

# Über die Singularitäten algebraischer Gebilde.

(Zweite Abhandlung.)

Von

Werner Schmeidler in Breslau.

---

## Einleitung.

Als Fortsetzung meiner gleichbetitelten Arbeit (*Mathematische Annalen* 81, S. 223—234)<sup>1)</sup> verfolgen die nachfolgenden Zeilen insbesondere den Fall der *ebenen Kurven* und im Anschluß daran den der *eingliedrigen Moduln mit endlicher Singularitätengruppe* weiter. Das Hauptresultat für Kurven ist der Satz, daß die von M. Noether studierten Vielfachheitsanzahlen, die für den gegebenen singulären Punkt vermöge quadratischer Cremonatransformationen definiert werden<sup>2)</sup> und für viele Eigenschaften der Kurven (Reduktion des Geschlechtes durch eine Singularität, Bestimmung der Schnittpunktmultiplizität zweier Kurven usw.) von Wichtigkeit sind, auch durch die *Restgruppe der Kurve* bestimmt sind und demgemäß (Satz I) bei umkehrbar ganzen rationalen Transformationen erhalten bleiben. Dieses Resultat erläutert die Bedeutung des Begriffes der Restgruppe, die ja für ganz allgemeine Moduln definiert ist, indem es zeigt, was im Spezialfalle darin enthalten ist. Überdies zeigt sich, daß die Restgruppe sogar eine tiefere Charakteristik der Singularitäten liefert als die Noetherschen Zahlen, da man Beispiele angeben kann, bei denen die Noetherschen Zahlen übereinstimmen, die Singularitätengruppen aber nicht, noch weniger also (Satz III) die Restgruppen.

Aber noch in einer andern Hinsicht werden die Untersuchungen für ebene Kurven verschärft: Der Auflösung des singulären Punktes in eine Reihe von „benachbarten“ Punkten, deren Vielfachheiten die „Zusammensetzung“ des singulären Punktes definieren, tritt hier eine Auflösung des

---

<sup>1)</sup> Wir zitieren die Sätze dieser Arbeit einfach mit den dortigen Nummern.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. *Math. Ann.* 9, S. 166—182; 23, S. 311—380.

zugehörigen Bestandteils der *Singularitätengruppe* in eine Kette von zugeordneten Singularitätengruppen an die Seite, deren jede die Vielfachheit des zugehörigen benachbarten Punktes liefert.

Im zweiten Abschnitt werden diese Resultate auf den Fall eines beliebigen eingliedrigen Moduls mit endlicher Singularitätengruppe, also z. B. einer Fläche mit endlich vielen singulären Punkten, verallgemeinert. Weitere Verallgemeinerungen seien für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Eine prinzipielle Bemerkung zum Schluß: Die Theorie der Restgruppen, wie sie hier entwickelt wird, bedeutet, wie z. B. Satz I zeigt, eine Bevorzugung der *ganzen* vor den allgemeinen rationalen Funktionen; sie gehört in eine *affin*-rationale Geometrie, und im engsten Zusammenhange damit steht die Bevorzugung der unhomogenen Schreibweise. Es liegt nahe, zu fragen, ob nicht auch hier wie sonst meistens in der Geometrie die *projektive* Auffassung und damit im Zusammenhang die *homogene* Schreibweise weiter führen würde. Diese Frage ist aber zu verneinen. Beschränken wir uns nämlich auf solche Moduln, die keine linearen Formen enthalten, d. h. auf solche Gebilde, die nicht in einem linearen Unterraum von weniger Dimensionen liegen, so ergibt sich aus Satz I unschwer folgendes: *Zwei homogene Moduln derselben Variablenzahl haben dann und nur dann isomorphe Restgruppen, wenn sie linear verwandt sind.* Dieses Resultat ist gewiß nicht uninteressant, insofern es zeigt, daß auch die gewöhnliche *projektive Geometrie* in das Studium der Restgruppen eingeordnet werden kann. Wir kommen aber so zu keiner *rationalen* Geometrie, und darin liegt eine Rechtfertigung für die Beibehaltung des Unhomogenen.

## I. Abschnitt.

### Ebene Kurven.

#### § 1.

#### Die Auflösung zweier Singularitäten mit isomorpher Singularitätengruppe.

Es seien  $F(x, y) = 0$  und  $G(z, t) = 0$  zwei irreduzible oder wenigstens von mehrfachen Bestandteilen freie Kurven, deren Singularitätengruppen isomorph sind. Nach Satz I bestehen dann Relationen der Form:

$$(1) \quad F(h, k) = A G + B \frac{\partial G}{\partial z} + C \frac{\partial G}{\partial t}, \quad G(f, g) = A F + B \frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(h, k) = A' G + B' \frac{\partial G}{\partial z} + C' \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(f, g) = A' F + B' \frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma' \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(h, k) = A'' G + B'' \frac{\partial G}{\partial z} + C'' \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(f, g) = A'' F + B'' \frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma'' \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(4) \quad \begin{array}{ll} f(h, k) \equiv z & (N), \\ g(h, k) \equiv t & (N), \end{array} \quad \begin{array}{ll} h(f, g) \equiv x & (M), \\ k(f, g) \equiv y & (M). \end{array}$$

Hierbei ist  $\mathfrak{M} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ ,  $\mathfrak{N} = \left(G, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial t}\right)$ , und  $f, g$  sind Polynome in  $x, y$  und  $h, k$  Polynome in  $z, t$ , die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Gestalt

$$(5) \quad \begin{aligned} f &= x + (2), & h &= z + (2), \\ g &= y + (2), & k &= t + (2) \end{aligned}$$

annehmen können. Es ist ferner keine Besonderheit, wenn wir annehmen, daß die Nullpunkte der  $(x, y)$ -Ebene mit der  $(z, t)$ -Ebene einander zugeordnete Singularitäten sind, die dann beide die gemeinsame Vielfachheit (vgl. Satz V)  $r \geq 2$  haben mögen. *Wir denken uns die Achsen in beiden Ebenen so gelegt, daß weder auf  $x=0$  noch auf  $z=0$  ein vom Nullpunkt verschiedener singulärer Punkt von  $F$  bzw.  $G$  liegt.* Außerdem sei weder  $x=0$  noch  $z=0$  Tangente im Nullpunkte.

Die Auflösung der Singularität  $x=y=0$  nach Noether geschieht dann in der Weise, daß man die Substitution

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= (c + y_1)x_1 \end{aligned}$$

auf  $F(x, y)$  ausübt und eine Bildkurve  $F_1(x_1, y_1) = 0$  erhält, so daß

$$(7) \quad F(x_1, (c + y_1)x_1) = x_1^r F_1(x_1, y_1)$$

wird. Dies liefert weiterhin

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, (c + y_1)x_1) = r x_1^{r-1} F_1 + x_1^r \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - (c + y_1)x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1},$$

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, (c + y_1)x_1) = x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}.$$

Die Konstante  $c$  ist dabei an sich willkürlich, von Interesse ist indessen nur der Fall, daß  $y - cx$  ein Linearfaktor der Unterform von  $F$  ist. Handelt es sich um einen einfachen Linearfaktor, so ist der Punkt  $x_1 = y_1 = 0$  ein regulärer Punkt der Kurve  $F_1 = 0$ , die auf diesen Linearfaktor bezügliche Auflösung der Singularität ist schon mit dem ersten Schritt vollendet. Im allgemeinen wird  $x_1 = y_1 = 0$  für  $F_1 = 0$  eine Singularität einer gewissen Vielfachheit  $r_1 \leq r$  sein, die ihrerseits wieder zu neuen Bildkurven Anlaß gibt, und so fort.

