiva forma $\sum m_{ik}\, x_i\, y_k$ trasforma in sè lo spazio α e la forma stessa conserva segno costante positivo sostituendo alle x, y le parti reali e i coefficienti dell'immaginario i delle coordinate di un punto variabile in α ([32]). Dunque Σ è un sistema nullo riemanniano ***principale*** nel senso che è stato definito al n° 1, ed è quindi immagine di una corrispondenza simmetrica S (e delle infinite altre ad essa equivalenti o residue) le cui valenze hanno tutte ugual segno.

Se poi il determinante $|m_{ik}|$ è nullo e di caratteristica $2q$, la funzione φ, con una opportuna sostituzione unimodulare sui periodi e una conveniente trasformazione lineare dei parametri, può ridursi a contenere soltanto q variabili $U_1\, U_2\, \ldots\, U_q$, le quali costituiscono su V_p un sistema regolare

---

([31]) Essa differisce da quella di SCORZA in ciò: che per noi lo spazio α dei periodi, anzichè essere quello congiungente i punti aventi per coordinate le orizzontali della matrice (10), è l'intersezione degli iperpiani aventi le coordinate medesime.

([32]) La 1ª parte subito si giustifica osservando che come la (12) si annulla sostituendo alle ξ, η le coordinate di due iperpiani per α, così la (11) si annullerà sostituendo alle x, y le coordinate di due punti di α. Per dimostrare la 2ª parte, si consideri in α un punto di coordinate $x_r = x'_r + i\, x''_r$ e siano $\xi_r = \xi'_r + i\, \xi''_r$ le coordinate del suo iperpiano polare nel sistema nullo Σ. Si avrà allora

$$\xi'_i = \sum_r m_{ri}\, x'_r, \qquad \xi''_k = \sum_s m_{sk}\, x''_s,$$

e la condizione

$$\sum M_{ik}\, \xi'_i\, \xi''_k > 0$$

si trasforma nell'altra

$$\sum_{ik} M_{ik} \sum_{rs} m_{ir}\, m_{ks}\, x'_r\, x''_s = \sum_{rs} x'_r\, x''_s \sum_k m_{ks} \sum_i M_{ik}\, m_{ir} = |m_{ik}| \sum_{rs} m_{rs}\, x'_r\, x''_s > 0$$

e quindi nella

$$\sum_{rs} m_{rs}\, x'_r\, x''_s > 0,$$

perchè $|m_{ik}|$ è notoriamente positivo.

riducibile d'integrali di 1ª specie. La V_p contiene allora una congruenza ∞^q di indice uno di varietà algebriche w_{p-q} e la φ si riduce a una funzione intermediaria della varietà abeliana W_q immagine di detta congruenza.

La medesima sostituzione unimodulare eseguita sulle x, y muta la forma $\sum m_{ik} x_i y_k$ in un'altra contenente soltanto due serie di $2q$ variabili, la quale, riferita alla W_q, soddisfa alle condizioni del caso precedentemente considerato. Si conclude allora che il sistema nullo degenere rappresentato dall'equazione $\sum m_{ik} x_i y_k = 0$ è *semi-principale* e quindi immagine di una corrispondenza speciale S (e di quelle ad esse equivalenti o residue) la quale possiede, all'infuori della valenza nulla, valenze tutte di ugual segno.

Si ha dunque:

Ad ogni sistema algebrico completo di varietà a $p-1$ dimensioni contenuto in V_p si possono associare sulla curva C due classi ($\pm S$) di corrispondenze simmetriche dotate di valenze tutte di ugual segno e inversamente ([33]).

Osservazione I. Il sistema algebrico di V_p associato alle due classi di corrispondenze a valenza ordinaria $\pm k$ è manifestamente il sistema $\{k\Theta\}$.

Osservazione II. Riprendendo le considerazioni geometriche esposte al n.° 1, e le notazioni ivi adoperate, si può osservare che, se μ_1 è il numero base delle corrispondenze simmetriche di C, queste formano una rete di specie μ_1 assimilabile all'insieme dei punti razionali di un S_{μ_1-1} razionale dello spazio Σ'. Poichè il punto O di S_{μ_1-1} immagine delle corrispondenze a valenza ordinaria appartiene alla regione I, è chiaro (facendo muovere con continuità una retta reale di S_{μ_1-1} intorno ad O) che la sezione di F con S_{μ_1-1} è una ipersuperficie f di ordine p di questo spazio contenente infiniti punti reali, dei quali quelli appartenenti alla falda $F^{(1)}$ costituiscono una falda reale $f^{(1)}$ di f, atta a dividere i punti reali di S_{μ_1-1} in due regioni i, e corrispondenti alle regioni I, E di Σ'.

Da quanto precede risulta dunque che i punti razionali di S_{μ_1-1} interni ad $f^{(1)}$ e quelli eventualmente appartenenti ad $f^{(1)}$ sono immagini dei sistemi algebrici di V_{p-1} contenuti in V_p, un tal punto rappresentando un sistema e tutti i suoi multipli.

([33]) Più precisamente la classe (S) definita, con le notazioni di Hurwitz, dagl'interi caratteristici

$$g_{ik} = -g_{ki} = m_{ik}, \quad G_{ik} = h_{ki} = m_{i,p+k}, \quad H_{ik} = -H_{ki} = -m_{p+i,p+k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

ha le valenze tutte negative; quella opposta ha le valenze tutte positive. Omettiamo la facile dimostrazione.

b) **Le corrispondenze della curva C e le trasformazioni unirazionali di V_p.**

24. Sia data su C una corrispondenza non speciale T rappresentata dalle formole di Hurwitz

$$j_i(x'_1) + j_i(x'_2) + \cdots + j_i(x'_n) = \pi_{i1} j_1(x) + \cdots + \pi_{ip} j_p(x) + \pi_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots p)$$

e sia $\Delta \neq 0$ il suo determinante caratteristico.

