Über affine Geometrie XXXVII.

Eine Verschärfung von Minkowskis Ungleichheit für den gemischten Flächeninhalt.

Von WILHELM BLASCHKE in Hamburg.

Vor kurzem hat Herr T. BONNESEN[1]) ein Ergebnis von F. BERNSTEIN[2]) verfeinernd gezeigt: Zwischen Umfang L und Flächeninhalt F einer Eilinie (geschlossenen und konvexen ebenen Kurve) besteht die Beziehung

$$L^2 - 4\pi F \geqq \pi^2 (R-r)^2, \tag{1}$$

wenn R den Halbmesser des kleinsten die Eilinie enthaltenden und r den Halbmesser des größten in der Eilinie enthaltenen Kreises bedeutet. Hier soll gezeigt werden, daß eine von FROBENIUS[3]) stammende Methode ohne weiteres eine Ungleichheit liefert, die die von BONNESEN als Sonderfall umfaßt und eine Verschärfung von MINKOWSKIs Ungleichheit für den gemischten Flächeninhalt zweier Eilinien[4]) darstellt.

Es seien $\mathfrak{B}_i$ zwei Eibereiche in derselben Ebene ($i = 1, 2$), $\mathfrak{x}_i$ ein Punkt in $\mathfrak{B}_i$, ferner $\lambda_i > 0$ zwei feste Zahlen mit der Summe Eins, $\mathfrak{x} = \lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_2 \mathfrak{x}_2$ der Schwerpunkt des Punktepaars $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, wenn $\mathfrak{x}_i$ die Masse λ_i hat. Durchlaufen dann die $\mathfrak{x}_i$ unabhängig die $\mathfrak{B}_i$, so durchläuft $\mathfrak{x}$ ebenfalls einen Eibereich, den wir nach MINKOWSKI mit $\mathfrak{B} = \lambda_1 \mathfrak{B}_1 + \lambda_2 \mathfrak{B}_2$ bezeichnen. Wir denken uns die Ränder der $\mathfrak{B}_i$ nach links herum umfahren und ordnen je zwei Randpunkte $\mathfrak{r}_i$ mit gleichsinnig parallelen Tangenten (Stützgeraden) einander zu. Dann gilt für den Flächeninhalt F von $\mathfrak{B}$

$$F = \frac{1}{2}\oint (\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}), \quad \mathfrak{r} = \lambda_1 \mathfrak{r}_1 + \lambda_2 \mathfrak{r}_2 \tag{2}$$

oder

$$F = F_{11}\lambda_1^2 + 2F_{12}\lambda_1\lambda_2 + F_{22}\lambda_2^2 \tag{3}$$

---

[1]) T. BONNESEN, Math. Annalen **84** (1921), S. 216—227.

[2]) F. BERNSTEIN, Math. Annalen **60** (1905), S. 117—136.

[3]) G. FROBENIUS, Sitzungsberichte, Berlin 1915, S. 387—404.

[4]) H. MINKOWSKI, Math. Annalen **57** (1903), S. 447—495 oder Ges. Abh. II, S. 230—276; bes. S. 245.

mit

$$F_{ik} = F_{ki} = \frac{1}{2}\oint(\mathfrak{r}_i, d\,\mathfrak{r}_k) = \frac{1}{2}\oint(\mathfrak{r}_k, d\,\mathfrak{r}_i). \tag{4}$$

Dabei bedeutet $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ die Determinante aus den Koordinaten der beiden Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und F_{12} ist der von MINKOWSKI eingeführte gemischte Flächeninhalt, F_{ii} der gewöhnliche Flächeninhalt von $\mathfrak{B}_i$. Die vorkommenden Integrale sind im Sinne von STIELTJES zu verstehen.

Wir denken uns den $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ zwei gleichsinnig parallel gelagerte Dreiecke $\mathfrak{D}_i$ umschrieben, so daß also $\mathfrak{B}_i$ in der Dreiecksfläche $\mathfrak{D}_i$ liegt. Dann liegt $\mathfrak{B}$ im umschriebenen Dreieck $\mathfrak{D} = \lambda_1 \mathfrak{D}_1 + \lambda_2 \mathfrak{D}_2$. Von einem Randpunkt $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{B}$ aus ziehen wir auf einer Stützgeraden an $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{r}$ im positiven Sinn die Strecke bis zum Austrittspunkt $\mathfrak{s}$ aus $\mathfrak{D}$. Dann gilt für die Endpunkte entsprechender Tangenten an $\mathfrak{B}_i$ die Beziehung $\mathfrak{r} = \lambda_1 \mathfrak{r}_1 + \lambda_2 \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{s} = \lambda_1 \mathfrak{s}_1 + \lambda_2 \mathfrak{s}_2$, also zwischen den Längen dieser Tangentenstrecken $t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$. Nun ist der Flächeninhalt F von $\mathfrak{B}$ gleich der Differenz zwischen dem Flächeninhalt von $\mathfrak{D}$ und dem Flächeninhalt des Gebiets, das die Tangentenstrecke t überstreicht, wenn der Berührungspunkt $\mathfrak{r}$ den Rand von $\mathfrak{B}$ umfährt. Das gibt, wenn $d\varphi$ den Winkel benachbarter Tangenten bedeutet, die Formel von FROBENIUS

$$F = \left\{\lambda_1 D_1^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 D_2^{\frac{1}{2}}\right\}^2 - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)^2\, d\varphi. \tag{5}$$

Darin ist D_i der Flächeninhalt von $\mathfrak{D}_i$. Aus $F_{ii} > 0$ folgt wegen (3), daß $F > 0$ ist für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Aus der Formel (5) von FROBENIUS, daß $F \leqq 0$ ist für

$$\lambda_1 D_1^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 D_2^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{6}$$

Somit hat die quadratische Form F von λ_1, λ_2 reelle Nullwerte, d. h. es ist

$$F_{11} F_{22} - F_{12}^2 \leqq 0, \tag{7}$$

und das ist die Ungleichheit MINKOWSKIS.