Der wesentliche Gedanke ist nun, daß wir neben den sukzessiven Vielfachheiten  $r_1, r_2, \dots$  sogleich auch die *Singularitätengruppen* der Bildkurven  $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$  in Betracht ziehen. Auf diese Weise erhalten wir eine (übrigens *endliche*) Kette von Singularitätengruppen, die der Auflösung der Singularität  $x = y = 0$  von  $F = 0$  zugeordnet ist. Bevorzugt man auf der ersten oder irgendeiner späteren Stufe einen anderen Linearfaktor

der betreffenden Unterform, so entsteht eine andere Kette; im ganzen erhält man auf diese Weise nur endlich viele wesentlich verschiedene Ketten von je endlich vielen „abgeleiteten“ Singularitätengruppen.

Ganz analog verfahren wir jetzt in der  $(z, t)$ -Ebene mit  $G = 0$ . Wie verhalten sich die beiden Mengen von abgeleiteten Singularitätengruppen zueinander, die wir so erhalten? Wir werden sehen, daß wir unter etwas schärferen Voraussetzungen als den bisher genannten nachweisen können, daß sie aus beziehungsweise isomorphen Gruppen bestehen. In erster Linie werden wir demnach die Isomorphie der Restgruppen von  $\mathfrak{M}_1 = \left(F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)$  und  $\mathfrak{N}_1 = \left(G_1, \frac{\partial G_1}{\partial z_1}, \frac{\partial G_1}{\partial t_1}\right)$  nachzuweisen haben, wobei  $F_1$  und  $G_1$  zwei Bildkurven erster Stufe bedeuten, die aus zwei einander entsprechenden Linearfaktoren (vgl. Satz V, Folgerung) der Unterformen  $F^{(r)}$  und  $G^{(r)}$  von  $F$  und  $G$  in der obigen Weise hervorgegangen sind. Wir nehmen dabei zunächst an, daß die Exponenten der beiden Linearfaktoren  $> 1$  seien; dann gehen sie bei unseren Annahmen vermöge der Substitution  $x = z$ ,  $y = t$  ineinander über. Den Fall einfacher Faktoren werden wir später behandeln.

Den Nachweis der Isomorphie führen wir wiederum mit Hilfe von Satz I; die erste Aufgabe ist daher die Herstellung von Übergangspolynomen  $f_1(x_1, y_1)$ ,  $g_1(x_1, y_1)$ ,  $h_1(z_1, t_1)$ ,  $k_1(z_1, t_1)$ . Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir in (6) bis (9) die Konstante  $c = 0$ , worin keine Beschränkung der Allgemeinheit liegt. Die zu (6) entsprechende Substitution lautet dann

$$(10) \quad z = z_1, \quad t = z_1 t_1.$$

Wir definieren nun

$$(11) \quad f_1(x_1, y_1) = f(x_1, x_1 y_1) = x_1 \bar{f}(x_1, y_1), \quad g(x_1, x_1 y_1) = x_1 \bar{g}(x_1, y_1),$$

$$(12) \quad h_1(z_1, t_1) = h(z_1, z_1 t_1) = z_1 \bar{h}(z_1, t_1), \quad k(z_1, z_1 t_1) = z_1 \bar{k}(z_1, t_1),$$

und suchen ein Polynom  $g_1(x_1, y_1)$ , das der Kongruenz

$$(13) \quad \bar{g} \equiv g_1 \bar{f} \pmod{x_1^\kappa \mathfrak{M}_1}$$

genügt; dabei bedeutet  $\kappa$  einen noch festzulegenden Exponenten. Diese Kongruenz ist lösbar für jedes  $\kappa$ ; denn wegen (5) ist  $\bar{f} = 1 + x_1 \bar{f}'$  und daher für jede Nullstelle von  $\bar{f}$  der Wert von  $x_1 \neq 0$ . Hätte also  $\bar{f}$  eine Nullstelle mit  $x_1^\kappa \mathfrak{M}_1$  gemeinsam, so wäre dies auch eine Nullstelle von  $\mathfrak{M}_1$ . Dann wäre wegen (7), (8), (9) und wegen (1), (2), (3) und (11)

$$G(0, g) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(0, g) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(0, g) = 0,$$

wobei  $g = g(x_1, x_1 y_1)$  für das betreffende Wertsystem  $(x_1, y_1)$  zu be-

rechnen ist. Aus unserer Annahme, daß der Nullpunkt die einzige Singularität von  $G$  auf  $z = 0$  ist, folgt dann  $g = 0$ ; dies steht aber mit (4) im Widerspruch, weil  $h(0, 0) = 0$  und andererseits  $x = x_1 \neq 0$  ist. Aus diesen Gründen ist  $(x_1^x \mathfrak{M}_1, \bar{f})$  der Einheitsmodul, und daher ist die Kongruenz (13) lösbar.

Genau entsprechend bestimmen wir  $k_1(z_1, t_1)$  mit Hilfe der Kongruenz

$$(14) \quad \bar{k} \equiv k_1 \bar{h} \quad (z_1^x \mathfrak{N}_1).$$

Für die so bestimmten Polynome  $f_1, g_1, h_1, k_1$  behaupten wir nun, wenn  $x \geq r - 1$  gewählt wird, zunächst die Relationen:

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) &\equiv 0 \\ z_1 F_1(h_1, k_1) &\equiv 0 \\ z_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) &\equiv 0 \end{aligned} \right\} (\mathfrak{N}_1), \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial t_1}(f_1, g_1) &\equiv 0 \\ x_1 G_1(f_1, g_1) &\equiv 0 \\ x_1^2 \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(f_1, g_1) &\equiv 0 \end{aligned} \right\} (\mathfrak{M}_1).$$

Zum Beweise von (15) führen wir in (3) die Substitution (10) aus. Wir finden wegen (12) und (14)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(h_1, h_1 k_1 + z_1^x N_1) = A_*'' G(z_1, z_1 t_1) + B_*'' \frac{\partial G}{\partial z}(z_1, z_1 t_1) + C_*'' \frac{\partial G}{\partial t}(z_1, z_1 t_1),$$

wobei der Index  $*$  bedeutet, daß die Substitution einzusetzen ist, und  $N_1 \equiv 0$  ( $\mathfrak{N}_1$ ) ist. Nach (7), (8), (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) &\equiv (A_*'' z_1 + r B_*'') z_1^{r-1} G_1 + B_*'' z_1^r \frac{\partial G_1}{\partial z_1} (z_1^x \mathfrak{N}_1) \\ &\quad + [C_*'' - t_1 B_*''] z_1^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}$$

und daraus wegen (12) nach Division mit  $z_1^{r-1}$  und Multiplikation mit  $\bar{h}^{r-1}$ , wo  $\bar{h} \bar{h} \equiv 1$  ( $z_1^x \mathfrak{N}_1$ ) ist, (die Existenz von  $\bar{h}$  folgt, weil analog wie oben  $(x_1^x \mathfrak{M}_1, \bar{f})$  auch  $(z_1^x \mathfrak{N}_1, \bar{h})$  der Einheitsmodul ist)