È noto che, avendo le u_i il significato del n.° precedente, le equazioni

$$u'_i = \pi_{i1} u_1 + \pi_{i2} u_2 + \cdots + \pi_{ip} u_p + \pi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{13}$$

definiscono una trasformazione unirazionale di V_p, nella quale al punto (u) corrisponde *un* punto (u'), e ad (u') corrispondono Δ punti (u). Moltiplicando la detta trasformazione per le trasformazioni ordinarie di 1ª specie di V_p, cioè variando nelle (13) con continuità le π_i, si ottengono ∞^p trasformazioni, al cui insieme daremo il nome di *schiera*. Si ha dunque:

Ad ogni classe (T) *di corrispondenze sulla curva* C, *avente il determinante caratteristico* $\Delta \neq 0$, *si può associare una schiera di trasformazioni unirazionali* $(1, \Delta)$ *della varietà di Jacobi* V_p *e inversamente.*

Sostituendo alle variabili u_i delle nuove variabili U_i, che siano convenienti combinazioni lineari delle u_i, è chiaro che alle (13) può darsi la forma

$$U'_i = \rho_i U_i + k_i . \tag{14}$$

I numeri ρ_i, che coincidono a meno del segno con le valenze di T, si diranno i *moltiplicatori* della trasformazione (13) ed il numero di volte che un moltiplicatore è ripetuto nelle (14), cioè la dimensione della corrispondente valenza di T, si dirà la *molteplicità* del moltiplicatore stesso. Ad un moltiplicatore di molteplicità q è associato un sistema di q variabili, alle quali possono sempre sostituirsi q loro combinazioni lineari indipendenti, senza che muti la forma delle (14).

Se l'equazione minima di T è irriducibile, nelle (14) è costante la molteplicità complessiva di ogni coppia di moltiplicatori immaginari coniugati ed è eguale al doppio della molteplicità di un moltiplicatore reale (n.° 16).

La schiera di trasformazioni associata alla classe $(-T)$, si deduce dalla (14) cambiando il segno ai moltiplicatori, cioè moltiplicandone le trasformazioni per una trasformazione ordinaria di 2.ª specie. Alla classe (T^{-1}) è associata una schiera di trasformazioni unirazionali $(1, \Delta)$

$$V'_i = \rho_i^{(o)} V_i + k_i \qquad (i = 1, 2, \dots p) \qquad (15)$$

coi moltiplicatori immaginari coniugati di quelli della schiera (14).

Due moltiplicatori di (14), (15) immaginari coniugati hanno la stessa molteplicità, ma sono diversi i sistemi di variabili ad essi associati. I sistemi medesimi coincidono quando e soltanto quando le corrispondenze T, T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra.

Osservazione. Supponiamo che T sia speciale, cioè sia $\Delta = 0$ e di caratteristica $2q$; le (14) assumono allora la forma

$$U'_1 = k_1, \dots\ U'_q = k_q,\ U'_{q+1} = \rho_{q+1} U_{q+1} + k_{q+1}, \dots\ U'_p = \rho_p U_p + k_p$$

e i sistemi di variabili $(U_1 \dots U_q)$ $(U_{q+1} \dots U_p)$ costituiscono su V_p due sistemi regolari riducibili d'integrali di 1.ª specie, fra loro complementari. La V_p contiene allora due congruenze abeliane di indice uno; una Σ_{p-q} di ∞^{p-q} varietà w_q $(U_{q+1} = \text{cost.}, \dots\ U_p = \text{cost.})$, l'altra Σ_q di ∞^q varietà w_{p-q} $(U_1 = \text{cost.}, \dots\ U_q = \text{cost.})$, ed ogni trasformazione della schiera (14) riferisce in modo unirazionale la congruenza Σ_{p-q} ed una varietà della congruenza Σ_q.

25. Supposto $\Delta \neq 0$, facendo descrivere al punto (u') una varietà del sistema $\{\Theta\}$, i Δ punti corrispondenti nella trasformazione (13) descrivono una varietà intermediaria del sistema $\{\Phi\}$, il quale è associato alle classi di corrispondenze simmetriche $(\pm\, T\, T^{-1})$ (34). Se dunque T è una corrispondenza Hermitiana di ordine k, cioè se $T\,T^{-1} \equiv k\,I$, in forza dell'Osservazione I del n.° 23, il sistema $\{\Phi\}$ coincide col sistema $\{k\,\Theta\}$. Abbiamo cioè:

Ad ogni corrispondenza Hermitiana di ordine k è associata una schiera di trasformazioni $(1, k^p)$ di V_p che trasforma ogni varietà del sistema $\{\Theta\}$ in una varietà del sistema $\{k\,\Theta\}$; in particolare ad ogni corrispondenza biunivoca singolare di C è associata una schiera di trasformazioni birazionali singolari di V_p che trasformano in sè il sistema $\{\Theta\}$ (35).

(34) Castelnuovo, loc. cit. (11).

(35) A. Comessatti, *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di* Jacobi [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. L (1915)].

c) Il teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici e le trasformazioni birazionali di V_p.

26. Sia dato sulla curva C un ordine irriducibile $o(T)$ e sia

$$\psi(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_{n-1} T + a_n I \equiv 0$$

l'equazione minima della corrispondenza generatrice. Le radici $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n$ di $\psi(z) = 0$ sono anche radici dell'equazione caratteristica di T ed hanno in essa la stessa molteplicità q (n.° 16).

