

# ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N<sup>o</sup> 2429.

## Ueber Prof. Gyldén's intermediäre Bahnen.

Von Prof. *T. N. Thiele*, Director der Sternwarte in Kopenhagen.

Auf der letzten Versammlung der Astronomischen Gesellschaft (Vierteljahrsschrift 16, 296) und durch mehrere andere Publicationen hat Prof. Gyldén eine Idee an's Licht gebracht, die unter dem Namen von intermediären Bahnen gewiss fortdauernd der Astronomie grosse Dienste leisten wird. Gyldén hat aber diese Idee an sein wohlbekanntes und an sich sehr löbliches Bestreben, die elliptischen Functionen für die Astronomie nutzbar zu machen, innigst angeknüpft, und da dieses Band mir weder nothwendig noch nützlich vorkommt, werde ich mich bestreben, die beiden Sachen etwas von einander zu trennen.

Der Begriff einer intermediären Bahn enthält folgende Forderungen. Sie soll erstens die Bewegung eines Himmelskörpers ohne enge Begrenzung der Zeiten so darstellen, dass die übrig bleibenden Abweichungen als kleine Grössen betrachtet werden können; zweitens soll diese Forderung, welcher die Kepler'schen Bahnen, wie Gyldén zeigt, nicht genügen, doch durch solche Wahl der hypothetischen Form der Kräfte erfüllt werden, dass sich die Differentialgleichungen der Bewegung in der intermediären Bahn vollständig und strenge integrieren lassen.

Um diesen Forderungen zu genügen, setzt Gyldén zuerst voraus, dass man sich damit begnügen kann, die Bewegung in der variablen Bahnebene durch die intermediäre Bahn darzustellen. Damit wäre es zunächst die Aufgabe, solche Formen für  $\Phi$  zu suchen, die es erlauben, die Differentialgleichungen

$$\frac{d\left(r^2 \frac{dv}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\Phi}{dv}$$

und

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^3} \left(r^2 \frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{d\Phi}{dr}$$

zu integrieren; unter den sich darbietenden Formen müssten dann solche gesucht werden, die den factischen Bewegungen am besten entsprechen. Gyldén beschränkt die Aufgabe ferner, indem er die Zeit  $t$  als unabhängige Variable durch eine reducirte Zeit  $\tau$  ersetzt, so dass man sich erlauben kann, für die intermediäre Bahn

$$\frac{d\left(r^2 \frac{dv}{d\tau}\right)}{d\tau} = 0$$

und

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{1}{r^3} \left(r^2 \frac{dv}{d\tau}\right)^2 = R$$

zu setzen, wo jetzt  $R$  statt  $\Phi$  so zu bestimmen ist, dass die Gleichungen

$$r^2 \frac{dv}{d\tau} = k \sqrt{p}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{k^2 p}{r^3} = R$$

integriert werden können. So weit bin ich ganz einverstanden. Ich vermute aber, dass es, um seine Idee zu realisiren, oft nothwendig sein wird,  $R$  andere Formen zu geben als solche, wo einfach  $R = f(r)$ ; und, wenn man sich auf diese Annahme beschränken will, so meine ich, dass nicht diejenigen Formen für die Abhängigkeit zwischen  $r$  und  $R$ , die Gyldén empfiehlt und die auf elliptische Functionen führen, anzuwenden sind, sondern eine andere Form, die schon Newton (Principia erstes Buch neunte Section) für einen ganz ähnlichen Zweck empfohlen hat und die einfach mit trigonometrischen Functionen in ganz ähnlicher Weise, wie die Kepler'schen Bahnen, behandelt werden kann.

Die allgemeinere Annahme  $R = f(r)$  erzeugt, wenn  $f$  eine eindeutige Function bezeichnet, eine augenfällige Eigenthümlichkeit der Bahnformen. Man findet durch erste Integration

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{k^2 p}{r^2} + 2 \int f(r) dr = 0,$$

also eine Abhängigkeit zwischen  $r$  und  $\frac{d\tau}{dr}$  und ebenso, weil

$$\frac{dv}{dr} = k \frac{\sqrt{p}}{r^2} \frac{d\tau}{dr}$$

auch eine Gleichung einfach zwischen  $r$  und  $\frac{dv}{dr}$ .