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) &\equiv (A_*'' z_1 + r B_*'') \bar{h}^{r-1} G_1 + z_1 B_*'' \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial z_1} (z_1^{x-r+1} \mathfrak{N}_1), \\ &\quad + (C_*'' - t_1 B_*'') \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}$$

also die Behauptung (15). Ganz analog finden wir

$$(19) \quad \begin{aligned} z_1 F_1(h_1, k_1) &\equiv (A_* z_1 + r B_*) \bar{h}^r G_1 + z_1 B_* \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial z_1} (z_1^{x-r+1} \mathfrak{N}_1), \\ &\quad + (C_* - t_1 B_*) \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}$$

also die Behauptung (16). Endlich ergibt sich

$$h_1^r \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) \equiv -r h_1^{r-1} F_1(h_1, k_1) + k_1 h_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) \\ + (A'_* z_1 + r B'_*) z_1^{r-1} G_1 + z_1^r B'_* \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + (C'_* - t_1 B'_*) z_1^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \quad (z_1^x \mathfrak{N}_1),$$

also

$$(20) \quad z_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) \equiv [(A'_* z_1^2 + r z_1 B'_*) + (k_1 z_1^2 A''_* + k_1 r z_1 B''_*) - (r A_* z_1 + r^2 B_*) \bar{h}] \bar{h}^r G_1 \\ + [z_1^2 B'_* + k_1 z_1^2 B''_* - r z_1 B_* \bar{h}] \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial z_1} \quad (z_1^{x-r+2} \mathfrak{N}_1) \\ + [(z_1 C'_* - z_1 t_1 B'_*) + (k_1 z_1 C''_* - k_1 t_1 z_1 B''_*) - (r C_* - r t_1 B_*) \bar{h}] \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial t_1}$$

und damit die Behauptung (17). — Analoge Gleichungen ergeben sich für  $G_1(h_1, k_1)$  usw.

Ehe wir nun zu der für den Isomorphiebeweis notwendigen Verschärfung dieser Relationen übergehen, beweisen wir für  $x \geq r-1$  und  $x \geq 2$  die zu (4) analogen Beziehungen:

$$(21) \quad f_1(h_1, k_1) \equiv z_1 \quad (\mathfrak{N}_1), \quad h_1(f_1, g_1) \equiv x_1 \quad (\mathfrak{M}_1).$$

$$(22) \quad g_1(h_1, k_1) \equiv t_1 \quad (\mathfrak{N}_1), \quad k_1(f_1, g_1) \equiv y_1 \quad (\mathfrak{M}_1).$$

Offenbar ist nämlich nach (4), (7) bis (9), (12) und (14)

$$f(h_1, h_1 k_1) \equiv z_1 (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1),$$

also gilt nach (11) die Behauptung (21), sogar mod  $(z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1)$ . Ferner ist analog

$$g(h_1, h_1 k_1) \equiv z_1 t_1 (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1),$$

$$h_1 \bar{g}(h_1, k_1) \equiv z_1 t_1 (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1),$$

$$\bar{h} \bar{g}(h_1, k_1) \equiv t_1 (z_1^{r-2} \mathfrak{N}_1).$$

Nun ist nach (13) und (15), (16), (17)

$$\bar{g}(h_1, k_1) \equiv g_1(h_1, k_1) \bar{f}(h_1, k_1) (z_1^{x-2} \mathfrak{N}_1),$$

daher gilt

$$(23) \quad g_1(h_1, k_1) \cdot \bar{f}(h_1, k_1) \bar{h} \equiv t_1 (\mathfrak{N}_1).$$

Andererseits ist wegen (11) und der mod  $(z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1)$  gültigen Kongruenz (21)

$$f_1(h_1, k_1) = h_1 \bar{f}(h_1, k_1) \equiv z_1 (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1),$$

also

$$\bar{h} \bar{f}(h_1, k_1) \equiv 1 (\mathfrak{N}_1).$$

Daher folgt aus (23) die Behauptung (22). — Ein Überblick über diese letzten Betrachtungen zeigt, daß durch genügend große Wahl von  $x$

( $\kappa \geq r + \mu$ ) die Koeffizienten von  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \frac{\partial G_1}{\partial z_1}, \frac{\partial G_1}{\partial t_1}$  in (21), (22) einen beliebig großen Untergrad  $\mu$  erhalten können, wenn nur in (4) die entsprechenden Koeffizienten von  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial t}$  Polynome vom Untergrad  $\geq \mu$  sind.

## § 2.

### Beweis der Isomorphie der abgeleiteten Singularitätengruppen für zwei Kurven mit isomorpher Restgruppe.

Wir kommen nun zu der Verschärfung der Relationen (16) und (17), die für den Isomorphiebeweis notwendig ist. Wir erreichen diese, indem wir jetzt außer den Voraussetzungen (1), (2), (3), die nur besagen, daß die *Singularitätengruppen* von  $F$  und  $G$  isomorph sind, noch gewisse Annahmen über die Koeffizientenpolynome in (1) und (4) einführen, die z. B. erfüllt sind, wenn die *Restgruppen* von  $F$  und  $G$  isomorph sind.

Zu diesem Ende sei eine ganze Zahl  $\mu \geq 2$  so gewählt, daß, für welchen Linearfaktor der Unterform von  $F, F_1, \dots$  auch die Auflösung durchgeführt werde, nach spätestens  $\mu - 1$  Schritten ein regulärer Punkt der betreffenden Bildkurve erreicht, die Auflösung also vollendet ist, und daß Gleiches für  $G$  gilt. Eine solche Zahl  $\mu$  gibt es wegen der Endlichkeit des Auflösungsprozesses; wir behalten uns aber ihre Vergrößerung noch vor. Wir wählen ferner stets  $\kappa \geq r + \mu$ . Dann soll unsere Annahme jetzt die sein, daß die Polynome  $B, C, B$  und  $\Gamma$  in (1) und die entsprechenden Polynome in (4) sämtlich vom Untergrad  $\geq \mu$  seien<sup>3)</sup>. Wir werden dann für die konstanten Glieder  $a_0, b'_0, b''_0, c'_0, c''_0$  von  $A, B', B'', C', C''$  beweisen, daß  $a_0 = b'_0 = c''_0, b''_0 = c'_0 = 0$  ist, und daß analoge Gleichungen für die Konstanten von  $A, B', B'', \Gamma', \Gamma''$  gelten. Ist dies geschehen, so zeigt die Gleichung (19), daß der Faktor  $z_1$  rechts und links fortgelassen werden kann, so daß sich

$$F_1(h_1, k_1) \equiv 0(\mathfrak{N}_1), \quad G_1(f_1, g_1) \equiv 0(\mathfrak{M}_1)$$

ergibt. Ebenso ersieht man aus (20) wegen  $\mu \geq 2$ , daß der Faktor  $z_1^2$  rechts und links fortfallen kann, so daß auch

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) \equiv 0(\mathfrak{N}_1), \quad \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(f_1, g_1) \equiv 0(\mathfrak{M}_1)$$

wird. Damit ist aber die Isomorphie der Restgruppen von  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{N}_1$  unter unsern Annahmen bewiesen.

*Unsere Annahmen sind offenbar für jedes  $\mu$  erfüllt für den Fall, daß die Restgruppen von  $F$  und  $G$  isomorph sind.*

<sup>3)</sup> Es läßt sich unter den früheren Voraussetzungen beweisen, daß  $B$  und  $B$  vom Untergrad  $\geq 1$  sind. Dies genügt bereits zur Verschärfung von (16).