Si consideri ora una corrispondenza S generica di $o(T)$. Se è $lS \equiv f(T)$, l'equazione caratteristica di S ammette pure, con la molteplicità q, le radici

$$\xi_1 = \frac{1}{l} f(\theta_1), \quad \xi_2 = \frac{1}{l} f(\theta_2), \ldots, \quad \xi_n = \frac{1}{l} f(\theta_n);$$

e al variare di S in $o(T)$ i numeri $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$, che sono interi algebrici, variano nei rispettivi corpi algebrici coniugati individuati da $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n$, ed assumono infiniti valori i cui insiemi indicheremo con $o_1 o_2 \ldots o_n$.

È chiaro che l'insieme o_1 (e lo stesso dicasi per $o_2 \ldots o_n$) gode delle seguenti proprietà:

a) In o_1 esistono n numeri indipendenti, cioè non legati da alcuna equazione lineare omogenea a coefficienti interi;

b) L'insieme o_1 si riproduce per addizione, sottrazione, moltiplicazione;

c) In o_1 esiste l'unità.

Secondo la denominazione usata nella teoria dei corpi algebrici ([36]), l'insieme o_1 costituisce dunque un *ordine* nel corpo algebrico individuato dalla radice θ_1; diremo perciò che $o_1 o_2 \ldots o_n$ sono gli *ordini coniugati* associati ad $o(T)$.

Ogni numero di o_1 individua una classe di corrispondenze appartenente ad $o(T)$. Invero, se S S' sono due corrispondenze di $o(T)$ associate allo stesso numero ξ di o_1, alla corrispondenza $S - S'$, che è pure di $o(T)$, è associato in o_1 il numero zero. Ma poichè in $o(T)$ non esistono corrispondenze speciali, dovrà essere $S - S' \equiv 0$, e quindi S S' appartengono alla medesima classe. E siccome ad ogni classe di corrispondenze su C si può

([36]) Cfr. ad es. P. Bachmann, *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper* (Leipzig, Teubner, 1905), pag. 54.

associare una schiera di trasformazioni unirazionali di V_p (n.° 24), ogni numero di o_1 individuerà una tale schiera. Sia $\xi = \xi_1$ un numero dell'ordine $o = o_1$ e $\xi_2 \dots \xi_n$ siano i suoi corrispondenti negli ordini coniugati $o_2 \dots o_n$; se S è una corrispondenza della classe individuata da ξ, l'equazione caratteristica di S ammette le radici $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ con la molteplicità q, ed allora il determinante caratteristico di S sarà

$$\Delta = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)^q = [N(\xi)]^q,$$

dove il simbolo $N(\xi)$ indica la *norma* del numero ξ, secondo la denominazione e la notazione della teoria dei corpi algebrici. Si ha dunque:

Ogni numero ξ dell'ordine o individua su V_p una schiera di trasformazioni unirazionali $\{1, [N(\xi)]^q\}$.

Le trasformazioni medesime risultano dunque birazionali quando è $[N(\xi)]^q = 1$, cioè quando $N(\xi) = 1$ se q è dispari, $N(\xi) = \pm 1$ se q è pari. Nel 1° caso ξ è una unità di o_1 di norma positiva, nel 2° caso è una unità qualsiasi. Ma quando q è dispari, le radici $\theta_1 \dots \theta_n$ dell'equazione fondamentale $\psi(z) = o$ sono tutte immaginarie ed ogni numero del corpo $\{\theta_1\}$, in particolare ogni unità di o_1, possiede norma positiva; si conclude pertanto:

Ogni unità dell'ordine o individua su V_p una schiera di trasformazioni birazionali.

In particolare le unità ± 1 di o individuano le due schiere di trasformazioni ordinarie di 2ª e di 1ª specie.

Poichè le trasformazioni di una schiera si deducono da una di esse moltiplicandola per le trasformazioni ordinarie di 1ª specie, in ogni schiera esiste *una* trasformazione che lascia fermo un punto prefissato P di V_p.

Se dunque G indica l'insieme delle trasformazioni birazionali associate alle unità di o e che lasciano fermo P, fra G e le unità di o esiste corrispondenza biunivoca; e la corrispondenza è tale che se G', G'' sono le trasformazioni di G corrispondenti alle unità η', η'' di o, all'unità $\eta' \eta''$ corrisponde la trasformazione $G' G''$. E poichè G contiene l'identità (corrispondente all'unità $+1$ di o) ed insieme ad una trasformazione contiene anche l'inversa (perchè l'unità reciproca di una unità di o è pure contenuta in o), si conclude che *G è un gruppo.*

La struttura di questo gruppo si deduce allora invocando il teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici, il quale vale, com'è noto [37], anche

---

[37] P. Bachmann, loc. cit. [36], Capitolo 8°.

per gli ordini contenuti in tali corpi. Indichi ν il numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici immaginarie coniugate dell'equazione minima di T; il teorema di Dirichlet afferma che, detto $m \geqq 2$ il numero di radici d'unità (unità ridotte) contenute in o, esiste in o un sistema di $\nu - 1$ *unità fondamentali* $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_{\nu-1}$ tale che tutte le unità η di o sono date ciascuna una sola volta dalla formula

$$\eta = \rho^i \sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \cdots \sigma_{\nu-1}^{n_{\nu-1}},$$

nella quale ρ indica una radice primitiva m^{ma} dell'unità, i percorre i valori interi da 1 ad m, ed $n_1\, n_2 \ldots n_{\nu-1}$ assumono tutti i possibili valori interi da $-\infty$ a $+\infty$. Si può dunque enunciare il teorema:

