Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.

(Von Herrn *Kummer*.)

(Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1863.)

Die allgemeine Untersuchung aller Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten Statt haben, und welche darum als durch Bewegung eines veränderlichen Kegelschnitts entstanden betrachtet werden können, stützt sich hauptsächlich auf folgenden Satz:

Wenn eine Ebene aus irgend einer Fläche eine Curve mit Doppelpunkten ausschneidet, so ist jeder dieser Doppelpunkte entweder ein Doppelpunkt der Fläche, oder ein Berührungspunkt der Ebene und der Fläche.

Unter Doppelpunkten einer Curve oder Fläche sind hier alle diejenigen singulären Punkte zu verstehen, für welche die ersten Ableitungen gleich Null werden; eine continuirliche Reihe solcher Doppelpunkte auf einer Fläche bildet eine Doppelpunktscurve derselben. Der Begriff der Berührung ist im engeren Sinne gefasst, so dass nicht jede durch einen Doppelpunkt einer Fläche gehende Ebene als eine in diesem Punkte berührende angesehen wird, sondern nur diejenigen Punkte als eigentliche Berührungspunkte gelten, deren unendlich nahe Punkte nach allen Richtungen hin als zugleich auf der Fläche und der Ebene liegend zu betrachten sind, in so fern in denselben die Abstände der Fläche von der Ebene unendlich kleine Grössen höherer Ordnungen sind.

Wenn eine Ebene aus einer Fläche vierten Grades einen Kegelschnitt ausschneidet, so muss sie zugleich einen zweiten Kegelschnitt ausschneiden. Ein solches Kegelschnittpaar, als Curve vierten Grades betrachtet, hat nothwendig vier Doppelpunkte, welche real oder imaginär, oder auch unendlich entfernt sein können, und von denen auch zwei oder mehrere in einen zusammenfallen können, wenn die beiden Kegelschnitte sich berühren. Zerfällt einer dieser beiden Kegelschnitte in zwei grade Linien, so sind fünf Doppelpunkte vorhanden, und wenn beide Kegelschnitte in grade Linien zerfallen, so bilden sie sechs Doppelpunkte. Umgekehrt, wenn eine Ebene aus einer Fläche vierten Grades eine Curve mit vier, oder mehr als vier Doppelpunkten

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

ausschneidet, so besteht diese Curve vierten Grades nothwendig aus Curven niederer Grade, weil eine irreductible Curve vierten Grades nicht mehr als drei Doppelpunkte haben kann. Diese Curven niederen Grades sind, wenn nicht mehr als vier Doppelpunkte vorhanden sind, und wenn nicht drei derselben in einer graden Linie liegen, nothwendig zwei Kegelschnitte, wenn aber drei dieser vier Doppelpunkte in grader Linie liegen, so zerfällt die Curve vierten Grades nur in eine grade Linie und eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkte. Hat der Schnitt der Ebene und der Fläche vierten Grades fünf Doppelpunkte, so besteht er aus einem Kegelschnitt und zwei graden Linien, hat er sechs Doppelpunkte, so besteht er aus vier graden Linien.

Um die uneigentlichen Flächen vierten Grades, welche aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen, von der folgenden Untersuchung überall auszuschliessen, braucht man den Satz, dass diejenigen Flächen vierten Grades, aus welchen alle beliebigen Ebenen Kegelschnittpaare ausschneiden, nur aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen können, oder noch besser den folgenden mehr aussagenden Satz, dessen strenger Beweis auf algebraischem Wege ohne besondere Schwierigkeit geführt werden kann:

Wenn alle durch einen festen Punkt gehenden Ebenen aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden, so besteht dieselbe aus zwei Flächen zweiten Grades, mit Ausnahme des einen Falles, wo sie ein Kegel vierten Grades ist, und die schneidenden Ebenen alle durch den Mittelpunkt desselben gehen.