Zum Beweise der obigen Relationen differenzieren wir (1) und finden mod  $G$  bis auf Glieder  $(\mu - 1)$ -ter und höherer Dimension

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(h, k) \begin{vmatrix} h_z & k_z \\ h_t & k_t \end{vmatrix} &\equiv A k_t \frac{\partial G}{\partial z} - A k_z \frac{\partial G}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(h, k) \begin{vmatrix} h_z & k_z \\ h_t & k_t \end{vmatrix} &\equiv A h_t \frac{\partial G}{\partial z} + A h_z \frac{\partial G}{\partial t} \end{aligned} \quad (G, (\mu - 1)).$$

Aus den Kongruenzen (4) findet man ferner durch Differentiation für die Determinante  $\begin{vmatrix} h_z & k_z \\ h_t & k_t \end{vmatrix} \bmod (\mathfrak{N}, (\mu - 1))$  eine Reziproke  $R$  mit der Konstanten 1; daher gelten die Kongruenzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(h, k) &\equiv A R k_t \frac{\partial G}{\partial z} - A R k_z \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(h, k) N \\ \frac{\partial F}{\partial y}(h, k) &\equiv -A R k_t \frac{\partial G}{\partial z} + A R h_z \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}(h, k) N \end{aligned} \quad (G, (\mu - 1)),$$

wobei  $N \equiv 0(\mathfrak{N})$  ist. Ist nun  $\mu$  hinreichend groß, so sind die Glieder  $(\mu - 1)$ -ter und höherer Dimension  $\equiv LQ(\mathfrak{N})$ , wobei  $(\mathfrak{N}, Q)$  der zum Nullpunkt gehörende Primärteiler von  $\mathfrak{N}$  und der Untergrad von  $L$  so groß ist, daß  $L$  selbst zu  $(\mathfrak{N}, Q)$  gehört. Aus (2), (3) folgt dann  $LQ \equiv 0(\mathfrak{N})$ , und da  $Q$  in den vom Nullpunkte verschiedenen Singularitäten von  $G$  nicht verschwindet, so muß  $L$  zu den betreffenden Primärteilern gehören; also gehört  $L$  zu  $\mathfrak{N}$ . Beachtet man noch, daß  $Q$  vom Untergrad  $\geq 1$  ist, und schreibt die obigen Kongruenzen in der Form (2), (3), so zeigt sich, daß  $b'_0 = c''_0 = a_0$ ,  $b''_0 = c'_0 = 0$  wird, also die Behauptung gilt.

*Wir können nun aber auch leicht zeigen, daß bei genügend großen  $\mu$  analoge Bedingungen wie für  $F$  und  $G$ , so auch für  $F_1$  und  $G_1$  gelten. Zunächst liefern (18), (19), (20) Gleichungen der Form*

$$(24) \quad \begin{cases} F_1(h_1, k_1) = A_1 G_1 + B_1 \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + C_1 \frac{\partial G_1}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) = A'_1 G_1 + B'_1 \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + C'_1 \frac{\partial G_1}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) = A''_1 G_1 + B''_1 \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + C''_1 \frac{\partial G_1}{\partial t_1}. \end{cases}$$

Die Polynome  $B_1, C_1$  (und analog die entsprechenden  $B_1, C_1$ ) sind nach (19) gewiß vom Untergrad  $\geq \mu - 1$ . Wählen wir nun  $\mu$  von vornherein so groß, daß bei einer bestimmten Kette von abgeleiteten Singularitätengruppen die Zahl  $\mu - 1$  dieselbe Rolle für  $F_1$  und  $G_1$  spielt wie  $\mu$  für  $F$  und  $G$ , so sieht man mit Hilfe der Schlußbemerkung von § 1, daß die beiden Bildkurven  $F_1$  und  $G_1$  wieder genau ebenso behandelt werden können wie  $F$  und  $G$  selbst und so fort, wodurch wir auf eine ganze Kette von paarweise isomorphen abgeleiteten Singularitätengruppen kommen.



Die Zahl  $\mu$  muß dabei eventuell bei jedem Schritt von neuem erhöht werden; wegen der Endlichkeit gibt es aber ein  $\mu$ , das für die ganze Kette ausreicht.

### § 3.

#### Das Verhalten der übrigen Singularitäten der Kurve bei der Auflösung. Der Hauptsatz.

Wir betrachten einen beliebigen vom Punkte  $x = y = 0$  verschiedenen singulären Punkt  $P$  der Kurve  $F = 0$ ; für diesen ist nach unserer Annahme  $x \neq 0$ . Die Gleichungen (7), (8), (9) zeigen dann, daß der entsprechende Punkt  $P_1$  von  $F_1$  ebenfalls singulär ist. Dem Punkte  $P$  entspricht ein gewisser Primärteiler  $\mathfrak{P} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, P(x, y)\right)$  von  $\mathfrak{M}$ , wobei  $P(x, y)$  ein Polynom ist, das in den andern singulären Punkten, also auch im Nullpunkte, von Null verschieden ist. Analog bilden wir den zu  $P_1$  gehörenden Primärteiler  $\mathfrak{P}_1 = \left(F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, P_1(x_1, y_1)\right)$  und behaupten nun die Isomorphie der Restgruppen von  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{P}_1$ . Dies besagt alsdann, daß bei der Auflösung des einen singulären Punktes der singuläre Charakter der übrigen erhalten bleibt.

Zum Beweise haben wir die Existenz von Übergangspolynomen von  $\mathfrak{P}$  zu  $\mathfrak{P}_1$  und umgekehrt zu zeigen. Für den Übergang von  $\mathfrak{P}$  zu  $\mathfrak{P}_1$  benutzen wir die Substitution (6) und ersehen aus (7), (8), (9), daß die aus  $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  entstehenden Polynome zu  $\mathfrak{P}_1$  gehören. Es gibt nun bekanntlich ein Polynom  $Q(x, y)$ , so daß  $P + Q \equiv 1, PQ \equiv 0 (\mathfrak{M})$ . Setzen wir  $P(x_1, x_1 y_1) = P'_1, Q(x_1, x_1 y_1) = Q'_1$ , so folgt durch Einsetzen von (6)  $P'_1 + Q'_1 \equiv 1, P'_1 Q'_1 \equiv 0 (\mathfrak{M}_1)$ ; ferner ist  $P'_1 = 0$  im Punkte  $P_1$ , in den andern singulären Punkten  $\neq 0$ . Diese Bedingungen bestimmen nun aber die Restklasse von  $P'_1$  mod  $\mathfrak{M}_1$  eindeutig, und da es auch für  $P_1$  ein  $Q_1$  gibt, so daß  $P_1 + Q_1 \equiv 1, P_1 Q_1 \equiv 0 (\mathfrak{M}_1)$  ist, so muß

$$(25) \quad P'_1 \equiv P_1 (\mathfrak{M}_1)$$

sein, also  $P'_1 \equiv 0 (\mathfrak{P}_1)$ .