Sia data sulla curva C una corrispondenza singolare T che abbia l'equazione minima irriducibile. Se ν indica il numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici complesse coniugate di questa equazione, la varietà di Jacobi *V_p relativa a C possiede un gruppo G di trasformazioni birazionali permutabili, il quale è finito e ciclico se $\nu = 1$, è infinito discontinuo se $\nu > 1$. In questo 2° caso le trasformazioni di G sono date ciascuna una sola volta dalla formula*

$$G = g^r G_1^{n_1} G_2^{n_2} \ldots G_{\nu-1}^{n_{\nu-1}},$$

nella quale g indica una trasformazione ciclica di V_p avente un certo periodo m, $G_1\, G_2 \ldots G_{\nu-1}$ un sistema fondamentale di trasformazioni aperiodiche, il numero r percorre i valori interi da 1 ad m e gli esponenti $n_1\, n_2 \ldots n_{\nu-1}$ assumono tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$.

27. All'ordine $o(T^{-1})$ inverso di $o(T)$ corrisponde su V_p un altro gruppo G' di trasformazioni birazionali avente la medesima struttura del gruppo G. Se la corrispondenza T è funzione razionale della sua inversa, i due gruppi $G\, G'$ coincidono, ed allora se in una qualsiasi trasformazione di G si cambiano i moltiplicatori nei loro immaginari coniugati, si ottiene ancora una trasformazione di G.

Se T non è funzione razionale di T^{-1} i due gruppi $G\, G'$ sono *in generale* distinti, e G' si deduce da G mutando ancora i moltiplicatori di ogni trasformazione di G nei loro immaginari coniugati, ma al tempo stesso dovranno cambiarsi i sistemi di variabili associati ai detti moltiplicatori.

Nell'ipotesi che T non sia funzione razionale di T^{-1}, un caso in cui si può con certezza affermare che i due gruppi $G\, G'$ sono distinti, è quando fra le valenze di T ne esiste almeno una reale. Se infatti la radice θ_1 dell'equazione minima di T è reale, distribuiamo gli ordini coniugati $o_1\, o_2 \dots o_n$ in due gruppi A, B ponendo in A l'ordine o_1 e in B gli ordini rimanenti. Per il lemma fondamentale da cui muove il teorema di Dirichlet, si può affermare che esiste in $o = o_1$ una unità $\eta = \eta_1$ di modulo < 1 e tale che le corrispondenti unità $\eta_2\, \eta_3 \dots \eta_n$ degli ordini coniugati hanno tutte il modulo > 1.

L'unità η, essendo distinta dalle sue coniugate, può assumersi come numero generatore del corpo algebrico cui appartiene l'ordine o, ed allora una corrispondenza H di $o(T)$ associata ad η può assumersi come generatrice di $o(T)$; si avrà dunque $o(H) = o(T)$ e quindi $o(H^{-1}) = o(T^{-1})$. Segue di qui che la trasformazione di G' corrispondente ad H^{-1} non fa parte di G, chè, altrimenti, dovrebbe H^{-1} esser contenuto in $o(H)$, cioè $o(H^{-1}) = o(H)$, e quindi $o(T^{-1}) = o(T)$, contro il supposto.

Si supponga sempre che T non sia funzione razionale di T^{-1}, e si consideri l'ordine $o(T, T^{-1})$ comune a $o(T)$ e ad $o(T^{-1})$. Questo è irriducibile e coincidente con l'inverso; se dunque non è tutto di corrispondenze simmetriche, in esso il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche (n.° 22). Verificandosi questo secondo caso, può ancora affermarsi che $G\, G'$ sono distinti. Invero sia ν il numero delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti di $o(T, T^{-1})$; dovrà essere 2ν un divisore del grado n di $o(T)$, cioè $n = 2k\nu$ $(k > 1)$. L'equazione minima di grado 2ν della corrispondenza generatrice di $o(T, T^{-1})$ (per la quale può scegliersi una corrispondenza emisimmetrica) ha radici tutte immaginarie. Ed anche quella della corrispondenza T che genera $o(T)$ deve avere radici tutte immaginarie; chè, se essa ammettesse una radice reale, ogni corrispondenza di $o(T)$ avrebbe almeno una valenza reale, contro l'ipotesi che in $o(T)$ esistano corrispondenze emisimmetriche. Se dunque Γ indica il sottogruppo comune a G e a G', cioè il gruppo di trasformazioni birazionali di V_p associato all'ordine $o(T, T^{-1})$, il sistema fondamentale di Γ è composto di $\nu - 1$ unità indipendenti, mentre quello di G (o di G') è composto di $k\nu - 1$ unità. Si conclude che Γ è un sottogruppo proprio di G e quindi G e G' sono distinti.

28. Si consideri in particolare il caso di un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso.

Se $o(T)$ è tutto di corrispondenze simmetriche, gli ordini coniugati $o_1\, o_2 \dots o_n$ sono tutti reali.

Se $o\,(T)$ contiene anche corrispondenze emisimmetriche, il grado di $o\,(T)$ è pari ($n = 2\nu$) e gli ordini o_1, $o_2 \ldots o_{2\nu}$ sono due a due immaginari coniugati. E poichè $o\,(T)$ contiene l'inversa di ogni sua corrispondenza, ciascuno degli ordini suddetti contiene, insieme ad ogni suo numero, l'immaginario coniugato. Dunque gli ordini o_1, $o_2 \ldots o_{2\nu}$ coincidono due a due; precisamente ogni ordine coincide con l'immaginario coniugato.