Es werden nun folgende Fälle besonders behandelt: erstens, wo die Schaar der Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, nicht eine Schaar von berührenden Ebenen der Fläche ist; zweitens, wo alle Ebenen dieser Schaar Tangentialebenen mit *einem* Berührungspunkte sind, und drittens, wo dieselben *doppelt* berührende Ebenen sind. Es würden eigentlich noch die beiden Fälle hinzuzunehmen sein, wo eine Schaar von Ebenen die Fläche dreifach berührt, und wo sie die Fläche in einer graden Linie berührt; die dreifach berührenden Ebenen, welche hier nur solche sein können, die durch eine auf der Fläche liegende grade Linie gehen, ergeben aber keine bemerkenswerthen Schaaren von Kegelschnittpaaren auf Flächen vierten Grades, und eine Schaar von Ebenen, welche in einer ganzen Linie berühren, findet nur auf den abwickelbaren Flächen vierten Grades Statt, von welchen unmittelbar klar ist, dass eine jede ihrer Tangentialebenen ausser einer graden Doppellinie noch einen Kegelschnitt ausschneidet.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

1. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Wenn eine Schaar von Ebenen, welche eine Fläche vierten Grades nicht berühren, aus derselben Kegelschnittpaare ausschneiden soll, so muss jede Ebene dieser Schaar nothwendig durch vier Doppelpunkte der Fläche hindurch gehen. Ist nun keiner dieser vier Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar derselbe, sondern alle vier Doppelpunkte von einer Ebene zur andern veränderlich, so muss die Fläche vierten Grades nothwendig eine Doppelpunktscurve vierten Grades haben. Hieraus folgt weiter, dass alle beliebigen, auch jener Schaar nicht angehörenden Ebenen aus der Fläche Curven mit vier Doppelpunkten, also Kegelschnittpaare ausschneiden müssen, dass also die Fläche vierten Grades nur aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen kann.

Ist einer der vier Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar derselbe, so müssen die drei anderen, von einer Ebene zur andern veränderlichen Doppelpunkte eine Doppelpunktscurve dritten Grades für die Fläche bilden, welche diesen einen festen Doppelpunkt der Fläche nicht enthält; es müssen darum alle durch diesen festen Punkt gehenden Ebenen Curven vierten Grades mit vier Doppelpunkten, also Kegelschnittpaare ausschneiden, welches nach dem oben aufgestellten Satze nur dann möglich ist, wenn die Fläche vierten Grades aus zwei Flächen zweiten Grades besteht, oder wenn sie eine Kegelfläche ist.

Sind von den vier Doppelpunkten, welche jede Ebene der Schaar aus der Fläche vierten Grades ausschneiden soll, zwei für alle Ebenen dieselben und nur zwei von einer Ebene zur andern veränderlich, so muss diese Fläche ausser den zwei festen Doppelpunkten, durch welche alle Ebenen der Schaar hindurchgehen, noch eine Doppelpunktscurve zweiten Grades haben; und umgekehrt, wenn sie eine Doppelpunktscurve zweiten Grades und ausserdem zwei einzelne Doppelpunkte hat, so schneiden alle durch diese beiden festen Doppelpunkte gehenden Ebenen Curven mit vier Doppelpunkten aus der Fläche aus, also Kegelschnittpaare, wenn nicht etwa die Verbindungslinie beider Doppelpunkte durch die Doppelpunktscurve hindurchgeht, in welchem Falle diese Verbindungslinie eine auf der Fläche liegende grade Linie sein müsste. Man hat also folgenden Satz:

Alle Flächen vierten Grades mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades und zwei einzelnen Doppelpunkten, deren Verbindungslinie nicht durch die Doppelpunktscurve hindurchgeht, werden von der Schaar der durch die beiden Doppelpunkte gehenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