Um nun zweitens die inversen Substitutionen zu bestimmen, bedenken wir, daß  $(\mathfrak{P}, x)$  der Einheitsmodul ist, so daß die Kongruenz

$$(26) \quad x \varrho(x, y) \equiv 1 (\mathfrak{P})$$

eine Lösung besitzt. Setzen wir nun

$$(27) \quad \begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y \varrho \end{aligned}$$

in  $\mathfrak{P}_1$  ein, so wird nach (7) wegen (26)

$$(28) \quad \begin{aligned} x^r F_1(x, y_0) &= F(x, xy_0) \equiv F(x, y) \equiv 0(\mathfrak{P}), \\ F_1(x, y_0) &\equiv 0(\mathfrak{P}). \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus (9)

$$(29) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y_0) \equiv 0(\mathfrak{P})$$

und alsdann aus (8)

$$(30) \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y_0) \equiv 0(\mathfrak{P}).$$

Ferner ist nach (25), (28), (29), (30)

$$P_1(x, y_0) \equiv P'_1(x, y_0) = P(x, xy_0) \equiv P(x, y) \equiv 0(\mathfrak{P}).$$

Schließlich sind die Substitutionen (6) und (27) invers, da ja (26) gilt und die daraus abgeleitete Relation  $x_1 y_0(x_1, x_1 y_1) \equiv 1(\mathfrak{P}_1)$ . Hiermit ist die Isomorphie bewiesen.

Wir sind nun auch imstande, den oben ausgeschlossenen Fall von lauter einfachen linearen Faktoren der Unterformen von  $F$  und  $G$  zu erledigen. Es ist ja klar, daß die Nullpunkte von  $F_1$  und  $G_1$  dann *reguläre* Punkte werden, die zur Singularitätengruppe überhaupt keinen Beitrag liefern; die Singularitätengruppen von  $F_1$  und  $G_1$  sind daher, wie wir jetzt sehen, auch in diesem Falle isomorph, und Entsprechendes gilt für irgendeine der späteren Stufen.

Wir sind also im ganzen zu folgendem Resultat gelangt:

*Die Auflösung eines singulären Punktes  $P$  einer algebraischen Kurve  $F = 0$  mittels quadratischer Cremonatransformationen der Form (6) führt zu einer endlichen Anzahl von Bildkurven  $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$ , deren Singularitätengruppen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  der Restgruppe von  $F$  in dem Sinne zugeordnet sind, daß für eine Kurve  $G = 0$  mit isomorpher Restgruppe die entsprechenden Bildkurven  $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots$  Singularitätengruppen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$  besitzen, die zu den Gruppen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  respektive isomorph sind. Dabei bleiben ferner die Bestandteile, die den anderweitigen Singularitäten von  $F = 0$  bzw.  $G = 0$  entsprechen, bei allen Abbildungen isomorph erhalten, so daß dem Punkte  $P$  selbst neben der zugehörigen einfachen Untergruppe der Singularitätengruppe  $\mathfrak{A}$  von  $F$  die Kette der zugehörigen einfachen Untergruppen von  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  als Charakteristikum der Singularität zugeordnet werden kann. Diese Charakterisierung der Singularität ist dann invariant gegenüber umkehrbar ganz rationalen Transformationen der Kurve.*

Alle Invarianten dieser Singularitätengruppen bleiben dann natürlich ebenfalls bei diesen Transformationen erhalten. Insbesondere folgt (vgl.

Satz V), daß die Vielfachheiten  $r_i$  der Nullpunkte in zwei entsprechenden Kurven  $F_i$  und  $G_i$  dieselben sein müssen. Diese Zahlen  $r_i$  definieren nach M. Noether bekanntlich die „Zusammensetzung“ des singulären Punktes; es zeigt sich also, daß die obige Charakterisierung diese Zusammensetzung mit liefert. *Zugleich zeigt sich, daß diese Zahlen gegenüber beliebigen umkehrbar ganz rationalen Transformationen invariant sind.*

Wir wollen nun umgekehrt an einem Beispiel sehen, daß die Vielfachheiten übereinstimmen können, ohne daß die zugehörige Kette von Singularitätengruppen eindeutig bestimmt ist, so daß diese also eine tiefergehende Charakteristik liefert. Zu diesem Zwecke setzen wir  $F(x, y) = y^r + H(x, y)$ , wobei  $H(x, y) = x^{r+1} + \dots$  eine homogene Form  $(r+1)$ -ten Grades mit lauter verschiedenen Linearfaktoren ist. Letztere Bedingung hat zur Folge, daß die Kurve  $F=0$  von der unendlich fernen Geraden in  $n$  getrennten, also regulären Punkten getroffen wird<sup>4)</sup>. Die einzige Singularität der Kurve ist dann der Nullpunkt, denn wegen  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = r y^{r-1} + \frac{\partial H}{\partial y}$  ist  $H = -rF + y \frac{\partial F}{\partial y} + x \frac{\partial F}{\partial x}$  und damit  $y^r \equiv 0(\mathfrak{M})$ ; also ist für eine Singularität  $y=0$ , und damit  $x=0$ .

Wir setzen nun

1.  $H = x^{r+1} - y^{r+1}$ , also  $F = y^r + x^{r+1} - y^{r+1}$ , was den Bedingungen genügt. Dann ist  $y^{r-1} \equiv 0$ ,  $x^r \equiv 0$  und alle Produkte  $x^\alpha y^\beta$  ( $\alpha \leq r-1$ ,  $\beta \leq r-2$ ) bilden eine Basis der Singularitätengruppe, deren Ordnung demnach  $= r(r-1)$  ist.

2.  $r=5$  und  $H = (x^4 - y^4)(x^2 - 2y^2) = x^6 - 2x^4y^2 - x^2y^4 + 2y^6$ , also  $F = y^5 + x^6 - 2x^4y^2 - x^2y^4 + 2y^6$ , was ebenfalls den Bedingungen genügt. Wir behaupten wieder, daß alle Polynome durch die Potenzprodukte  $x^\alpha y^\beta$  ( $\alpha \leq 4$ ,  $\beta \leq 3$ ) nach  $\mathfrak{M}$  linear dargestellt werden können. In der Tat sind wegen  $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 5y^4 - 4x^4y - 4x^2y^3$  die Potenz  $y^4$  und wegen  $x \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 5xy^4 - 4x^5y - 4x^3y^3$ ,  $y \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 6x^5y - 8x^3y^3$ , also  $15xy^4 - 28x^3y^3 \equiv 0$  die Produkte  $xy^4$  und  $x^5y$  durch jene Potenzprodukte darstellbar; wir sehen ferner, daß  $x^2y^4$  ebenfalls darstellbar ist und  $x^3y^4 \equiv 0$  wird. Aus  $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 6x^5 - 8x^3y^2 - 2xy^4$  folgt dann die Dar-

<sup>4)</sup> An sich ist eine Singularität der Kurve im Unendlichen von unserm Standpunkte aus belanglos. Es ist aber von Interesse, festzustellen, daß man überall, auch im Unendlichen, für zwei Kurven das gleiche Verhalten im Noetherschen Sinne vorschreiben kann, ohne damit die Singularitätengruppen eindeutig zu bestimmen. — Ich möchte hier mit besonderem Danke an Herrn Geheimrat Noether bemerken, daß ursprünglich im Text ein anderes Beispiel stand, in dem beide Kurven sich, wie mir Herr Noether mitteilte, durch ihr Verhalten im Unendlichen unterscheiden ließen. Daraufhin habe ich das Beispiel durch das obige ersetzt.

stellbarkeit von  $x^5$ , aus  $x \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 6x^6 - 8x^4y^2 - 2x^2y^4$  diejenige von  $x^6$ .  $x^5y^2$  wird  $\equiv 0$  und  $x^6y$  wird wegen  $H \equiv 0$  durch  $x^4y^3$  allein darstellbar. Daher wird  $x^6y^2 \equiv 0$  und ebenso  $x^7 \equiv 0$ , so daß alle Produkte 8-ter Dimension verschwinden. Die Behauptung ist damit bewiesen, die Ordnung also  $\leq r(r-1) = 20$ . Sie ist aber in Wirklichkeit  $< 20$ , weil zwischen den 20 Potenzprodukten die Relation  $5x^4y^2 + 12x^4y^3 \equiv 0$  besteht. In der Tat ist  $6H - x \frac{\partial F}{\partial x} \equiv -4x^4y^2 - 4x^2y^4$ , also  $x^2y^4 + x^4y^2 \equiv 0$  und  $x^2 \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 5x^2y^4 - 4x^6y - 4x^4y^3$ , oder  $5x^4y^2 + 4x^6y + 4x^4y^3 \equiv 0$ . Andererseits ist  $4yH \equiv 4x^6y - 8x^4y^3 \equiv 0$ , also durch Subtraktion  $5x^4y^2 + 12x^4y^3 \equiv 0$ .

