

## 18.

## Beitrag zur analytischen Sphärik.

(Von Herrn Prof. Dr. E. Gudermann in Münster.)

## 1.

In meinem Grundrisse der analytischen Sphärik sind Formeln entwickelt worden, nach welchen man aus den gegebenen Gleichungen zweier Hauptkreise den Winkel berechnen kann, unter welchem sich diese beiden Linien schneiden. Es zeigt sich aber nicht selten das Bedürfnis, wenn die Gleichung eines Systemes zweier Hauptkreise gegeben ist, unmittelbar aus dieser Gleichung den Winkel der beiden Hauptkreise zu bestimmen.

Ist  $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = 0$  die Gleichung des Systemes der beiden Hauptkreise, und bezeichnet  $(x', y')$  den Durchschnittspunkt derselben, so haben die einzelnen Gleichungen derselben die Form

$$y - y' = v(x - x') \quad \text{und} \quad y - y' = v'(x - x'),$$

und die Gleichung des Systemes der beiden Hauptkreise ist also

$$[y - y' - v(x - x')][y - y' - v'(x - x')] = 0;$$

wird diese Gleichung entwickelt und mit der gegebenen Gleichung identificirt, so erhält man die folgenden Bestimmungen:

$$-A(v + v') = 2B,$$

$$A.v.v' = C,$$

$$A(-2y' + (v + v')x') = 2D,$$

$$A(-2vv'x' + (v + v')y') = 2E,$$

$$A(y'^2 - (v + v')x'y' + vv'x'^2) = G.$$

Die vier ersten Formeln geben zunächst die beiden Gleichungen

$$Ay' + Bx' + D = 0, \quad \text{und} \quad By' + Cx' + E = 0,$$

welche zur Bestimmung des Durchschnittspunctes  $(x', y')$  der beiden Hauptkreise dienen, und aufgelöst die beiden Formeln geben:

$$x' = \frac{AE - BD}{B^2 - AC} \quad \text{und} \quad y' = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}.$$

Der Ausdruck für  $G$  läßt sich umformen in  $G = -Dy' - Ex'$ ; und werden hierin noch für  $x'$  und  $y'$  die so eben gefundenen Ausdrücke substituirt, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$AE^2 - 2BDE + CD^2 + G(B^2 - AC) = 0$$

für die Constanten der gegebenen Gleichung, wenn sie einem Systeme zweier Hauptkreise zugehören soll.

Für  $v$  und  $v'$  erhält man endlich die Ausdrücke

$$v = \frac{-B + \sqrt{(B^2 - AC)}}{A} \quad \text{und} \quad v' = \frac{-B - \sqrt{(B^2 - AC)}}{A},$$

woraus noch zum künftigen Gebrauche folgt:  $v - v' = \frac{2\sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$ .

Sind nun aber  $ax + by + c = 0$  und  $a'x + b'y + c' = 0$  die Gleichungen zweier Hauptkreise welche sich unter einem Winkel  $= V$  schneiden, und ist der Coordinatenwinkel  $= r$ , so ist, nach §. 11. des oben genannten Grundrisses,

$$\tan V = \pm \frac{\sin r \sqrt{[(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 - 2(ac' - ca')(bc' - cb') \cos r]}}{aa' + bb' + cc' \sin^2 r - (ab' + ba') \cos r},$$

und da im vorliegenden Falle  $a = v$ ,  $b = -1$ ,  $c = y' - vx'$ ,  $a' = v'$ ,  $b' = -1$  und  $c' = y' - v'x'$  ist, so findet man, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$aa' + bb' + cc' \sin^2 r - (ab' + ba') \cos r = \frac{A - 2B \cos r + C + G \sin r}{A};$$

ferner ist  $ac' - ca' = -(v' - v)y$ ;  $ab' - ba' = (v' - v)$ ,  $bc' - cb' = (v' - v)x$ , und es ist also

$$\tan V = \frac{\pm 2 \sin r \sqrt{(1 + x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos r)} \cdot \sqrt{(B^2 - AC)}}{A - 2B \cos r + C + G \sin^2 r}.$$

