wie z. B. „Höhenfüße“ statt „Höhenfußpunkte“. Als sphärische Punktkoordinaten werden gewöhnlich die Sinus der sphärischen Abstände eines Punktes von den Seiten des recht- oder schiefwinkligen Achsendreieckes verwendet, es treten jedoch auch Entwicklungen in Gudermannschen Achsenkoordinaten auf. Als sphärische Koordinaten eines Hauptkreises benutzt der Verfasser die sphärischen Koordinaten seines Poles. Die Hauptgegenstände der analytisch-geometrischen Untersuchung bilden die merkwürdigen Punkte und Hauptkreise des Kugeldreiecks, das Kugelviereck, die Nebenkreise, die sphärischen Kurven zweiter und dritter Ordnung.

Da es gerade für die Ausbildung des modernen geometrischen Denkens kaum ein besseres Mittel gibt, als analoge geometrische Untersuchungen in verschiedenen Gebieten durchzuführen, also z. B. in der Ebene und auf der Kugel, so wäre das vorliegende Buch insbesondere angehenden Mathematikern zum Studium zu empfehlen. Sie werden daraus eine Fülle von Anregungen empfangen.

Wien, im Juli 1910. *E. Müller.*

Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, F. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali; gesammelt und zusammengestellt von Federigo Enriques, ord. Professor an der Universität zu Bologna. Deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Fleischer. II. Teil: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Mit 135 Fig. im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1907. 8°. VI + 348 S. Preis: geb. 9 M.

Das im Jahre 1900 unter dem Titel „Questioni riguardanti la geometria elementare“ erschienene Originalwerk ist für die deutsche Ausgabe in zwei Teile zerlegt worden, von denen der zweite Teil zuerst erscheint, weil er unter anderem bestimmt sein soll, die Schrift v. F. Klein „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ zu ersetzen, die seit einiger Zeit vergriffen ist und nicht neu aufgelegt werden soll.

Der vorliegende Teil behandelt in neun Artikeln die geometrischen Konstruktionsaufgaben. Der erste Artikel (von E. Baroni) handelt über die Methoden, die man zur Lösung von Aufgaben in der Elementargeometrie ausgedacht hat, also über denselben Gegenstand, den Jul. Petersen in seinem bekannten Büchlein in musterhafter Weise dargestellt hat. Der zweite Artikel (von E. Daniele) zeigt die Lösung der Fundamentalaufgaben nach der Mascheronischen Methode und führt nach A. Adler mit Hilfe der Inversion den Beweis, daß die Elementaraufgaben auch mit dem Zirkel allein lösbar sind. Der dritte, vollkommen elementar gehaltene Artikel (von A. Giacomini) behandelt die Lösung von Konstruktionsaufgaben bei alleiniger Benutzung des Lineals, wobei aber auch die Fälle berücksichtigt werden, daß man in der Zeichenebene „eine Fundamentalfigur“ gegeben habe, wie z. B. ein Parallelogramm, ein Quadrat oder einen Kreis samt Mittelpunkt. Ferner werden zum Schluß noch die Konstruktionen mittels linealer Instrumente (Lineal mit zwei parallelen Kanten, rechter oder schiefer Zeichenwinkel) besprochen, mittels denen man bekanntlich alle Aufgaben lösen kann, die sich mit Hilfe des Lineals und Zirkels lösen lassen.

Waren die vorhergehenden Artikel rein geometrischer Natur, so tritt bei den Lösbarkeitsfragen, mit denen sich die folgenden Artikel beschäftigen, die Anwendung der Algebra und Analysis auf die Geometrie in den Vordergrund. In dem sehr hübschen vierten Artikel (von G. Castelnuovo) werden die Bedingungen dafür aufgesucht, wann eine Aufgabe mit dem Lineal allein, mit Lineal und Zirkel oder mit Lineal und Streckenübertrager lösbar ist. Zur Charakterisierung der angewandten Betrachtungsweise sei eine Stelle (S. 127) herausgegriffen. Denkt man sich eine endliche Anzahl Punkte durch ihre rechtwinkligen Koordinaten $1, a, b, c, \ldots$ gegeben, so besteht der Satz: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine geometrische Aufgabe mit dem Lineal und dem Zirkel gelöst werden kann, besteht darin, daß jede der Gleichungen, in denen die Aufgabe sich analytisch darstellt, eine ganze rationale algebraische Gleichung ist, deren Koeffizienten dem von den Daten $(1, a, b, c \ldots)$ gebildeten Rationalitätsbereiche angehören, und daß außerdem jede der genannten Gleichungen entweder von einem Grade $\leqq 2$ oder durch Lösung einer in der dargelegten Weise gebildeten Aufeinanderfolge von Gleichungen zweiten Grades lösbar ist."

Im fünften Artikel (von F. Enriques) wird die Konstruierbarkeit der regulären Polygone untersucht, der sechste Artikel (von E. Daniele) bringt eine Anzahl Konstruktionen des regulären Siebzehnecks und der siebente Artikel (von A. Conti) bespricht die Lösung der Aufgaben dritten Grades, insbesondere die der klassischen Aufgaben: Verdopplung des Würfels und Dreiteilung des Winkels. Die ausführliche Behandlung der ganzen Reihe von Lösungen für diese Probleme ist vielleicht des Guten zu viel. Es hätte genügt, auf manche der älteren Konstruktionen bloß hinzuweisen und dafür die moderne Wendung dieser Frage eingehender zu berücksichtigen, als es im III. Abschnitt dieses Artikels geschehen.