Die allgemeinste Form der Gleichung für alle Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, ist:

$$\varphi^2 = 4p^2\psi,$$

wo φ und ψ ganze rationale Functionen zweiten Grades sind, und p eine lineare Function der drei Coordinaten. Nimmt man in derselben ψ als Product zweier linearen Functionen q und r, so erhält man

$$\varphi^2 = 4p^2qr,$$

und dieses ist die allgemeinste Form der Gleichung aller Flächen vierten Grades, welche ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch zwei Doppelpunkte haben, deren Verbindungslinie nicht eine auf der Fläche liegende grade Linie ist. Die Curve $\varphi=0$, $p=0$ ist die Doppelpunktscurve zweiten Grades, und die beiden Durchschnittspunkte der graden Linie $q=0$, $r=0$, mit der Fläche zweiten Grades $\varphi=0$, sind die beiden Doppelpunkte der Fläche vierten Grades. Alle durch die Axe $q=0$, $r=0$ gehenden Ebenen schneiden Kegelschnittpaare aus der Fläche aus, die beiden Ebenen $q=0$ und $r=0$ schneiden Kegelschnittpaare aus, die sich decken, und sind singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in diesen Kegelschnitten berühren.

Die Flächen vierten Grades, welche ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch zwei Paare von Doppelpunkten haben und zwei durch dieselben hindurchgehende Büschel von Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, sind alle in folgender Form enthalten:

$$(p^2+qr-st)^2 = 4p^2qr,$$

oder was dasselbe ist:

$$(p^2-qr+st)^2 = 4p^2st,$$

wo p, q, r, s, t beliebige lineare Functionen der Coordinaten sind, welche Gleichung auch in folgende einfache Form gesetzt werden kann:

$$p+\sqrt{qr}+\sqrt{st} = 0.$$

Die beiden Büschel von Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, sind $q+\lambda r=0$ und $s+\mu t=0$, für beliebige Werthe der Constanten λ und μ, die Ebenen $q=0$, $r=0$, $s=0$, $t=0$ sind vier singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren, also einhüllen. Da diese Flächen ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades $p=0$, $qr-st=0$, noch vier einzelne Doppelpunkte haben, deren zwei durch die Gleichungen $q=0$, $r=0$, $p^2-st=0$, die beiden anderen durch die Gleichungen $s=0$, $t=0$,

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

$p^2 - qr = 0$ gegeben sind, und da diese vier Doppelpunkte auf sechs verschiedene Weisen sich zu zweien verbinden lassen, so könnte man erwarten, dass sechs verschiedene Schaaren von Kegelschnittpaaren, deren Ebenen durch die sechs Verbindungslinien der vier Doppelpunkte gehen, auf denselben Statt haben möchten; untersucht man aber die Lage der vier Doppelpunkte genauer, so findet man, dass von den sechs Verbindungslinien derselben vier durch die Doppelpunktscurve zweiten Grades hindurchgehen und darum auf der Fläche vierten Grades liegende grade Linien sind, und dass die beiden Ebenenbüschel $q + \lambda r = 0$, und $s + \mu t = 0$ die einzigen sind, welche Kegelschnittpaare ausschneiden.

In diese Kategorie von Flächen vierten Grades gehört unter anderen auch die zuerst von Herrn *Charles Dupin* behandelte und mit dem Namen *Cyclide* belegte Fläche, deren beide Schaaren von Krümmungslinien Kreise sind. Die Doppelpunktscurve zweiten Grades liegt bei derselben im Unendlichen, und von den vier einzelnen Doppelpunkten sind stets zwei imaginär, die beiden anderen aber können real sein. Die Gleichung dieser Fläche kann in folgende einfache Form gesetzt werden:

$$b^2 = \sqrt{(ax-ek)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex-ak)^2 - b^2z^2}.$$

Die allgemeine Untersuchung führt nun weiter zu dem Falle, wo die Schaar von Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus der Fläche vierten Grades ausschneiden sollen, durch drei oder mehrere feste Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht. Eine Schaar solcher Ebenen kann aber nur dann Statt haben, wenn alle diese Doppelpunkte in grader Linie liegen, welche eine grade Doppelpunktslinie der Fläche ist. Dieser Fall giebt unmittelbar folgenden Satz:

Aus einer jeden Fläche vierten Grades, welche eine grade Doppelpunktslinie hat, schneiden alle durch die Doppelpunktslinie gelegten Ebenen Kegelschnitte aus.