eine Formel, in welcher auch noch für  $x'$  und  $y'$  die oben angegebenen Werthe substituirt werden können. Bezeichnet man den Abstand des Durchschnittspunctes  $(x', y')$  der beiden Hauptkreise vom Anfangspuncte der Coordinaten mit  $\lambda$ , so ist also auch:

$$\tan V = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{(B^2 - AC)}}{A - 2B \cos r + C + G \sin^2 r} \cdot \frac{\sin r}{\cos \lambda},$$

und es ist dann

$$\tan \lambda^2 = \frac{(AE - BD)^2 - 2(AE - BD)(CD - BE) \cos r + (CD - BE)^2}{(B^2 - AC)^2},$$

Sollen die beiden Hauptkreise auf einander senkrecht sein, so hat man die einfache Gleichung

$$A - 2B \cos r + C + G \sin^2 r = 0,$$

welche sich, im Falle eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, noch zusammenzieht auf

$$A + C + G = 0.$$

## 2.

Wenn man von einem Puncte  $P = (t, u)$  im Umfange eines sph. Kegelschnitts, dessen Gleichung  $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = 0$

ist, nach den Endpunkten einer Sehne  $MN$ , deren Gleichung  $mx + ny = 1$  sein mag, zwei andere Sehnen  $PM$  und  $PV$  zieht, und der Kürze wegen setzt:  $\lambda = mt + nu - 1$ ,  $p = Au + Bt + D$ ,  $q = Bu + Ct + E$ ,  $r = Du + Et + G$ , so ist, nach einer frühern Abhandlung, die Gleichung des Systemes der beiden zuletzt genannten Sehnen:

$$(Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G)\lambda = 2(py + qx + r)(mx + ny - 1),$$

oder auch

$$(A\lambda - 2pn)y^2 + 2(B\lambda - pm - qn)xy + (C\lambda - 2qm)x^2 + 2(Dx - rn + p)y + 2(E\lambda - rm + q)x + G\lambda + 2r = 0.$$

Soll nun das in den Kegelschnitt eingeschriebene Dreieck  $MPN$  rechtwinkelig und  $P$  der rechte Winkel sein, so hat man, nach dem Vorigen, die Bedingungs-Gleichung

$$A\lambda - 2pn + C\lambda - 2qm + G\lambda + 2r = 0,$$

oder auch  $(A + C + G)(mt + nu - 1) = 2(pn + qm - r)$ , wenn der Coordinatenwinkel  $= 90^\circ$  ist.

Nehmen wir nun die beiden Hauptaxen des Kegelschnitts selbst zu Coordinaten-Axen, so hat die Gleichung desselben die einfachere Form

$$1. \quad Ay^2 + Cx^2 + G = 0,$$

und es ist also  $B = D = E = 0$ ; daher ist  $p = Au$ ,  $q = Ct$  und  $r = G$ , und hiernach verwandelt sich die obige Bedingungs-Gleichung in

$$(A + C + G)(mt + nu - 1) = 2(Anu + Cmt - G),$$

oder

$$2. \quad (G + C - A).nu + (G + A - C).mt = A + C - G.$$

Sehen wir nun die Sehne  $MN$  als gegeben oder unveränderlich an, so sind  $m$  und  $n$  ebenfalls gegeben, und indem wir die so eben erhaltene Gleichung mit der Gleichung  $Au^2 + Ct^2 + G = 0$  verbinden, sind die Werthe von  $t$  und  $u$  bestimmt, und also auch die Lage des Punctes  $P$ ; nur dafs bei dieser Bestimmung eine Zweideutigkeit obwaltet. Daher können über der Sehne  $MN$  eines Kegelschnitts nicht mehr als zwei Peripherie-Winkel construirt werden, wenn ein solcher Winkel ein rechter sein soll.