Es sind also für jedes  $r$  die Differentialquotienten von  $v$  und  $\tau$  mit Rücksicht auf  $r$  der Grösse nach unzweideutig gegeben, nur die Vorzeichen wechseln und zwar für  $\frac{dv}{dr}$  und  $\frac{d\tau}{dr}$  gleichzeitig; der Werth von  $r$  ist bei den darzustellenden Bewegungen zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen. Deshalb muss die Bewegung eine solche sein, dass nach einer constanten Zwischenzeit  $r$  wieder dieselben

Werthe erhält, während  $v$  ebenso wie die Zeit einen constanten Zuwachs erhalten hat. Die Bahn besteht aus lauter congruenten und symmetrischen Theilen, es wird also immer bei intermediären Bahnen dieser Art die Bewegung eine rein periodische sein,  $\tau$  wird in dem Ausdrucke für  $r$  immer nur unter periodischen Functionszeichen vorkommen, aber die Bahn wird im Allgemeinen nicht in sich selbst zurücklaufen, sondern eine stetige Drehung erfahren, durch welche die der Zeit proportionalen säcularen Störungen des Perihels dargestellt werden können. Andere säculare Störungen können aber durch diese Annahme für  $R$  nicht berücksichtigt werden; wenn daher z. B. die Veränderungen der Excentricität beträchtlich sind, muss man diese durch ganz andere intermediäre Bahnen darzustellen suchen.

Durch verschiedene Transformationen der Coordinaten  $r$  und  $v$  kann man die oben erwähnten intermediären Bahnen auf geschlossene Curven reduciren; die einfachste Art ist, dass man alle Winkel  $v$  mit einem constanten Factor multiplicirt. Dann zeigt sich die Wirkung der verschiedenen Wahl von  $f(r)$  in der Form der reducirten geschlossenen Bahn. Da aber der Factor der Winkel immer nur sehr wenig von 1 verschieden sein wird, darf auch diese reducirte Bahn nur sehr wenig von der Kepler'schen Ellipse abweichen, und ihre kleinen Verschiedenheiten sind für den Zweck der intermediären Bahn ganz ohne Bedeutung, da sie durch kleine und periodische Perturbationen dargestellt werden können. Wenn also die Einwirkung einer Centralmasse überwiegt, hat man nur

$$R = -\frac{k^2}{r^2} + h\varphi(r)$$

zu setzen, wo  $h$  sehr klein ist, aber es ist ganz gleichgültig, wie man  $\varphi$  annimmt; die Wahl dieser Function wird nur aus Bequemlichkeitsrücksichten bestimmt, denn jede Wahl giebt durch Bestimmung von  $h$  die Bewegung des Perihels und keine kann andere der grossen Säcularstörungen darstellen. Gylden wählt hier entweder  $\varphi(r) = r$  oder  $\varphi(r) = r^{-4}$  und zeigt, dass diese beiden Formen die vollständige Integration durch elliptische Functionen erlauben. Mit demselben Mittel könnten auch  $\varphi(r) = ar + b + cr^{-3}$  und  $\varphi(r) = dr^{-3} + er^{-4} + fr^{-5}$  behandelt werden; da aber nur für eine neue Constante  $h$  sich Verwendung findet, wird man mit jeder der Gylden'schen Formeln dasselbe mit weniger Complication erhalten, als mit diesen beiden allgemeineren Formeln.

Wenn es keine einfachere Formel für  $\varphi$  gäbe, als solche, die auf elliptische Functionen führen, dann wäre seiner Wahl der Form ganz beizupflichten. Aber Newton's Form

$$\varphi(r) = h \frac{k^2}{r^3} \quad *)$$

\*) Identisch mit:  $\frac{d^2 p_0}{dv^2} + (1-\beta_1) p_0 = 0$  bei Gylden V. J. S. 16, 299.

lässt sich ganz wie der reine Kepler'sche Fall durch trigonometrische Functionen integriren, wie die Differentialgleichungen

$$r^2 \frac{dv}{d\tau} = k\sqrt{p}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{k^2 p}{r^3} + \frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2 h}{r^3} = 0$$

sehr einfach zeigen. Multiplicirt man die erstere mit  $\sqrt{1 + \frac{h}{p}}$  und setzt  $w = v \sqrt{1 + \frac{h}{p}}$ ,  $h + p = q$ , dann werden sie

$$r^2 \frac{dw}{d\tau} = k\sqrt{q}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{k^2 q}{r^3} + \frac{k^2}{r^2} = 0$$

entsprechen also der reducirten Bewegung eines Punktes  $(r, w)$  in einer Kepler'schen Ellipse, deren halber Parameter nur  $q$  statt  $p$  ist. Die exacten Formeln der Bewegung in dieser intermediären Bahn sind also:

