$8+i$	$3;\ -3-3i,\ 6$
$8+2i$	$3;\ -1-2i,\ 2i,\ -1-2i,\ 6$
$8+3i$	$3+i;\ -1+2i,\ 2,\ 1-6i,\ -2-i,\ -2i,\ 6+i$
$8+4i$	$3+i;\ -1+3i,\ 6+2i$
$8+5i$	$3+i;\ -2+6i,\ 6+2i$
$9+i$	$3;\ -6i,\ 6$
$9+2i$	$3;\ -3i,\ 6$
$9+3i$	$3;\ -2i,\ 6$
$9+4i$	$3+i;\ 1+3i,\ -2+i,\ 4+i,\ -2+i,\ 1+3i,\ 6+2i$
$10+i$	$3;\ 3-3i,\ 6$

Construction du centre de courbure de la développée de la courbe de contour apparent d'une surface que l'on projette orthogonalement sur un plan. *By* Prof. A. MANNHEIM.

[*Read April* 11*th*, 1889.]

Dans une communication sur les surfaces parallèles, que j'ai eu l'honneur de faire à la Société Mathématique de Londres,* je suis arrivé à une expression du rayon de courbure de la développée de la courbe de contour apparent d'une surface. La recherche de cette expression est un de ces problèmes dont la solution dépend des infiniment petits du 3ᵉ ordre et que, le premier, j'ai traités géométriquement.

Dans la même communication, j'ai fait connaître aussi une autre expression de ce même rayon de courbure, et j'ai annoncé que je montrerais comment on peut l'obtenir directement.

C'est cette démonstration directe que je vais exposer aujourd'hui, en faisant usage de deux droites dont j'ai déjà eu plusieurs fois l'occasion de prouver l'utilité.†

Il s'agit donc moins ici du problème particulier que je traite dans

---

* Voir les *Proceedings*, Vol. XII., No. 177.

† Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Séances des 22 Mars 1875 et 6 Mars 1876.

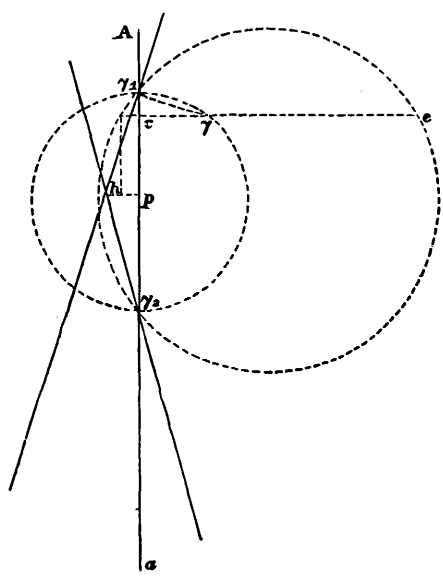
cette note que de la méthode géométrique dont je veux faire ressortir une fois de plus l'élégante simplicité.

En effet, à l'aide de ces deux droites on peut résoudre avec la plus grande facilité des questions pour lesquelles la méthode analytique, au milieu de ses longues formules, ne laisse pas apercevoir les éléments simples qui doivent seuls subsister dans toute construction.

Les deux droites dont je viens de parler sont de ces éléments simples. Rappelons d'abord leur origine.

A partir d'un point a sur une surface donnée (S) traçons des courbes tangentes entr'elles. On sait que les normalies à (S) dont ces courbes sont les directrices sont osculatrices entr'elles aux deux centres de courbure principaux γ_1, γ_2 situés sur la droite A normale en a à (S). Ces normalies ont donc en γ_1 et γ_2 les mêmes indicatrices.

Les asymptotes de ces indicatrices sont alors les mêmes pour toutes ces normalies et, comme A est l'une de ces asymptotes, les autres asymptotes communes sont deux droites issues respectivement des points γ_1 et γ_2. Ce sont là les deux droites que je vais employer. Je puis me les donner d'avance car, si, pour définir les éléments du 3^e ordre de la surface (S), on suppose connues les droites de courbure des nappes de la développée de (S), j'ai fait voir il y a longtemps déjà comment on peut construire ces deux droites.*



* *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Séance du 1er Mars 1875.