### 3.

Wenn wir hingegen den Scheitel  $P = (t, u)$  des rechten Winkels in der Peripherie des Kegelschnitts festhalten, so kann sich der rechte Winkel um diesen Punct drehen, und die Sehne  $MN$ , oder auch die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks  $MPN$ , erhält dabei immer andere

und andere Lagen. Um den Durchschnittspunct der Sehne  $MN$  mit der consecutiven zu finden, hat man die beiden Gleichungen

$$m + x + ny = 1$$

und

$$(G + C - A)nu + (G + A - C).mt = A + C - G$$

dergestalt zu differenziiiren, daß man nur  $m$  und  $n$  als veränderlich ansieht, wodurch man erhält:

$$x dm + y dn = 0,$$

und

$$(G + C - A)u dn + (G + A - C).t dm = 0;$$

also

$$(G + C - A). \frac{u}{y} = (G + A - C). \frac{t}{x}.$$

Wird aber der Werth  $(G + C - A)u = (G + A - C). \frac{ty}{x}$  in der obigen Gleichung substituirt, so erhält man

$$(G + A - C)nty + (G + A - C)mtx = (A + C - G)x,$$

oder

$$(G + A - C)(ny + mx)t = (A + C - G)x,$$

und, da  $ny + mx = 1$  ist, so hat man

$$x = \frac{G + A - C}{A + C - G}.t \quad \text{und} \quad y = \frac{G + C - A}{A + C - G}.u.$$

Der hierdurch bestimmte Durchschnittspunct, welcher  $P'$  heißen mag, hängt also nur von der Lage des Punctes  $P$  im Umfange des Kegelschnitts ab, und wir haben also das folgende Theorem:

Drehet sich ein in einen Kegelschnitt beschriebenes rechtwinkeliges Dreieck um den Scheitel des rechten Winkels, während die Hypotenuse immer eine Sehne des Kegelschnitts bleibt, so schneiden sich alle diese Hypotenusen immer in einem festen Puncte, welcher sich nur dann ändert, wenn der Scheitel des rechten Winkels auf dem Umfange des Kegelschnitts fortrückt.

Da zu jedem Puncte  $P$  ein Punct  $P'$  gehört, so gehören die Puncte  $P'$  dem Umfange einer Curve an, deren Gleichung leicht zu finden ist, und dadurch erhalten wird, daß man die Ausdrücke

$$t = \frac{A + C - G}{G + A - C}x \quad \text{und} \quad u = \frac{A + C - G}{G + C - A}y,$$

in der Gleichung  $Au^2 + Ct^2 + G = 0$  substituirt. Man erhält dadurch aber

$$\frac{A}{(G + C - A)^2}y^2 + \frac{C}{(G + A - C)^2}x^2 + \frac{G}{(A + C - G)^2} = 0,$$

und hiernach ist die Ortscurve des Punctes  $P'$  ebenfalls ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen Kegelschnitte (der Ortscurve des Punctes  $P$ ) dieselben drei Mittelpuncte und zwar insbesondere denselben inneren Mittelpunct hat. Man kann auch nun leicht aus den Axen des einen Kegelschnitts die Axen des anderen herleiten, womit wir uns aber nicht weiter aufhalten.

**Zusatz.** Es hält nicht schwer, die reciproken Sätze anzugeben: Wenn man um einen sphärischen Kegelschnitt rechtseitige Dreiecke (solche, deren eine Seite ein Quadrant ist) beschreibt, und die Seite, welche der Quadrant ist, in einem festen, den Kegelschnitt berührenden Hauptkreise fortrückt, so beschreibt der Scheitel des Gegenwinkels einen zweiten Hauptkreis, und wenn dann weiter der erstgenannte Hauptkreis den gegebenen Kegelschnitt umhüllt, so umhüllt der zuletzt genannte Hauptkreis einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen dieselben drei Mittelpuncte hat.