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = k(t - T) \left( \frac{1 - e^2}{h + p} \right)^{3/2}$$

$$\tan^{1/2} \sqrt{\frac{p}{p + h}} (v - \pi) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan^{1/2} \varepsilon$$

$$r = \frac{p + h}{1 - e^2} (1 - e \cos \varepsilon).$$

Ich behaupte nicht, dass diese Form der intermediären Bahnen immer genügen werde; wenn sie aber nicht genügt, dann werden auch die Gylden'schen Formen nicht ausreichen, sondern man muss dann, die Annahme  $R = f(r)$  verlassend, ganz andere Auswege suchen. Für elliptische Functionen wird sich hier kaum Anwendung finden.

Dass Gylden aber diese Newton'sche Form der intermediären Bahn zu verwerfen scheint, erklärt sich nicht durch die geometrischen Eigenschaften derselben; es kommt auch die Frage in Betracht, ob sich die Constante  $h$  berechnen lässt. Denn die der Zeit proportionale Bewegung des Perihels hängt ja, wenn man sich  $R = f(r)$  in eine unendliche Reihe entwickelt vorstellt, nicht von einem einzelnen Gliede dieser Reihe ab, sondern von der Summe der ganzen Reihe, wenn sie auch durch geeignete Bestimmung eines Gliedes von der Newton'schen oder Gylden'schen Form compensirt werden kann.

Freilich können die Differentialgleichungen

$$r^2 \frac{dv}{d\tau} = k\sqrt{p} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{k^2 p}{r^3} = R$$

oder:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} + \frac{1}{r} + \frac{r^2 R}{k^2 p} = 0$$

nicht für  $R = f(r)$  allgemein in endlicher Form integrirt werden. Sie können aber, auch wenn nur  $R$  numerisch als Function von  $r$  gegeben ist, mit aller Schärfe numerisch integrirt werden und dieses genügt, weil man die ganze intermediäre Bahn kennt, sobald man nur einen halben Umlauf kennt. Eine solche Integration kann z. B. dadurch ausgeführt werden, dass man die Bahn in so viele Theile theilt, dass für jeden Theil die  $r$  sich so wenig ändern, dass sich  $R$  durch eine Interpolationsformel:

$$R = -\frac{k^2}{r^2} + \frac{k'^2 h'}{r^3}$$

mit den zwei Constanten  $k'$  und  $h'$  darstellen lässt.

So kann man eine beliebige intermediäre Bahn aus Stücken nahe zusammenfallender Newton'scher intermediärer

Bahnen bestimmen und die Bewegung des Perihels berechnen. Danach hat es keine Schwierigkeit, eine solche allzu complirte intermediäre Bahn durch eine Newton'sche oder Gylden'sche zu ersetzen, die die einzig nöthige Bedingung erfüllt, dass sie demselben Werthe der Perihelbewegung entspricht. Die Bestimmung der Constante  $h$  kann für die eine wie für die andere Form ausgeführt werden.

Gylden hat aber für seine Form gezeigt, wie man durch eine schöne Anwendung der Lamé'schen Differentialgleichung die Bewegung des Perihels berechnen kann. Solange für die Newton'sche Form kein ähnlicher Kunstgriff gefunden wird, hat die Gylden'sche Form jedenfalls einen Vorzug voraus; dieser scheint mir aber den Vortheil nicht aufwiegen zu können, welchen die Newton'sche Form sonst besitzt.

Kopenhagen 1882 März 26.

Thiele.

## Einige Bemerkungen zur Bonner Durchmusterung. (Fortsetzung von Bd. 100 Nr. 2396).

Von Dr. Heinrich Kreutz in Wien.

Während eines mehrwöchentlichen Aufenthaltes in Bonn habe ich die Originale der Bonner Durchmusterung wegen einer weiteren Reihe vermisster oder fehlerhafter Sterne zu Rathe gezogen und theile ich an dieser Stelle das Resultat meiner Untersuchungen mit.