Setzt man nun in 1. ebenfalls  $r=5$ , so erhält man  $F = y^5 + x^6 - y^6$ , also eine Kurve, die ebenso wie in 2. im Nullpunkte eine gewöhnliche 5fache Spitze hat, so daß für beide Kurven schon die erste Bildkurve regulär wird. Die Vielfachheiten stimmen daher überein, die Singularitätengruppen sind aber nicht isomorph.

## II. Abschnitt.

### Verallgemeinerung auf beliebige eingliedrige Moduln mit endlicher Singularitätengruppe.

Wir denken uns ein Polynom in  $n$  Variablen  $F(x_1 \dots x_n)$  gegeben, so daß der Modul  $\mathfrak{M} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x_1} \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$  eine *endliche* Restgruppe, das Gebilde  $F=0$  also nur eine *endliche* Anzahl von singulären Stellen besitzt. Wir wollen den Hauptsatz auf diesen Fall verallgemeinern. Es wird genügen, die Rechnungen für  $n=3$  durchzuführen, da die weitere Verallgemeinerung auf der Hand liegen wird. Wir führen der Reihe nach die verallgemeinerten Formeln auf und erläutern sie durch Text nur da, wo es nötig zu sein scheint. Gegeben sind zwei Polynome  $F(x, y, z)$  und  $G(u, v, w)$ .

$$(1)' \quad F(h, h', h'') = AG + B \frac{\partial G}{\partial u} + C \frac{\partial G}{\partial v} + D \frac{\partial G}{\partial w},$$

$$G(f, f', f'') = AF + B \frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial F}{\partial y} + \Delta \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$(2)' \quad \frac{\partial F}{\partial x}(h, h', h'') = A'G + B' \frac{\partial G}{\partial u} + C' \frac{\partial G}{\partial v} + D' \frac{\partial G}{\partial w},$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(f, f', f'') = A'F + B' \frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma' \frac{\partial F}{\partial y} + \Delta' \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$(3)'$$

usw.

$$(4)' \quad \begin{cases} f(h, h', h'') \equiv u, & h(f, f', f'') \equiv x, \\ f'(h, h', h'') \equiv v \quad (\mathfrak{N}), & h'(f, f', f'') \equiv y \quad (\mathfrak{M}), \\ f''(h, h', h'') \equiv w, & h''(f, f', f'') \equiv z, \end{cases}$$

$$(5)' \quad \begin{cases} f = x + (2), & h = u + (2), \\ f' = y + (2), & h' = v + (2), \\ f'' = z + (2), & h'' = w + (2). \end{cases}$$

Es seien wieder die Nullpunkte zugeordnete Singularitäten der gemeinsamen Vielfachheit  $r$ . Es liege weder auf  $x = 0$  noch auf  $u = 0$  ein vom Nullpunkte verschiedener singulärer Punkt von  $F$  bzw.  $G$ .

$$(6)' \quad \begin{cases} x = x_1, \\ y = (c + y_1)x_1, \\ z = (d + z_1)x_1, \end{cases}$$

$$(7)' \quad F(x_1, (c + y_1)x_1, (d + z_1)x_1) = x_1^r F_1(x_1, y_1, z_1),$$

$$(8)' \quad \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, (c + y_1)x_1, (d + z_1)x_1) \\ &= r x_1^{r-1} F_1 + x_1^r \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - x_1^{r-1} (c + y_1) \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - x_1^{r-1} (d + z_1) \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

$$(9)' \quad \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, (c + y_1)x_1, (d + z_1)x_1) = x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \\ & \frac{\partial F}{\partial z}(x_1, (c + y_1)x_1, (d + z_1)x_1) = x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial z_1}. \end{aligned}$$

Die Konstanten  $c$  und  $d$  sind an sich willkürlich. Da aber  $F = F^{(r)} + (r+1)$  und

$$F_1(x_1, y_1, z_1) = F^{(r)}(1, c, d) + \frac{\partial F^{(r)}}{\partial y}(1, c, d) y_1 + \frac{\partial F^{(r)}}{\partial z}(1, c, d) z_1 + x_1(\dots) + (2)$$

ist, so ist nur der Fall von Interesse, daß neben  $F^{(r)}(1, c, d) = 0$  auch  $\frac{\partial F^{(r)}}{\partial y}(1, c, d) = 0, \frac{\partial F^{(r)}}{\partial z}(1, c, d) = 0$  ist; d. h. der Punkt  $1, c, d$  muß auf einem *Doppelstrahl* des Tangentialkegels  $F^{(r)} = 0$  von  $F$  im Nullpunkte liegen. Gibt es keinen solchen, so führt die Auflösung schon beim ersten Schritt zu einem regulären Bildpunkte; diesen Fall schließen wir zunächst aus. Wenn wir nun die analogen Prozesse mit  $G$  vornehmen, so ist dem Strahl  $x : y : z = 1 : c : d$  der Strahl  $u : v : w = 1 : c : d$  eindeutig zugeordnet und ist ebenfalls ein Doppelstrahl von  $G^{(r)}$ . Es gelten also die Formeln (6)' bis (9)' ganz analog auch für  $G$ . Wir nehmen ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $c = d = 0$  an, setzen also

$$(10)' \quad \begin{cases} u = u_1, \\ v = v_1 u_1, \\ w = w_1 u_1, \end{cases}$$

$$(11)' \quad \begin{cases} f(x_1, x_1 y_1, x_1 z_1) = x_1 \bar{f}(x_1, y_1, z_1) = f_1(x_1, y_1, z_1); \\ f'(x_1, x_1 y_1, x_1 z_1) = x_1 \bar{f}'(x_1, y_1, z_1); \\ f''(x_1, x_1 y_1, x_1 z_1) = x_1 \bar{f}''(x_1, y_1, z_1); \end{cases}$$

$$(12)' \quad \begin{cases} h(u_1, u_1 v_1, u_1 w_1) = u_1 \bar{h}(u_1, v_1, w_1) = h_1(u_1, v_1, w_1); \\ h'(u_1, u_1 v_1, u_1 w_1) = u_1 \bar{h}'(u_1, v_1, w_1); \\ h''(u_1, u_1 v_1, u_1 w_1) = u_1 \bar{h}''(u_1, v_1, w_1). \end{cases}$$

Wir definieren ferner  $f_1', f_1''$  durch die Kongruenzen

$$(13)' \quad \begin{aligned} \bar{f}' &\equiv f_1' \bar{f} \\ \bar{f}'' &\equiv f_1'' \bar{f} \end{aligned} (x_1^z \mathfrak{M}_1), \quad \mathfrak{M}_1 = \left( F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \right).$$