Wir finden aber leicht etwas mehr. Setzen wir in (3) etwa $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$, so wird

$$F = F_{11} + 2\lambda F_{12} + \lambda^2 F_{22} \tag{8}$$

wegen $F_{22} > 0$ für große $|\lambda|$ positiv. Ferner ist nach (5), (6) $F \leqq 0$ für

$$\lambda = -\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Die Entfernung der beiden Nullstellen λ von F ist somit größer als die zweier Negativstellen, d. h. es ist

$$(10)\quad \frac{2}{F_{22}}(F_{12}^2-F_{11}F_{22})^{\frac{1}{2}} \geqq \text{obere Grenze}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{untere Grenze}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichheit ist dabei so zu verstehen: Man hat den Eibereichen $\mathfrak{B}_i$ gleichsinnig parallele Dreiecke zu umschreiben und von der Wurzel aus deren Flächenverhältnis die „Schwankung" zu ermitteln, wenn man die Seitenrichtungen abändert.

Vertauschen wir die Rollen der gleichberechtigten Fußmarken 1, 2, so finden wir ebenso

$$(11)\quad \frac{2}{F_{11}}(F_{12}^2-F_{11}F_{22})^{\frac{1}{2}} \geqq \text{obere Grenze}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{untere Grenze}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(10) und (11) sind die gesuchten Verschärfungen von (7).

Nehmen wir für $\mathfrak{B}_2$ insbesondere den Einheitskreis. Dann folgt aus (4), daß $F_{12} = L:2$ dem halben Umfang von $\mathfrak{B}_1$ wird. Ferner ist $F_{22} = \pi$. Endlich

$$(12)\qquad \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \varrho$$

der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises zu einem $\mathfrak{B}_1$ umschriebenen Dreieck. Somit folgt aus (10)

$$(13)\qquad L^2 - 4\pi F \geqq \pi^2(\text{obere Grenze }\varrho - \text{untere Grenze }\varrho)^2,$$

was im wesentlichen mit (1) übereinstimmt.

Aus (5) folgt auch sofort, daß in (10) und (11) nur in dem trivialen Fall das Gleichheitszeichen gilt, daß $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ gleichsinnig ähnlich liegen.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen.

Aus einer bei FROBENIUS [3]) auf S. 392 unter (9.) angegebenen Beziehung, die sich aus (5) leicht ergibt und in unserer Schreibweise so lautet

$$(14)\qquad 2(D_1D_2)^{\frac{1}{2}}\left\{F_{12}-(F_{11}F_{22})^{\frac{1}{2}}\right\} \geqq \left\{(F_{11}D_2)^{\frac{1}{2}}-(F_{22}D_1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

folgt, wenn man $\mathfrak{B}_2$ als Einheitskreis wählt, und $D_1 : D_2 = G : \pi$ setzt,

$$(15)\qquad 2(\pi G)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{L}{2}-(\pi F)^{\frac{1}{2}}\right\} \geqq \pi\left\{F^{\frac{1}{2}}-G^{\frac{1}{2}}\right\}^2.$$

Darin kann G die Fläche des größten in $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ enthaltenen oder die Fläche des kleinsten $\mathfrak{B}$ enthaltenden Kreises bedeuten.

Durch Verallgemeinerung der bei BONNESEN[5]) S. 225—227 angestellten Überlegung gelingt es, eine schon von H. BRUNN ausgesprochene Vermutung zu bestätigen: *Die Quadratwurzel aus der Oberfläche des Eikörpers einer Linearschar* $(1-t)\mathfrak{K}_1 + t\mathfrak{K}_2$ *bildet eine nach oben konvexe Funktion*

$$\frac{d^2}{dt^2} O(t)^{\frac{1}{2}} \leqq 0, \quad 0 < t < 1, \tag{16}$$

und zwar nur dann $= 0$, *wenn die Eikörper der Schar ähnlich sind und gleichsinnig ähnlich liegen*[5]).

Zum Teil ist dieses Ergebnis in der von MINKOWSKI [Werke II, S. 261 (82)] angegebenen Beziehung zwischen den gemischten Inhalten dreier Eikörper

$$V_{123}^2 \geqq V_{113} V_{223} \tag{17}$$

als Sonderfall enthalten, wenn man den dritten Eikörper als Kugel wählt. Andrerseits aber geht er über MINKOWSKI hinaus, da hier der Fall aufgeklärt wird, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Ich will auf diese Dinge ausführlicher in dem zweiten Bändchen meiner „Vorlesungen über Differentialgeometrie" eingehen, das 1922 bei J. Springer in Berlin erscheinen soll.

Hamburg, Mathematisches Seminar, im März 1922.

---

[5]) Vgl. dazu auch M. FUJIWARA, Tôhoku Mathematical Journal, **13** (1918), S. 228—235.

Anmerkung bei der Korrektur. Herr BONNESEN war so liebenswürdig, mir mitzuteilen, daß der Hauptgedanke des Verfahrens von FROBENIUS[3]) früher von C. CRONE angegeben wurde, Om Prismatoidens Rumfang, Nyt Tidskrift f. Math. B. 4 XV (1904), S. 73—75. Ferner hat Herr BONNESEN meine Verallgemeinerung seiner Ungleichheit ebenfalls gefunden und vor einem Jahr in der Kopenhagener mathematischen Gesellschaft vorgetragen.