L'ordine $o = o_1$ possiede nel 1° caso le sole unità ridotte ± 1, nel 2° caso può contenere anche unità ridotte immaginarie. In ogni caso sappiamo che esse sono in numero pari $2k$ e sono comuni a tutti gli ordini coniugati. Esse hanno poi rispetto alla curva C un importante significato geometrico. Infatti dalla proprietà dimostrata al n.° 22 si deduce che una corrispondenza H di $o\,(T)$ associata ad una unità ridotta di o deve essere Hermitiana del 1° ordine; e allora in una delle due classi ($\pm H$) o in entrambe, se la curva è iperellittica, è contenuta una corrispondenza biunivoca.

L'ordine $o\,(T)$ contiene dunque un gruppo finito di corrispondenze biunivoche; e l'ordine di questo gruppo sarà $2k$ ovvero k secondochè la curva è o non è iperellittica. Si può ora provare che il detto gruppo è ciclico.

Quando C è iperellittica la cosa è evidente perchè ad una unità ridotta ρ che sia radice primitiva $2k^{ma}$ dell'unità è associata una corrispondenza biunivoca la quale produce con le sue potenze tutte le corrispondenze del gruppo.

Se poi C non è iperellittica, una corrispondenza biunivoca U sarà associata ad una e ad una sola delle unità ridotte $\pm\rho$. Se dunque $n \leq k$ è il periodo di U, dovrà sussistere l'uguaglianza

$$(\pm\rho)^n = 1.$$

In questa dovrà manifestamente prendersi il segno inferiore, onde si avrà

$$\rho^n = (-1)^n.$$

Ma allora dovrà essere $n = k$, e inoltre k deve essere dispari. Si ha dunque:

Se nell'ordine di numeri o associato ad un ordine di corrispondenze $o\,(T)$, irriducibile e coincidente con l'inverso, sono contenute $2\,k$ unità ridotte, la curva C possiede un'involuzione ciclica generata da una corrispondenza biunivoca funzione razionale di T. L'involuzione è dell'ordine $2\,k$ o dell'ordine k secondochè la curva è o non è iperellittica.

29. Vogliamo infine rilevare una proprietà delle unità dell'ordine o associato ad $o(T)$, sempre nell' ipotesi che $o(T)$ sia irriducibile, coincidente con l'inverso e non costituito tutto di corrispondenze simmetriche.

Indichiamo con $o_1 o'_1, o_2 o'_2, \ldots, o_\nu o'_\nu$ gli ordini coniugati associati ad $o(T)$, essendo o'_k l'ordine immaginario coniugato di o_k e sia

$$\eta = \rho^r \sigma_1^{n_1} \cdot \sigma_2^{n_2} \cdots \sigma_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

una qualsiasi unità di o_1; rappresentiamo inoltre con η_0 e con $(\sigma_i)_0$ i numeri immaginari coniugati di η e σ_i. Poichè, come abbiamo sopra notato, i due ordini $o_1 o'_1$ coincidono, in o_1 sarà contenuta anche l'unità

$$\eta_0 = \rho^{-r} (\sigma_1)_0^{n_1} (\sigma_2)_0^{n_2} \cdots (\sigma_{\nu-1})_0^{n_{\nu-1}}$$

immaginaria coniugata di η; onde si avrà l'uguaglianza

$$\rho^{-r} (\sigma_1)_0^{n_1} \cdots (\sigma_{\nu-1})_0^{n_{\nu-1}} = \rho^s \sigma_1^{m_1} \cdots \sigma_{\nu-1}^{m_{\nu-1}} \tag{16}$$

in cui $s, m_1, \ldots, m_{\nu-1}$ sono convenienti numeri interi; e questa continuerà a sussistere cambiando l'unità ridotta ρ e le unità σ_i nelle loro corrispondenti di uno qualunque degli ordini coniugati.

Indicando allora con r_{ik} il modulo dell'unità che corrisponde a σ_i nell'ordine o_k, dalla (16) si deduce

$$r_{1k}^{m_1-n_1} r_{2k}^{m_2-n_2} \cdots r_{\nu-1,k}^{m_{\nu-1}-n_{\nu-1}} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu);$$

e di qui, denotando l_{ik} il logaritmo di r_{ik}, si ottiene:

$$(m_1 - n_1) l_{1k} + (m_2 - n_2) l_{2k} + \cdots + (m_{\nu-1} - n_{\nu-1}) l_{\nu-1,k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Ma poichè, com'è noto, nella matrice $\| l_{ik} \|$ esiste un determinante di ordine $\nu - 1$ diverso da zero, dovrà essere

$$m_1 = n_1, \ m_2 = n_2, \ldots, \ m_{\nu-1} = n_{\nu-1},$$

e allora la (16) assume la forma

$$\eta_0 = \rho^{s-r} \eta,$$

e si ha la proprietà:

Nell'ordine di numeri o associato a un ordine irriducibile o (T), coincidente con l'inverso e non costituito tutto di corrispondenze simmetriche, ogni unità

moltiplicata per una conveniente unità ridotta produce l'unità immaginaria coniugata [38].

OSSERVAZIONE. Dal risultato precedente può dedursi una conseguenza notevole. Supposto che la curva non possegga corrispondenze biunivoche singolari, le sole unità ridotte dell'ordine o saranno ± 1, e quindi ogni altra unità η di o, soddisfacendo alla condizione $\eta_0 = \pm \eta$, sarà o reale o immaginaria pura. In tal caso dunque *ad ogni unità di o è associata in $o(T)$ una corrispondenza simmetrica o emisimmetrica.*

§ 7. APPLICAZIONE.