Die Gleichungen der Flächen dieser Kategorie sind alle in folgender Form enthalten:

$$p^2\varphi + 2pq\varphi_1 + q^2\varphi_2 = 0$$

wo φ, φ_1, φ_2 beliebige Functionen zweiten Grades, p und q lineare Functionen der Coordinaten sind, $p = 0$, $q = 0$ ist die Linie der Doppelpunkte.

Endlich bleiben hier noch die Fälle zu untersuchen, dass von den vier Doppelpunkten der Kegelschnittpaare, welche von einer Schaar von Ebenen ausgeschnitten werden sollen, zwei oder mehrere in einem, oder in zwei festen Punkten vereinigt sind, in welchen diese Kegelschnittpaare sich be-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

rühren. Die vollständige Erörterung aller dieser Fälle ergiebt zunächst nur eine speciellere Fläche der bereits gefundenen Art $\varphi^2 = 4p^2qr$, mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades und zwei Doppelpunkten, nämlich diejenige, in welcher die beiden Doppelpunkte unendlich nahe an einander liegen, ausserdem aber führt sie auf eine neue merkwürdige Art von Flächen vierten Grades, auf welchen eine Schaar von Kegelschnittpaaren liegen, die einen doppelten Contact haben. Es sind diess die Flächen vierten Grades, welche in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren. Legt man nämlich durch die beiden Selbstberührungspunkte einer solchen Fläche irgend eine Ebene, so schneidet dieselbe eine Curve aus, welche in diesen beiden Punkten sich selbst berührt; eine Curve vierten Grades kann aber nicht zwei Punkte der Selbstberührung haben, ausser wenn sie aus zwei Kegelschnitten besteht, man hat also folgenden Satz:

Die Flächen vierten Grades, welche in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren, haben die Eigenschaft, dass alle durch die beiden Selbstberührungspunkte gehenden Ebenen aus ihnen Kegelschnittpaare ausschneiden, welche sich in diesen beiden Punkten berühren.

Die allgemeinste Form der Gleichung für diese Art von Flächen ist:

$$\varphi^2 = ap^4 + 4bp^3q + 6cp^2q^2 + 4dpq^3 + eq^4,$$

wo φ eine Function zweiten Grades ist, p und q lineare Functionen und a, b, c, d, e Constanten. Die beiden Punkte, in denen diese Fläche sich selbst berührt, sind die Durchschnittspunkte der graden Linie $p = 0$, $q = 0$ mit der Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$. Alle Ebenen des Büschels $p + \lambda q = 0$ schneiden Kegelschnittpaare mit doppeltem Contact aus der Fläche aus, die vier Ebenen aber, in welche der Ausdruck vierten Grades

$$ap^4 + 4bp^3q + 6cp^2q^2 + 4dpq^3 + eq^4 = 0$$

zerfällt werden kann, schneiden aus der Fläche Kegelschnittpaare aus, die sich vollständig decken, sie sind also singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in diesen Kegelschnitten berühren. Eine Doppelpunctscurve hat diese Art von Flächen im Allgemeinen nicht, sondern nur in dem speciellen Falle, wo zwei der vier singulären Tangentialebenen sich zu einer vereinigen, d. i. wenn jener Ausdruck vierten Grades zwei gleiche lineare Factoren hat.

Fasst man alle Fälle zusammen, in denen eine Schaar von Ebenen, welche nicht Tangentialebenen sind, aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnitte ausschneidet, so ergiebt sich aus denselben das allgemeine Resultat:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

Wenn eine Schaar von Ebenen, welche nicht berührende Ebenen einer Fläche vierten Grades sind, aus derselben Kegelschnitte ausschneidet, so gehen alle Ebenen dieser Schaar nothwendig durch eine feste grade Linie. Alle Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden, können daher als durch Rotation eines veränderlichen Kegelschnitts um eine, in seiner Ebene liegende, feste Axe entstanden betrachtet werden.

2. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren einfach herrührender Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Damit eine einfach berührende Ebene aus einer Fläche vierten Grades ein Kegelschnittpaar ausschneide, muss sie nothwendig durch drei Doppelpunkte der Fläche hindurchgehen und diese Bedingung ist zugleich hinreichend, wenn nicht der Berührungspunkt mit zweien dieser Doppelpunkte in einer graden Linie liegt, welche alsdann eine grade Linie der Fläche sein muss.

Wenn nun erstens die Ebenen der Schaar nicht alle durch einen festen Doppelpunkt der Fläche hindurchgehen, so bilden die von einer Ebene zur anderen veränderlichen drei Doppelpunkte, welche jede dieser Ebenen ausschneiden muss, eine Doppelpunktscurve dritten Grades; der Fall aber, dass der Berührungspunkt mit zweien der übrigen drei von der Tangentialebene ausgeschnittenen Doppelpunkten stets in grader Linie liegt, tritt allemal dann, und auch nur dann ein, wenn die Fläche vierten Grades eine gradlinige ist. Also alle Flächen vierten Grades, welche eine Doppelpunktscurve dritten Grades haben und welche nicht gradlinige Flächen sind, werden von allen ihren Tangentialebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten, aus den gradlinigen Flächen vierten Grades aber schneiden die in einem Punkte berührenden Ebenen nur grade Linien mit Curven dritten Grades aus.

Untersucht man nun die besonderen Fälle, erstens, wo die Doppelpunktscurve dritten Grades eine Curve doppelter Krümmung ist, zweitens, wo sie aus einem Kegelschnitt und einer graden Linie besteht, und drittens, wo sie aus drei graden Linien besteht, so findet man:

Alle Flächen vierten Grades, welche eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade zur Doppelpunktscurve haben, sind nothwendig gradlinige Flächen.

Einen Kegelschnitt und eine grade Linie als Doppelpunktscurven kann eine Fläche vierten Grades nur dann enthalten, wenn die grade Linie den

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

Kegelschnitt in einem Punkte schneidet; alle Flächen dieser Art sind aber ebenfalls nur gradlinige.

Drei grade Doppelpunktslinien können Flächen vierten Grades nur in folgenden drei Fällen enthalten, erstens, wenn diese drei graden Linien, in eine zusammenfallend, eine dreifache Linie der Fläche bilden, zweitens, wenn zwei dieser graden Doppelpunktslinien nicht in einer Ebene liegen, die dritte aber diese beiden schneidet und drittens, wenn alle drei graden Doppelpunktslinien durch einen und denselben Punkt gehen. Der erste und zweite dieser Fälle kann aber wieder nur bei gradlinigen Flächen Statt haben, es bleibt daher nur der eine Fall übrig, wo die drei graden Doppelpunktslinien durch einen und denselben Punkt gehen, in welchem die Fläche vierten Grades im allgemeinen nicht eine gradlinige ist. Also:

Die Flächen vierten Grades, welche drei durch einen und denselben Punkt gehende grade Doppelpunktslinien besitzen, haben die Eigenschaft, dass alle Tangentialebenen aus denselben Kegelschnittpaare ausschneiden.

Die allgemeinste Form der Gleichung dieser Flächen ist:

$$Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2\,Dpqrs \;=\; 0,$$

wo p, q, r, s beliebige lineare Functionen der Coordinaten sind, und A, B, C, D beliebige Constanten. Die drei Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ sind diejenigen, deren drei Durchschnittslinien die Doppelpunktslinien der Fläche sind, der Durchschnittspunkt derselben $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ist ein dreifacher Punkt der Fläche. Auf dieser Fläche liegen unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten, in der Art, dass durch jeden beliebigen Punkt des Raumes eine ganze Schaar von Ebenen geht, welche alle Kegelschnittpaare aus der Fläche ausschneiden. Alle Ebenen einer solchen Schaar hüllen einen Kegel sechsten Grades ein, welcher ein einhüllender Kegel der Fläche ist. Durch einen jeden Punkt auf der Fläche gehen unendlich viele Kegelschnitte, deren Ebenen einen Kegel vierten Grades einhüllen, welcher, wenn der Punkt auf einer der drei Doppelpunktslinien liegt, zu einem Kegel zweiten Grades wird.

