Bemerkung über das parabolische Strahlennetz und das zugehörige Zylindroid.

Von **Konrad Zindler** in Innsbruck.

Wenn ein hyperbolisches Strahlennetz mit endlichen Brennlinien oder ein elliptisches Netz (mit Ausschluß des Umdrehungsnetzes) oder ein parabolisches Netz (d. h. ein solches, dessen Brennlinien zusammenfallen) mit endlicher Brennlinie Träger eines Büschels linearer Komplexe ist, so liegen deren Achsen bekanntlich[1]) auf einem eigentlichen Zylindroid. Dieses möge das zugehörige Zylindroid des Netzes heißen; seine Gleichung kann geschrieben werden:

$$(x^2 + y^2)\, z = 2\, h\, x\, y. \tag{1}$$

Umgekehrt gehören so zu einem Zylindroid ∞^1 hyperbolische, ∞^1 elliptische und zwei parabolische Strahlennetze. Die ersteren sind durch die Bestimmung anschaulich beschrieben, daß die Brennlinien eines jeden von ihnen zwei solche Erzeugende des Zylindroids sind, die auf verschiedenen Seiten der Mittelebene von dieser gleich weit abstehen. Auch der Zusammenhang des Zylindroids mit den zugehörigen elliptischen Netzen wurde schon untersucht;[2]) es werde nun dasselbe für die parabolischen Netze nachgetragen:

Ein parabolisches Netz besteht aus der Gesamtheit der Strahlenbüschel, deren Scheitel auf der Brennlinie b eine Punktreihe P bilden, während ihre Ebenen E ein dieser Reihe projektiv zugeordnetes Büschel mit der Achse b bilden. Dem unendlich fernen Punkt der Reihe entspricht eine Ebene E_u, der hiezu senkrechten Ebene E_c, der „Zentralebene" dieser „Korrelation um b" entspricht ein Punkt C, der „Mittelpunkt" des parabolischen Netzes. Zählt man die Winkel α im Ebenenbüschel von E_c, die Entfernungen t auf b von C aus, so ist die Zuordnung zwischen P und E durch

$$tg\, \alpha = K t \tag{2}$$

dargestellt.[3])

---

[1]) Vgl. z. B. J. Plücker, Phil. Trans. 155 (1865), S. 7[illegible]6, und K. Zindler, Liniengeom. 1 (1902), § 74.

[2]) K. Zindler, a. a. O., S. 295 f.

[3]) a. a. O., S. 164.

Anderseits fallen die Brennlinien der beiden parabolischen Netze, die zu einem Zylindroid gehören, in die Haupterzeugenden desselben (bei der Darstellung 1) in die X- und die Y-Achse; die Mittelpunkte der Netze fallen in den Ursprung und die Zentralebenen in die XZ- und die YZ-Ebene. Es handelt sich also nur noch darum, den Zusammenhang zwischen der Konstanten K der Korrelation des Netzes und der für das Zylindroid charakteristischen Konstanten h zu ermitteln.

Dazu dient am einfachsten die Bemerkung, daß die Ebenen der erwähnten Strahlbüschel Berührungsebenen des Zylindroids sind, wie sofort einleuchtet, wenn man das parabolische Netz als Grenzfall eines hyperbolischen zum selben Zylindroid gehörigen Netzes betrachtet. Denken wir uns h positiv und ein Rechtssystem (Enz. d. Math. III, A B 7, p. 619) zu Grunde gelegt, so dreht sich, während ein Punkt die X-Achse im positiven Sinn durchläuft, die Berührungsebene im negativen Sinn, beim Durchlaufen der Y-Achse jedoch im positiven Sinn. Für das parabolische Netz, dessen Brennlinie in die X-Achse fällt, wird also K negativ sein, für das andere Netz positiv; übrigens werden die absoluten Beträge beider Werte gleich sein, weil die beiden Netze durch Spiegelung an der Ebene $x = y$ sich vertauschen. Sucht man nun etwa für das erste Netz unter den erwähnten Berührungsebenen des Zylindroids diejenige, die mit der XY-Ebene einen Winkel von 45^0 einschließt, so ergibt sich für ihren Berührungspunkt $x = 2h$, und hieraus folgt als gesuchte Beziehung:

$$2hK = \pm 1. \tag{3}$$