30. Si consideri una curva C del genere 2 *semplicemente singolare*, cioè tale che su di essa il numero base delle corrispondenze simmetriche sia $\mu_1 = 2$. Il numero base delle corrispondenze emisimmetriche può allora assumere i valori $\mu_2 = 0, 1, 2$ [39], e poichè l'omografia immagine della corrispondenza generica nel 1° caso è biassale, nel 2° è assiale e nel 3° possiede quattro punti uniti [40], si conclude che sopra la curva C le corrispondenze costituiscono un ordine, il quale è rispettivamente del 2°, del 3° e del 4° grado. Nel 2° caso, che si presenta quando esistono su C due integrali ellittici dei quali uno a moltiplicazione complessa, l'ordine è certo riducibile; nel 1° e nel 3° può essere riducibile o irriducibile, secondochè la curva possiede o no integrali ellittici.

Sia F la superficie di JACOBI relativa a C. Supposto che C non contenga integrali ellittici, e quindi si trovi nelle condizioni del 1° e 3° dei casi suaccennati, esiste su F una serie infinita

$$\ldots \Sigma_{-1}, \quad \Sigma_0, \quad \Sigma_1 \ldots \tag{1}$$

(38) Si può giungere più rapidamente al risultato nel seguente modo.

Nell'ordine o è contenuta insieme all'unità η anche l'unità immaginaria coniugata η_0 e quindi l'unità $\frac{\eta_0}{\eta}$. Ma avendo questa per modulo 1, una corrispondenza dell'ordine $o(T)$ ad essa associata deve essere Hermitiana del 1° ordine (n.° 22); donde segue che $\frac{\eta_0}{\eta}$ è una unità ridotta.

(39) C. ROSATI, loc. cit. (1) a), Parte 2ª, n.° 16.

(40) G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916)], Parte 2ª, n.° 11.

di sistemi algebrici di dimensione, grado, indice e genere due, composti di curve irriducibili prive di punti multipli, e i sistemi di questa serie possono coordinarsi alle soluzioni intere (z, k) dell'equazione di Pell

$$z^2 - \Delta k^2 = 4$$

nella quale Δ indica l'*invariante* (intero, positivo e non quadrato) della relazione singolare di Humbert che lega i periodi normali g, h, g' della C. E se F si trova nelle condizioni del 1° caso ($\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$), i sistemi (I), o sono tutti di curve birazionalmente identiche, ovvero si distribuiscono in due serie distinte di curve birazionalmente identiche (di guisa che F risulta superficie di Jacobi di due curve non identiche birazionalmente), secondochè la forma $z^2 - \Delta k^2$ può o non può rappresentare il numero -4 [41]. Cerchiamo ora di completare questo risultato esaminando il caso $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$.

31. Quando è $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, le corrispondenze della curva costituiscono un ordine irriducibile $o(T)$ del 4° grado, nel quale è contenuto un ordine irriducibile del 2° grado $o(S)$, formato dalle corrispondenze simmetriche di $o(T)$. L'omografia immagine di S è biassiale ed ha per rette di punti uniti due rette distinte, reali e non razionali, appoggiate alle rette $\alpha\,\alpha_0$ dei periodi; l'omografia immagine di T ha soltanto quattro punti uniti nei punti in cui le rette suddette si appoggiano ad $\alpha\,\alpha_0$. Le radici dell'equazione caratteristica di una corrispondenza variabile in $o(T)$ sono interi algebrici che descrivono quattro ordini $o_1\,o'_1$, $o_2\,o'_2$ nei quattro corpi algebrici coniugati definiti dalle radici dell'equazione minima di T, e l'ordine o_1 coincide col suo immaginario coniugato o'_1, e così o_2 coincide con o'_2. Le due radici distinte dell'equazione caratteristica di una corrispondenza variabile in $o(S)$, le quali, cambiate di segno, dànno poi le valenze $\rho_1\,\rho_2$ della corrispondenza medesima, descrivono due ordini $\omega\,\omega'$ del corpo quadratico reale definito dall'equazione minima di S. Poichè una corrispondenza di $o(T)$ che abbia una valenza reale è simmetrica, ω sarà costituito da tutti e soli i numeri reali dell'ordine $o_1 = o'_1$, e così ω' da tutti e soli i numeri reali dell'ordine $o_2 = o'_2$. E siccome ogni corrispondenza simmetrica di valenze $\rho_1\,\rho_2$ ne ammette una (complementare) di valenze $\rho_2\,\rho_1$ [42], si deduce che ω coincide con ω' e che quindi gli ordini $o_1\,o'_1\,o_2\,o'_2$ contengono gli stessi numeri reali.

---

[41] Loc. cit. [2].

[42] Se infatti $S_1^2 + a_1 S_1 + a_2 I \equiv 0$ è l'equazione minima della corrispondenza S_1 di $o(S)$ avente le valenze $\rho_1\,\rho_2$, la corrispondenza $S_2 \equiv -(S_1 + a_1 I)$, complementare di S_1, possiede le valenze $\rho_2\,\rho_1$.

Quando i due numeri $\rho_1\,\rho_2$ corrispondenti in $\omega\,\omega'$ sono positivi, esiste su C un sistema continuo di corrispondenze *coincidenti* con le loro inverse dotato delle valenze $\rho_1\,\rho_2$, cioè un sistema continuo di serie γ_2^1 con quelle valenze; e se inoltre è $\rho_1\,\rho_2=1$, cioè se ρ_1 è una unità positiva e di norma positiva dell'ordine ω, il detto sistema continuo ha il genere virtuale 2, ed ha per immagine su F uno dei sistemi della serie (I), e inversamente ([43]).

I sistemi (I) *possono dunque coordinarsi alle unità positive e di norma positiva dell'ordine* ω ([44]).

32. Ricerchiamo ora direttamente sulla curva i sistemi continui di serie γ_2 ad essa birazionalmente identiche ed aventi il genere virtuale 2.