Die Lösbarkeit beider Kongruenzen für jedes  $z$  beweist man analog wie oben. Ebenso sei:

$$(14)' \quad \begin{aligned} \bar{h}' &\equiv h_1' \bar{h} \\ \bar{h}'' &\equiv h_1'' \bar{h} \end{aligned} (u_1^z \mathfrak{N}_1), \quad \mathfrak{N}_1 = \left( G_1, \frac{\partial G_1}{\partial u_1}, \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \right).$$

Dann gilt für  $z \leq r-1$

$$(15)' \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, h_1', h_1'') &\equiv 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(h_1, h_1', h_1'') &\equiv 0 \end{aligned} \right\} (\mathfrak{N}_1), \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}(f_1, f_1', f_1'') &\equiv 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial w_1}(f_1, f_1', f_1'') &\equiv 0 \end{aligned} \right\} (\mathfrak{M}_1).$$

$$(16)' \quad u_1 F_1(h_1, h_1', h_1'') \equiv 0 \quad x_1 G_1(f_1, f_1', f_1'') \equiv 0$$

$$(17)' \quad u_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv 0 \quad x_1^2 \frac{\partial G_1}{\partial u_1}(f_1, f_1', f_1'') \equiv 0$$

Ausführlicher geschrieben findet man:

$$(18)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, h_1', h_1'') &\equiv (A_*'' u_1 + r B_*'') \bar{h}^{r-1} G_1 + u_1 B_*'' \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ &\quad + (C_*'' - v_1 B_*'') \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + (D_*'' - w_1 B_*'') \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \quad (u_1^{z-r+1} \mathfrak{N}_1), \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(h_1, h_1', h_1'') &\equiv (A_*''' u_1 + r B_*''') \bar{h}^{r-1} G_1 + u_1 B_*''' \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ &\quad + (C_*''' - v_1 B_*''') \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + (D_*''' - w_1 B_*''') \bar{h}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \quad (u_1^{z-r+1} \mathfrak{N}_1); \end{aligned} \right.$$

$$(19)' \quad \begin{aligned} u_1 F_1(h_1, h_1', h_1'') &\equiv (A_* u_1 + r B_*) \bar{h}^r G_1 + u_1 B_* \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ &\quad + (C_* - v_1 B_*) \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + (D_* - w_1 B_*) \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \quad (u_1^{z-r+1} \mathfrak{N}_1). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet  $A_*$  usw. das Polynom  $A(u_1, v_1 u_1, w_1 u_1)$  usw.,  $\bar{h}$  eine Lösung von  $\bar{h} \bar{h} \equiv 1 (u_1^z \mathfrak{N}_1)$ . Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
 (20)' \left\{ \begin{aligned}
 u_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, h'_1, h''_1) &\equiv [(A'_* u_1 + r B'_*) u_1 + (A''_* u_1 + r B''_*) h'_1 u_1 \\
 &\quad + (A'''_* u_1 + r B'''_*) h''_1 u_1 - (A_* u_1 + r B_*) r \bar{h}] \bar{h}^r G_1 \\
 &\quad + [u_1 B'_* + h'_1 u_1 B''_* + h''_1 u_1 B'''_* - r \bar{h} B_*] u_1 \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\
 &\quad + [(C'_* - v_1 B'_*) u_1 + (C''_* - v_1 B''_*) h'_1 u_1 \\
 &\quad + (C'''_* - v_1 B'''_*) h''_1 u_1 - (C_* - v_1 B_*) r \bar{h}] \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial v_1} \\
 &\quad + [(D'_* - w_1 B'_*) u_1 + (D''_* - w_1 B''_*) h'_1 u_1 \\
 &\quad + (D'''_* - w_1 B'''_*) h''_1 u_1 - (D_* - w_1 B_*) r \bar{h}] \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \\
 &\quad (u_1^{x-r+2} \mathfrak{N}_1);
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(21)' \quad f_1(h_1, h'_1, h''_1) \equiv u_1 \quad h_1(f_1, f'_1, f''_1) \equiv x_1$$

$$\begin{aligned}
 (22)' \quad f'_1(h_1, h'_1, h''_1) &\equiv v_1 (\mathfrak{N}_1), & h'_1(f_1, f'_1, f''_1) &\equiv y_1 (\mathfrak{M}_1). \\
 f''_1(h_1, h'_1, h''_1) &\equiv w_1 & h''_1(f_1, f'_1, f''_1) &\equiv z_1
 \end{aligned}$$

In den letzten Gleichungen (21)' und (22)' werden die Koeffizienten von  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial w_1}$  sämtlich vom Untergrad  $\geq \mu$ , wenn  $x \geq r + \mu$  ist und in (4)' die entsprechenden Polynome vom Untergrad  $\geq \mu$  sind.

Für den Beweis der Isomorphie brauchen wir jetzt den Nachweis, daß das Auflösungsverfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbricht; es wird sogar eine Zahl  $\mu$  geben, so daß für jeden der i. a. kontinuierlich vielen Doppelstrahlen das Auflösungsverfahren nach spätestens  $\mu - 1$  Schritten abbricht. Diesen Nachweis verschieben wir auf später. Hat  $\mu$  für  $G$  dieselbe Bedeutung, so setzen wir  $x \geq r + \mu$  und machen jetzt die Annahme, daß  $B, C, D, B, \Gamma, \Delta$  sowie die entsprechenden Polynome in (4)' sämtlich vom Untergrade  $\geq \mu \geq 2$  seien. Wir werden dann für die Konstanten  $a_0, b'_0, b''_0, b'''_0, c'_0, c''_0, c'''_0, d'_0, d''_0, d'''_0$  von  $A \dots D'''$  die Beziehungen  $a_0 = b'_0 = c''_0 = d'''_0, b''_0 = b'''_0 = c'_0 = c'''_0 = d'_0 = d''_0 = 0$  beweisen, und analoge Gleichungen für die Konstanten von  $A, \dots, A'''$ . Dann zeigt (19)', daß rechts und links der Faktor  $u_1$ , und (20)', daß rechts und links der Faktor  $u_1^2$  fortgelassen werden kann. Damit ist die Isomorphie der Singularitätengruppen von  $F_1$  und  $G_1$  unter unseren Annahmen bewiesen.

Diese Annahmen sind erfüllt für den Fall, daß die Restgruppen von  $F$  und  $G$  isomorph sind.

Zum Beweise der Behauptungen über die Konstanten differenzieren wir (1) und finden bis auf Glieder  $(\mu - 1)$ -ter und höherer Dimension.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(h, h', h'') \begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} &\equiv A \begin{vmatrix} h'_v & h''_v \\ h'_w & h''_w \end{vmatrix} G_u + A \begin{vmatrix} h'_u & h''_u \\ h'_v & h''_v \end{vmatrix} G_v + A \begin{vmatrix} h'_u & h''_u \\ h'_w & h''_w \end{vmatrix} G_w \\ \frac{\partial F}{\partial y}(h, h', h'') \begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} &\equiv A \begin{vmatrix} h''_v & h_v \\ h''_w & h_w \end{vmatrix} G_u + A \begin{vmatrix} h''_u & h_u \\ h''_v & h_v \end{vmatrix} G_v + A \begin{vmatrix} h''_u & h_u \\ h''_w & h_w \end{vmatrix} G_w \quad (G, (\mu-1)) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(h, h', h'') \begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} &\equiv A \begin{vmatrix} h_v & h'_v \\ h_w & h'_w \end{vmatrix} G_u + A \begin{vmatrix} h_w & h'_w \\ h_u & h'_u \end{vmatrix} G_v + A \begin{vmatrix} h_u & h'_u \\ h_v & h'_v \end{vmatrix} G_w \end{aligned}$$

Aus (4)' folgt die Existenz eines Polynoms  $R$ , so daß

$$R \begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} \equiv 1 \quad (\mathfrak{N}, (\mu-1))$$

ist, woraus sich die Konstante von  $R$  zu 1 bestimmt. Dann sieht man ebenso wie früher ein, daß man die obigen Gleichungen in der Form (2)', (3)' schreiben kann, und daß dabei die Bedingungen für die Konstanten  $a_0 \dots$  sämtlich erfüllt sind.