Diese merkwürdige Art von Flächen vierten Grades, die einzige, auf welcher unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten Statt haben, hat *Steiner* vor einer Reihe von Jahren entdeckt, er hat aber nichts davon veröffentlicht, sondern nur Herrn *Weierstrass* eine Construction derselben mitgetheilt, aus welcher dieser ihre Gleichungen in folgender Form berechnet hat:

$$x = \frac{K}{N}, \quad y = \frac{L}{N}, \quad z = \frac{M}{N},$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

wo K, L, M, N beliebige ganze Functionen zweiten Grades von zwei unabhängigen Veränderlichen sind; aus dieser Form aber lassen sich die Haupteigenschaften der Fläche, namentlich die drei graden Doppelpunktslinien und der ihnen gemeinsame dreifache Punkt, welche in der oben angegebenen Form klar am Tage liegen, nur schwer erkennen.

Wenn die Schaar der einfach berührenden Ebenen, welche aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden sollen, durch einen festen Doppelpunkt der Fläche hindurchgeht, so sind nur zwei der drei Doppelpunkte der Fläche, welche ausgeschnitten werden müssen, von einer Ebene der Schaar zur anderen veränderlich, dieselben müssen daher eine Doppelpunktslinie zweiten Grades bilden, und umgekehrt:

Wenn eine Fläche vierten Grades eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades und ausser dieser noch einen Doppelpunkt hat, so schneiden alle durch diesen Doppelpunkt gehenden Tangentialebenen Kegelschnittpaare aus derselben aus.

Die allgemeinste Form der Gleichung der Flächen vierten Grades, welche ausser einer Doppelpunktscurve zweiten Grades noch einen Doppelpunkt haben, erhält man, indem man in der Gleichung

$$\varphi^2 = 4p^2\psi$$

ψ und φ so wählt, dass $\psi = 0$ einen Kegel zweiten Grades darstellt, und dass die Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$ durch den Mittelpunkt des Kegels $\psi = 0$ hindurchgeht. Der Mittelpunkt dieses Kegels ist alsdann Doppelpunkt der Fläche, und die Schaar der durch denselben hindurchgehenden und die Fläche vierten Grades berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus derselben ausschneidet, ist dieselbe als die Schaar der berührenden Ebenen des Kegels $\psi = 0$. Derjenige Kegel zweiten Grades, welcher in dem festen Doppelpunkte an die Fläche vierten Grades sich am genausten anschliesst, kann ebenfalls als ein solcher angesehen werden, dessen Tangentialebenen zugleich berührende Ebenen der Fläche sind, aber die Berührungspunkte derselben fallen überall mit dem festen Doppelpunkte selbst zusammen, und jede der durch dieselben ausgeschnittenen Curven hat in diesem Punkte eine Spitze und ausserdem zwei Doppelpunkte, ist also nicht ein Kegelschnittpaar, sondern eine irreductible Curve vierten Grades.

Der Fall, dass eine Schaar berührender Ebenen durch zwei feste Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht, welcher nur dann Statt haben kann, wenn die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte eine auf der Fläche liegende

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

grade Linie ist, führt auf keine besondere Art von Flächen vierten Grades mit Schaaren von Kegelschnitten.

3. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von zweifach berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Jede zweifach berührende Ebene, welche ein Kegelschnittpaar aus einer Fläche vierten Grades ausschneiden soll, muss nothwendig durch zwei Doppelpunkte der Fläche hindurch gehen. Wenn nun eine ganze Schaar solcher Ebenen Statt haben soll, so können dieselben nicht alle durch einen festen Punkt gehen, die beiden Doppelpunkte müssen daher von einer Ebene der Schaar zur andern veränderlich sein und eine Doppelpunktscurve zweiten Grades bilden, also:

Die Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, werden von allen doppelt berührenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten.