A tal uopo si consideri in $o(T)$ la classe di corrispondenze associata ai numeri $\eta\,\eta_0\,\eta'\,\eta'_0$ degli ordini coniugati $o_1\,o'_1\,o_2\,o'_2$; in essa quelle soddisfacenti alla condizione di avere il 1° indice uguale a 2, formano un sistema continuo ∞^2, (T), che induce sulla curva un sistema continuo ∞^2 di serie γ_2. Se h è l'indice della γ_2 generica di questo sistema ed S è la corrispondenza simmetrica (h, h) che nasce dalla serie stessa, si avrà

$$T^{-1}\,T=S+h\,I. \tag{17}$$

Poichè alla T^{-1} sono associati i numeri $\eta_0\,\eta\,\eta'_0\,\eta'$ degli ordini coniugati $o_1\,o'_1\,o_2\,o'_2$, la $T^{-1}\,T$ avrà le valenze $-\eta\,\eta_0$, $-\eta'\,\eta'_0$ ed allora, per una nota relazione ([45]), sarà $\eta\,\eta_0+\eta'\,\eta'_0$ il difetto di equivalenza della γ_2. Ma questo, per il fatto che la γ_2 è stata scelta genericamente nel suo sistema continuo, coincide con l'indice, onde si avrà $h=\eta\,\eta_0+\eta'\,\eta'_0$; dalla (17) allora si deduce che le valenze di S cioè della γ_2 sono

$$\rho_1=h-\eta\,\eta_0=\eta'\,\eta'_0,\quad \rho_2=h-\eta'\,\eta'_0=\eta\,\eta_0.$$

Se ora supponiamo che il sistema continuo di γ_2 indotto da (T) abbia il genere virtuale 2, dovrà aversi

$$\rho_1\,\rho_2=\eta'\,\eta'_0\,\eta\,\eta_0=1,$$

cioè η dovrà essere una unità dell'ordine o ([46]), e inversamente. Dunque:

([43]) C. Rosati, loc. cit. ([2]), n.° 4.

([44]) Nel caso $\mu_1=2$, $\mu_2=0$ il risultato di Comessatti e mio può dunque enunciarsi così: *I sistemi (I) sono tutti di curve birazionalmente identiche o si distribuiscono in due serie distinte di curve birazionalmente identiche, secondochè esistono o no nell'ordine* ω *unità di norma negativa.*

([45]) C. Rosati, loc. cit. ([1] *d*), n.° 8.

([46]) Si avverta che, essendo i corpi coniugati cui appartengono gli ordini $o_1\,o'_1\,o_2\,o'_2$ tutti immaginari, ogni unità di o ha norma positiva.

I sistemi continui (T) che inducono sistemi continui di γ_2 di genere virtuale 2, sono tutti e soli quelli associati alle unità η dell'ordine o; le γ_2 di un tal sistema continuo hanno poi nell'ordine ω la valenza $(\eta\,\eta_0)^{-1}$.

È poi chiaro che lo stesso sistema continuo di γ_2 è pure indotto da tutti e soli i sistemi associati alle unità che si deducono moltiplicando η per una qualsiasi unità ridotta dell'ordine *o*.

33. Si tratta ora di decidere se i sistemi di γ_2 indotti dai sistemi (T) esauriscono o no tutti i sistemi di γ_2 di genere virtuale 2. Conviene perciò distinguere due casi, secondochè C non possiede ovvero possiede corrispondenze biunivoche singolari.

1.° Caso: *La curva C non possegga corrispondenze biunivoche singolari.* Le unità dell'ordine *o* sono allora espresse dalla formula

$$\eta = \pm\, \sigma^n;$$

e poichè, in virtù dell'osservazione in fine al n.° 29, l'unità fondamentale σ deve essere o reale (e in tal caso può supporsi senz'altro positiva) ovvero immaginaria pura, è opportuno suddividere questo caso nei seguenti:

a) *L'unità fondamentale σ sia reale (positiva) ed abbia nell'ordine ω norma negativa.*

I sistemi continui (T), di cui si è detto precedentemente, possono ordinarsi in una serie infinita

$$\ldots (\pm\, T_{-1}),\quad (\pm\, T_0),\quad (\pm\, T_1) \ldots \tag{II}$$

nella quale $(\pm\, T_n)$ indica i sistemi associati alle unità $\pm\,\sigma^n$; e poichè le unità positive e di norma positiva di ω sono date dalla formula

$$\xi = \sigma^{2n},$$

i sistemi continui di γ_2 aventi il genere virtuale 2 possono ordinarsi nella serie infinita

$$\ldots (\gamma_2)_{-1},\ (\gamma_2)_0,\ (\gamma_2)_1, \ldots \tag{III}$$

nella quale $(\gamma_2)_n$ è il sistema le cui serie hanno in ω la valenza σ^{2n}.

Ma per ciò che si è detto al n.° 32, i sistemi $(\pm\, T_n)$ inducono sulla curva un sistema continuo di serie aventi in ω la valenza $(\sigma^n\,\sigma_0{}^n)^{-1} = \sigma^{-2n}$; tale sistema è dunque quello che nella serie (III) ha l'indice $-n$, e variando n

da $-\infty$ a $+\infty$ si conclude che in questo caso tutti i sistemi (I) sono costituiti da curve birazionalmente identiche a C.

b) *L'unità fondamentale σ sia reale (positiva) ed abbia nell'ordine ω norma positiva.*

Le unità di ω hanno ora tutte norma positiva, e quelle positive sono date dalla formula

$$\xi = \sigma^n.$$

Questo caso differisce dunque dal precedente per il solo fatto che nella serie (III) il sistema $(\gamma_2)_n$ è costituito da serie aventi in ω la valenza σ^n. Ma allora il sistema indotto da $(\pm T_n)$ è quello che in (III) ha l'indice $-2n$, e variando n da $-\infty$ a $+\infty$ si conclude che in (III) sono birazionalmente identiche a C tutte e sole le serie con indice pari.