Analog wie oben zeigt man ferner, daß für  $F_1$  und  $G_1$  genau dieselben Bedingungen erfüllt sind wie für  $F$  und  $G$ , und daher der Isomorphiebeweis auch auf die zweite Stufe fortgesetzt werden kann usw. Wegen der Endlichkeit jeder einzelnen Kette gibt es stets ein  $\mu$ , das den Beweis bis zur letzten Stufe durchzuführen gestattet.

Die Überlegungen des § 3 übertragen sich ohne weiteres auf den vorliegenden Fall, da die Darstellung des Singularitätenmoduls als kleinstes gemeinsames Vielfaches von teilerfremden Primärteilern unabhängig von der Variablenzahl gilt. Der Charakter eines vom Nullpunkte verschiedenen singulären Punktes wird also bei der Auflösung des Nullpunktes nicht modifiziert. Dies liefert ferner auch für die oben ausgeschlossenen Fälle, in denen der Bildpunkt *regulär* ist, die Isomorphie, so daß diese jetzt unter allen Umständen nachgewiesen ist.

Wir kommen nun noch zu dem Nachweis, daß das Verfahren nach einer beschränkten Anzahl von Schritten abbricht<sup>5)</sup>.

Um dies zu zeigen, betrachten wir ein Polynom  $S$  etwa in  $x$  allein, das für alle singulären Punkte verschwindet und zwar je in solcher Vielfachheit, daß es zum Modul  $\mathfrak{M} = (F, F_x, F_y, F_z)$  gehört. Es genügt

<sup>5)</sup> Das Folgende schließt an die Darstellung für zwei Variable bei Weierstraß, Werke 4, Kap. 1, an.



dazu gewiß, wenn die betreffende Vielfachheit gleich der Ordnung des zugehörigen einfachen Bestandteils der Singularitätengruppe ist. Insbesondere sei  $S = x^\lambda S_0$ , wobei  $S_0(0) \neq 0$  ist. Dann wollen wir zeigen, daß die Anzahl der Schritte, die bis zur völligen Auflösung, also bis zu regulären Bildpunkten führen, stets  $\leq \lambda(r-1)$  ist.

Zu diesem Zwecke beachten wir folgendes: Wenn gezeigt werden kann, daß die Untergrade  $r, r_1, \dots$  stets nach höchstens  $\lambda$  Schritten um mindestens 1 abgenommen haben müssen, so ist die Behauptung bewiesen. Die aufeinanderfolgenden Substitutionen sind alle von der Gestalt (6)' bzw. lineare Kombinationen davon. Liegt nun eine Folge von solchen Substitutionen vor, so können wir die Bezeichnungsweise so wählen, daß die erste Substitution

$$\begin{aligned}x &= (g + \dots)x_1 \\y &= (h + \dots)x_1 \\z &= (k + \dots)x_1\end{aligned}$$

wird, wo die Konstanten  $g, h, k \neq 0$  sind. Ebenso kann erreicht werden, daß in allen folgenden Substitutionen

$$\begin{aligned}x_1 &= (g_1 + \dots)x_2, & x_2 &= (g_2 + \dots)x_3, & \dots, & x_{\varrho-1} &= (g_{\varrho-1} + \dots)x_{\varrho} \\& \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{aligned}$$

$g_1, g_2, \dots, g_{\varrho-1} \neq 0$  ist. Dann wird

$$\begin{aligned}x &= (gg_1 \dots g_{\varrho-1} + \dots)x_{\varrho}, \\y &= (hg_1 \dots g_{\varrho-1} + \dots)x_{\varrho}, \\z &= (kg_1 \dots g_{\varrho-1} + \dots)x_{\varrho},\end{aligned}$$

so daß wir durch Einsetzen in  $S(x)$  finden

$$S(x) = x_{\varrho}^{\lambda} S_{\varrho}(x_{\varrho}, y_{\varrho}, z_{\varrho}).$$

Andererseits ist  $S = PF + QF_x + TF_y + UF_z$ ; aus dieser Darstellung folgt mit Hilfe von (7)', (8)', (9)', wenn bei allen  $\varrho$  Schritten der Untergrad  $r$  erhalten bleibt, daß  $S$  durch  $x_1^{r-1}$ , durch  $x_2^{2(r-1)} \dots$  durch  $x_{\varrho}^{\varrho(r-1)}$  teilbar ist. Also ist  $\varrho(r-1) \leq \lambda$  d. h. a fortiori  $\varrho \leq \lambda$ . — Es ist klar, daß dieser Beweis sich unverändert auf den Fall von  $n$  Variablen überträgt.

Überblicken wir nun noch einmal die Beweise dieses Abschnitts, so tritt deutlich hervor, daß in allen die Anzahl 3 der Variablen unwesentlich ist und durch  $n$  ersetzt werden kann. Eine Variable ist davon bei den Beweisen durchgängig ausgezeichnet, die andern sind gleichberechtigt. Wir erhalten folgendes allgemeine Resultat:

*Die Auflösung eines singulären Punktes  $P$  einer  $(n-1)$ -dimensionalen algebraischen Fläche  $F = 0$  mit endlich vielen Singularitäten im  $n$ -dimensionalen Raum mit Hilfe gewisser quadratischer Cremonatransformationen*

*führt bei jedem der i. a. unendlich vielen möglichen Arten des Verfahrens auf eine beschränkte Anzahl von Bildflächen  $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$ , deren Singularitätengruppen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  der Restgruppe von  $F$  in dem Sinne zugeordnet werden können, daß für eine Fläche  $G = 0$  mit isomorpher Restgruppe das analoge Verfahren auf Bildflächen  $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots$  führt, die respektive Singularitätengruppen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$  besitzen, von denen  $\mathfrak{A}_i$  zu  $\mathfrak{B}_i$  isomorph ist. Dabei bleiben ferner die Bestandteile der Singularitätengruppen, die den anderweitigen Singularitäten von  $F = 0$  bzw.  $G = 0$  entsprechen, bei allen Abbildungen isomorph erhalten, so daß dem Punkte  $P$  selbst neben der zugehörigen einfachen Untergruppe der Singularitätengruppe  $\mathfrak{A}$  von  $F$  alle Ketten der einfachen Untergruppen von  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  als Charakteristikum der Singularität zugeordnet werden können. Diese Charakterisierung ist dann invariant gegenüber umkehrbar ganz rationalen Transformationen von  $F = 0$ .*

Speziell sind natürlich auch hier wieder die Untergrade der Bildflächen Invarianten gegenüber solchen Transformationen.

Kiel, den 15. Januar 1921.

(Eingegangen am 27. 1. 1921.)