Supposons que le plan de projection contienne la normale A (Fig. 1); la courbe de contour apparent de (S) sur ce plan est la trace d'un cylindre circonscrit à cette surface et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de projection. Le centre de courbure de la courbe de contour apparent qui correspond au point a, s'obtient de la manière suivante:* *Les points γ_1, γ_2 sur A étant les centres de courbure principaux de (S), on décrit sur $\gamma_1\gamma_2$ comme diamètre une circonférence de cercle. Du point γ_1, extrémité du rayon de courbure principal maximum, on mène la droite $\gamma_1\gamma$ qui fait avec A un angle égal à l'angle des projetantes avec le grand axe de l'indicatrice de (S) en* a, *cette droite rencontre la circonférence au point γ. La projection de ce point sur A est le centre de courbure* c *cherché.*

La développée de la courbe de contour apparent de (S) touche A au point c; ce que nous nous proposons de déterminer, c'est le centre de courbure de cette développée qui correspond à ce point c.

Le cylindre circonscrit à (S), et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de projection, touche cette surface suivant une courbe que je prends pour directrice d'une normalie à (S). Les génératrices de cette normalie sont parallèles au plan de projection, et leurs projections sur ce plan sont des tangentes à la développée de la courbe de contour apparent de (S).

Puisque les génératrices de cette normalie sont parallèles au plan de projection, il existe le long de A un paraboloïde osculateur de cette normalie. Ce paraboloïde osculateur a pour plan directeur le plan de projection, et pour directrices les asymptotes des indicatrices de la normalie en γ_1 et γ_2, qui ne sont pas la droite A. Ces deux asymptotes sont les deux droites dont j'ai parlé plus haut et qui conduisent immédiatement à la solution de notre problème.

Supposons que leurs projections soient $\gamma_1 h$ et $\gamma_2 h$. Le paraboloïde osculateur de la normalie a pour contour apparent sur le plan de projection une parabole qui est, au point c, osculatrice de la développée de la courbe de contour apparent de (S).

On est donc ramené à chercher le rayon de courbure de cette parabole pour le point c. Cette parabole est tangente en c à A, et elle a pour tangentes $\gamma_1 h$ et $\gamma_2 h$. Dans ces conditions, pour déterminer au point c son rayon de courbure ρ, on a cette formule:†

$$\frac{1}{c\gamma_1}+\frac{1}{c\gamma_2}=\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} c\gamma_1 h}+\frac{1}{\operatorname{tang} c\gamma_2 h}\right),$$

* Voir mon *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition, p. 321.

† *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Séance du 15e Mars 1875.

ou, en abaissant la perpendiculaire hp sur A :

$$\frac{\gamma_1\gamma_2}{c\gamma_1 \times c\gamma_2} = \frac{2}{\rho}\left(\frac{\gamma_1 p}{ph} + \frac{\gamma_2 p}{ph}\right),$$

$$\frac{1}{c\gamma_1 \times c\gamma_2} = \frac{2}{\rho \times ph}.$$

D'après cela, pour déterminer le centre de courbure demandé, on a la construction suivante :

Sur la perpendiculaire ce *à* A, *qui est la normale à la développée de la courbe de contour apparent de* (S), *on projette le point milieu de* hp. *La circonférence qui passe par le point ainsi obtenu et par les points* γ_1, γ_2 *coupe la normale* ce *au centre de courbure demandé* e.

Le point c est sur A le point central de la normalie. Aux points γ_1, γ_2 les plans tangents à cette normalie sont rectangulaires. Le produit $c\gamma_1 \times c\gamma_2$ est alors égal au carré du paramètre de distribution des plans tangents à cette normalie pour la droite A. En appelant K ce paramètre, la formule précédente devient :

$$\rho = \frac{2K^2}{ph}.$$

On retrouve ainsi l'expression que je n'avais fait qu'indiquer jadis et dont j'ai parlé en commençant cette courte note.

Remarque.—Dans mon travail sur les surfaces parallèles, j'ai démontré que : *les centres de courbure géodésique des courbes à courbure normale constante, tangentes aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles entr'elles, sont sur une même droite* I.

Cette droite I est à la fois une génératrice du paraboloïde des normales à la normalie (dont j'ai parlé précédemment), et une génératrice du paraboloïde dont un plan directeur est perpendiculaire à A, et dont les directrices sont les deux droites projetées en $\gamma_1 h$ et $\gamma_2 h$.

La droite I appartenant au paraboloïde des normales à la normalie est parallèle au plan central de cette surface. Comme ce plan central passe par A et est perpendiculaire au plan de projection, la droite I se projette suivant une parallèle à A.

La droite I, étant une génératrice de l'autre paraboloïde, sa projection passe par le point h. Donc : *La droite* I *se projette suivant la parallèle menée de* h *à la droite* A.