Sehr willkommen wird vielen Lesern der achte Artikel (von B. Calò) sein, der sich mit den transzendenten Aufgaben, insbesondere mit der Quadratur des Kreises, also mit dem Beweise der Transzendenz der Zahlen π (und e) beschäftigt. Trotz aller Bemühungen des Verfassers ist der Beweis natürlich noch immer nicht leicht verständlich. Eine den Beweisgang wesentlich beeinflussende Bemerkung sei hier zu § 5 beigefügt, die mir von Dr. H. Tietze (Wien) zugekommen. Bei der auf S. 291 eingeführten Zahl M wäre als wesentlich zu betonen, daß man sie unabhängig von dem von σ abhängigen System der Funktionen $g_i\ (z)$ wählen kann, z. B.— übereinstimmend mit der Darstellung bei Weierstraß, Berliner Ber. 1885, *p.* 1081*f.*— gleich a_0^n.

Neu hinzugekommen für diese deutsche Ausgabe ist der neunte Artikel (von F. Enriques), der allgemeine Bemerkungen über die geometrischen Aufgaben bringt, wie über bestimmte und unbestimmte Aufgaben, über Gesichtspunkte für ihre Klassifikation und die Beurteilung der Lösungen sowie der Lösungsmethoden. „Die Lösung auf elementarem Wege ist nur im Hinblick auf den einzelnen Fall die ökonomischste; im Hinblick auf die Gesamtheit ist es der Mühe wert, eine größere wissenschaftliche Vorbereitung zu erwerben, um einen Führer allgemeiner Art zu erhalten und nicht bei jedem Schritt auf eine neue Schwierigkeit zu stoßen", heißt es auf S. 338 Schöne Beispiele hiefür bieten die §§ 12—15, die den Nutzen der Transformationsmethoden zur Lösung von Konstruktionsaufgaben zeigen.

Aus diesen Darlegungen dürfte schon zur Genüge hervorgehen, daß dieses Buch wohl jedem Geometer etwas Interessantes bietet. Jeder der ersten acht Artikel behandelt in abgeschlossener Weise ein Teilgebiet und zeigt, was die moderne Mathematik auf diesem über die Alten hinaus Grundlegendes geleistet hat. Lebhaft zu wünschen wäre es, daß dieses inhaltsreiche und meist leicht lesbare Buch im Kreise der Mittelschullehrer recht weite Verbreitung fände.

E. Müller.

Grundbegriffe der Mengenlehre. Von G. Hessenberg. (S. A. aus den Abh. der Fries'schen Schule, I. Band, 4. Heft). Göttingen. Vandenhoeck u. Ruprecht. 1906. VIII. u. 220 S.; Preis 7 M.

1. Teil: Die Grundbegriffe der Teilung, Vergleichung und Ordnung. Es werden die Axiome der genannten drei Begriffe zusammengestellt, das sind die Forderungen, denen ein System von Dingen zu genügen hat, damit man die Aussagen fällen kann: A ist Teil von B, A ist gleich B (äquivalent B; $A \sim B$), A ist kleiner als B ($A < B$). Die Ausführungen gipfeln in Folgendem: an eine Ordnung ist erstens die Forderung, daß $A < B$, $A \sim B$, $B < A$ sich ausschließen, zweitens die Forderung der Trichotomie zu richten: eine der drei Möglichkeiten: $A < B$, $A \sim B$, $B < A$ tritt wirklich ein. Deshalb ist die Definition: „$A < B$, wenn es einem Teile von B äquivalent ist" unzulässig, da sie im allgemeinen zur vierfachen Disjunktion Anlaß gibt: 1. A ist einem Teil von B, B einem Teil von A äquivalent; 2. A ist einem Teil von B, B keinem Teil von A äquivalent; 3. A ist keinem Teil von B, B einem Teil von A äquivalent; 4. A ist keinem Teil von B, B keinem Teil von A äquivalent. 2. Teil: Äquivalenz, Teilmenge, Mächtigkeit. Es wird gezeigt, daß die Definition der Äquivalenz zweier Mengen durch die eindeutige Zuordenbarkeit, sowie die Definition der Teilmenge den Forderungen des ersten Kapitels genügen. Die vierfache Disjunktion wird bei endlichen Mengen durch Ausscheiden des ersten Falles eine dreifache; es wird das Verhalten unendlicher Mengen diesbezüglich diskutiert. Den Begriffen „endlich" und „unendlich" gegenüber wird zunächst der „naive" Standpunkt eingenommen, es sei bekannt, was „endlich" heißt und jede nicht endliche Menge heißt unendlich. Doch kann auf diesem Standpunkte kein Beweis geführt werden, daß jede unendliche Menge einen ihr äquivalenten echten Teil hat. Mengen, die diese Eigenschaft besitzen, werden daher zunächst als „transfinite" Mengen bezeichnet, der Nachweis aber, daß die Begriffe „transfinit" und „unendlich" sich decken, verschoben. Es folgt ein Abschnitt über abzählbare Mengen, der Äquivalenzsatz (daß im ersten Falle der angeführten vierfachen Disjuktion Äquivalenz herrscht), der Satz von der höheren Mächtigkeit der Menge aller Teilmengen und ein Abschnitt über das Kontinuum. 3. Teil: Ähnlichkeit, Abschnitt und Ordnungstypus. In bekannter Weise werden die geordneten Mengen und ihre Ordnungstypen eingeführt, und nachdem sich herausgestellt hat, daß für die Vergleichung dieser allgemeinen Ordnungstypen die Forderung der Trichotomie sich nicht erfüllen läßt, tritt Beschränkung auf