Die schon oben aufgestellte Gleichung aller Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, nämlich:

$$\varphi^2 = 4p^2\psi$$

kann man auch in folgende Form setzen:

$$(\varphi+2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2),$$

in welcher λ eine ganz beliebige Constante ist. Bestimmt man diese Constante in der Art, dass die Fläche zweiten Grades

$$\psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2 = 0$$

eine Kegelfläche wird, so ist diese Kegelfläche eine solche, welche die Fläche vierten Grades doppelt einhüllt, in der Art, dass jede Tangentialebene dieser Kegelfläche die Fläche vierten Grades in zwei verschiedenen Punkten berührt; die Schaar der diesen Kegel berührenden Ebenen ist also eine Schaar doppelt berührender Tangentialebenen der Fläche vierten Grades, welche Kegelschnittpaare aus derselben ausschneiden. Die leicht zu entwickelnde Bedingung, dass $\psi+\lambda\varphi+\lambda^2p^2=0$ eine Kegelfläche darstelle, führt auf eine Gleichung fünften Grades für die Constante λ, deren fünf Wurzeln fünf Kegelflächen geben, also:

Es giebt im allgemeinen fünf verschiedene Kegel zweiten Grades, deren Tangentialebenen eine Fläche vierten Grades mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades doppelt berühren, und Kegelschnittpaare aus derselben ausschneiden.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM

Wenn die Gleichung fünften Grades für λ imaginäre Wurzeln hat, so werden die denselben entsprechenden Schaaren doppelt berührender Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, ebenfalls imaginär; wenn diese Gleichung aber zwei gleiche Wurzeln hat, so treten an die Stelle der entsprechenden Schaaren doppelt berührender Ebenen nur zwei singuläre Tangentialebenen der Fläche vierten Grades, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren, oder auch eine Schaar einfach berührender Ebenen, welche aber alle durch einen festen Doppelpunkt der Fläche gehen. Hat die Fläche vierten Grades ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch ein oder zwei Paare von Doppelpunkten, deren Verbindungslinien nicht durch die Doppelpunktscurve hindurchgehen, und demgemäss eine oder zwei Schaaren von nicht berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, so bleiben von den fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen stets nur drei oder eine übrig, weil die anderen zu singulären Tangentialebenen der Fläche werden.

Für die *Dupin*sche Cyclide hat die Gleichung fünften Grades, welche die fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen bestimmt, zwei Paare gleicher Wurzeln, welchen die vier singulären Tangentialebenen dieser Fläche entsprechen (von denen zwei stets imaginär sind); die fünfte Wurzel dieser Gleichung aber giebt einen wirklichen Kegel zweiten Grades, dessen Tangentialebenen Kegelschnittpaare aus der Cyclide ausschneiden. Herr Stud. *Schwarz*, dem ich die Existenz dieser, wie ich glaube früher noch nicht bemerkten Schaar von Kegelschnitten auf der Cyclide mitgetheilt habe, hat gefunden, dass dieselbe stets eine Doppelschaar von Kreisen ist, dass also diese Fläche nicht nur auf zwei, sondern sogar auf vier verschiedene Weisen durch Bewegung eines veränderlichen Kreises erzeugt werden kann.

Endlich sind hier noch die gradlinigen Flächen vierten Grades zu erwähnen. Die doppelt berührenden Ebenen derselben gehen stets durch zwei der erzeugenden Graden, sie schneiden also ausser diesen beiden graden Linien nothwendig noch Kegelschnitte aus, welche auch selbst wieder in zwei grade Linien zerfallen können. Also:

Alle doppelt berührenden Ebenen der gradlinigen Flächen vierten Grades schneiden aus denselben zwei grade Linien und einen Kegelschnitt aus.

Berlin, im Juli 1863.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 6/23/15 11:30 PM