DM. B.B.VI—1° 80' 1. 9<sup>m</sup> 3 4<sup>h</sup> 59<sup>m</sup> 15<sup>s</sup> 09 —1° 6' 3" 1 ist nach einer Mittheilung des Herrn Holetschek um etwa 2' zu südlich. Lamont 635 giebt die Position für 1855:

4<sup>h</sup> 59<sup>m</sup> 15<sup>s</sup> 22 —1° 4' 17" 6 aus Münch. Zone 68. Das Original der Bonner Meridianbeobachtung ist deutlich und die Beobachtung richtig reducirt. Der als sicher anzunehmende Beobachtungsfehler von 2' wird aber die Beobachtung noch immer nicht mit Lamont in Uebereinstimmung bringen, wobei jedoch zu beachten ist, dass drei benachbarte Sterne der Münch. Zone 68 die Correcturen +6' 6, +4' 4 und +4' 8 erfordern, um in Uebereinstimmung mit anderen Münchener Zonen gebracht zu werden.

Eine von mir am 6zölligen Refractor der hiesigen Sternwarte ausgeführte Neubestimmung des Sternes ergibt die Position

für 1882.0: 5<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> 37<sup>s</sup> 56 —1° 1' 50" 6

für 1855.0: 4 59 15.25 —1 4 10.9

Vergleichstern (1882.0): 5 2 2.22 —1 1 22.0  
1/3 (Schjell. + Gött. Cat. + Polaer Mer.-Beob. A. N. 91, 2174)

DM. —1° 80' 2 9<sup>m</sup> 5 4<sup>h</sup> 59<sup>m</sup> 28<sup>s</sup> 3 —1° 7' 0

—1 804 9.5 42.8 8.5

Die Decl. beider Sterne beruhen auf Schätzungen am Meridiankreise gegen den Stern —1° 80' 1, sind also gleich diesem +2' zu corrigiren. Ausserdem ist noch bei 804 ein Red.-Fehler von 1' vorhanden, so dass die Declinationen lauten müssen:

—1° 80' 2 —1° 5' 0

—1 804 5.5

Eine beiläufige Bestimmung beider Sterne am hiesigen Sechszöller ergibt die Werthe für 1855.0:

4<sup>h</sup> 59<sup>m</sup> 29<sup>s</sup> 3 —1° 5' 16"  
4 59 43.0 5 39

DM. +1° 22' 96 9<sup>m</sup> 3 9<sup>h</sup> 17<sup>m</sup> 37<sup>s</sup> 5 +1° 15' 0 K.

Herr Prof. Schönfeld theilt über diesen Stern folgendes mit: Die Grössenangabe ist ein Druckfehler für 9<sup>m</sup> 5. Ferner ist der Buchstabe  $K$  zu streichen, da der Stern fälschlich mit Weisse 9<sup>h</sup> 367, dessen Declination —11° anstatt +1° gelesen werden muss, identificirt worden ist. Auch die Präcession bei Weisse ist in Folge der unrichtigen Declination falsch berechnet worden.

DM. +6° 51' 11 9<sup>m</sup> 5 3<sup>h</sup> 10<sup>m</sup> 58<sup>s</sup> 0 +6° 53' 4, von Schiaparelli vermisst im Juli und August 1877 (A. N. 90, 2150). Dem Sterne haben die Positionen zu Grunde gelegen:

Z. 331 Sch. 1854 Jan. 25 9.10<sup>m</sup> 3<sup>h</sup> 10<sup>m</sup> 57<sup>s</sup> 2 +6° 53' 2:  
Grenz. 316 Kr. 1854 Jan. 22 8.9 59.7 53.5

Der Stern fehlt in Z. 310 Sch. 1854 Jan. 20.

Die Position der Grenzzone ist offenbar fälschlich hinzugezogen worden, da ihre Zugehörigkeit zu dem Bessel'schen Sterne +6° 51' 2 3<sup>h</sup> 11<sup>m</sup> 2<sup>s</sup> 5 +6° 51' 7, der sonst unbeobachtet geblieben wäre, unzweifelhaft erscheint. Es bleibt also nur mehr die in Decl. zweifelhafte Position in Z. 331 übrig und ist daher der Stern als nicht constatirt zu löschen.

DM. B.B.VI +6° 24' 08 9<sup>m</sup> 4 11<sup>h</sup> 1<sup>m</sup> 42<sup>s</sup> 96 +6° 57' 13" 2 ist, wie Baron von Engelhardt A. N. 100, 2397 mittheilt, +2' zu corrigiren.

Die directe Ablesung des Kreises lautet 43° 47' 45". Es wird nun nicht zu entscheiden sein, ob einfach die Minuten und Secunden zu vertauschen sind, oder ob ein Ablesungsfehler von 2' vorliegt, so dass die Beobachtung auch nach der Correctur von +2' auf 2" unsicher bleibt.