Se poi si considera la curva Γ i cui punti corrispondono ai gruppi di una serie del sistema $(\gamma_2)_1$, si vede che Γ non è birazionalmente identica a C possiede la stessa superficie di JACOBI F, ed a Γ sono birazionalmente identiche le serie che in (III) hanno l'indice dispari. I sistemi (I) si ripartiscono dunque in due serie distinte di curve birazionalmente identiche.

c) *L'unità fondamentale σ sia immaginaria pura.*

Le unità di ω, essendo associate a corrispondenze simmetriche che sono quadrati di corrispondenze emisimmetriche, hanno tutte norma positiva, e quelle che sono inoltre positive sono espresse dalla formula

$$\xi = (-1)^n \sigma^{2n};$$

dobbiamo dunque supporre che nella serie (III) il sistema $(\gamma_2)_n$ sia costituito da serie che hanno in ω la valenza $(-1)^n \sigma^{2n}$. Ma il sistema indotto da $(\pm T_n)$ è costituito da serie che hanno in ω la valenza $(\sigma^n \sigma_0^n)^{-1} = (-1)^{-n} \sigma^{-2n}$; tale sistema è dunque quello che in (III) ha l'indice $-n$, e variando n da $-\infty$ a $+\infty$ si conclude in questo caso che i sistemi (I) sono tutti di curve birazionalmente identiche a C.

2.° CASO: *La curva C possegga corrispondenze biunivoche singolari.*

È noto che una curva di genere 2, che sia priva d'integrali ellittici e possegga corrispondenze biunivoche singolari, è necessariamente quella inerente al radicale quadratico $\sqrt{x^5+1}$ (47). Sopra una tal curva i numeri base

(47) G. HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5me série, 2me Mémoire, t. VI (1900), nn. 231 e seguenti.

delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sono rispettivamente $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 2$, ed essa possiede una involuzione ciclica generata da una corrispondenza biunivoca a periodo 10.

Le unità di o sono allora date da

$$\eta = \rho^r \sigma^n, \tag{18}$$

dove ρ indica una radice 10^{ma} primitiva dell'unità, σ l'unità fondamentale, r varia da 1 a 10 ed n percorre tutti gl'interi da $-\infty$ a $+\infty$.

Poichè ogni unità di o, moltiplicata per una conveniente unità ridotta, produce l'unità immaginaria coniugata (n° 29), si dovrà avere la relazione

$$\sigma_0 = \rho^i \sigma. \tag{19}$$

Dico che in questa l'esponente i deve essere pari.

Cerchiamo infatti la formula che esprima tutte le unità dell'ordine ω. Perchè nella (18) η risulti reale dovrà aversi

$$\rho^{-r} \sigma_0^n = \rho^r \sigma^n;$$

da cui, per la (19), si ottiene

$$\rho^{-r+in} = \rho^r$$

e quindi

$$i\,n \equiv 2\,r \pmod{10}.$$

Se dunque i fosse dispari, dovrà essere $n = 2\,m$ ed $r \equiv i\,m \pmod{5}$, cioè $r = i\,m + 5\,\nu$, essendo ν un intero qualsiasi. Le unità di ω sarebbero dunque date dalla formula

$$\xi = \rho^{im+5\nu} \sigma^{2m} = \pm (\rho^i \sigma^2)^m = \pm (\sigma\,\sigma_0)^m.$$

Se ora H indica una corrispondenza di $o(T)$ associata a σ, alla corrispondenza simmetrica $H^{-1} H$ è associato $\sigma\,\sigma_0$; e poichè le valenze di $H^{-1} H$ sono di ugual segno (n.° 3), se ne trae che $(\sigma\,\sigma_0)$ e quindi tutte le unità di ω avrebbero norma positiva.

D'altra parte è noto ([48]) che, con una scelta conveniente dei periodi normali di C, la relazione di Humbert che lega i periodi stessi assume la forma

---

([48]) G. Humbert, loc. cit. ([46]).

$g = h + g'$ ed ha per invariante 5. Poichè la forma $z^2 - 5k^2$ può rappresentare -4, si deduce che ω contiene unità di norma negativa.

La contradizione cui siamo giunti prova dunque che i deve essere pari. Posto allora $i = 2l$, noi potremo assumere in o come unità fondamentale l'unità reale $\rho^l \sigma$, cioè supporre che in (18) σ sia reale. Allora σ risulta unità fondamentale di ω, e dovrà quindi avere in ω norma negativa. Si conclude pertanto che le unità di ω che sono positive e di norma positiva sono espresse dalla formula

$$\xi = \sigma^{2n}.$$

Allora, con ragionamento analogo a quello dei casi precedenti, si ottiene che i sistemi Σ_i della serie (I) sono in questo caso tutti di curve birazionalmente identiche.

Il risultato a cui conduce la precedente discussione è dunque il seguente:

Sia F la superficie di Jacobi *di una curva C priva d'integrali ellittici e coi numeri base $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 2$, e si considerino i due ordini o ed ω rispettivamente associati a tutte le corrispondenze e alle corrispondenze simmetriche di C. Se le unità di o sono tutte reali (cioè coincidono con quelle di ω) ed hanno in ω norma positiva, la F è pure superficie di* Jacobi *per un'altra (ed una sola) curva Γ non birazionalmente identica a C; diversamente, F è superficie di* Jacobi *per la sola curva C.*

Pisa, settembre 1921.