## 4.

Wenn man von einem Puncte  $P = (x', y')$  aus zwei Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, dessen Gleichung

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = 0$$

sein mag, so ist bekanntlich die Gleichung des Systemes dieser beiden Tangenten

$$\begin{aligned} (B^2 - AC)(xy' - yx')^2 + 2(BD - AE)(y' - y)(xy' - yx') + (D^2 - AG)(y' - y)^2 \\ + 2(CD - BE)(x' - x)(xy' - yx') + 2(DE - BG)(x' - x)(y' - y) \\ + (E^2 - GC)(x' - x)^2 = 0, \end{aligned}$$

es mag die Construction eben oder auch sphärisch sein. Diese Gleichung gestattet eine Umformung, welche wichtig ist und neu zu sein scheint, und welche ich hier daher mitzutheilen wage. Man kann nämlich statt der vorstehenden Gleichung die folgende an die Stelle setzen:

$$[Ayy' + B(xy' + yx') + Cxx' + D(y + y') + E(x + x') + G]^2 = (Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G)(Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + G).$$

Es wird hier hinreichen, durch die Entwicklung dieser Gleichung ihre Übereinstimmung mit der vorigen nachzuweisen. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} p = Ay + Bx + D, \quad q = By + Cx + E, \quad r = Dy + Ex + G, \text{ und} \\ p' = Ay' + Bx' + D, \quad q' = By' + Cx' + E, \quad r' = Dy' + Ex' + G, \end{aligned}$$

so ist zunächst

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = py + qx + r,$$

$$Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + G = p'y' + q'x' + r',$$

$$Ayy' + B(xy' + x'y) + Cxx' + D(y + y') + E(x + x') + G = p'y + q'x + r'$$

und auch

$$= py' + qx' + r,$$

und die zu beweisende Gleichung verwandelt sich also in die folgende:

$$(py' + qx' + r)(p'y + q'x + r') = (py + qx + r)(p'y + q'x + r'),$$

welche durch Entwicklung sich verwandelt in

$$(pq' - qp')(xy' - yx') + (pr' - rp')(y' - y) + (qr' - rq')(x' - x) = 0.$$

Werden aber die Werthe von  $p, q, r, p', q', r'$  benutzt, so erhält man

$$pq' - qp' = (B^2 - AC)(xy' - yx') + (BD - AE)(y' - y) + (CD - BE)(x' - x),$$

$$pr' - rp' = (BD - AE)(xy' - yx') + (D^2 - AG)(y' - y) + (DE - BG)(x' - x),$$

$$qr' - rq' = (CD - BE)(xy' - yx') + (ED - GB)(y' - y) + (E^2 - GC)(x' - x),$$

und werden diese Ausdrücke in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man die allgemein bekannte Gleichung für das System der beiden Tangenten. Wir können unsere Gleichung auch auf folgende Art schreiben:

$$[(Ay' + Bx' + D)y + (By' + Cx' + E)x + Dy' + Ex' + G]^2 = \\ Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G)(Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + G) \\ = 0.$$

Verbinden wir diese Gleichung des Systemes der beiden Tangenten mit der Gleichung des Kegelschnittes selbst, d. h. setzen wir den Factor

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung der Chordale, welche hier also die Berührungssehne ist, nämlich die Gleichung

$$(Ay' + Bx' + D)y + (By' + Cx' + E)x + Dy' + Ex' + G = 0,$$

und da diese zugleich die Gleichung für die Polare des Punctes  $P$  ist, so ist also jene Berührungssehne mit der Polare des Punctes  $P$  einerlei, und gerade aus diesem Grunde läßt sich die Gleichung des Systems der beiden Tangenten also in Factoren zerlegen.

## 5.

Die gefundene Gleichung vermittelt nun den Übergang zur Auflösung einer anderen analytischen, die Kegelschnitte betreffenden Aufgabe, wovon sowohl in der Planimetrie als in der Sphärik Gebrauch gemacht werden kann.

Es sei  $ay + bx + c = 0$  die Gleichung einer Sehne eines Kegelschnitts: man soll durch die beiden Endpunkte dieser Sehne Tangenten legen, und die Gleichung des Systemes dieser beiden Tangenten herleiten.

Es sei wieder  $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = 0$  die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts, und  $(x', y')$  der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten, so ist

$(Ay' + Bx' + D)y + (By' + Cx' + E)x + Dy' + Ex' + G = 0$  die Gleichung der Berührungssehne; und wird sie mit der gegebenen Gleichung indentificirt, so erhält man

$$y' = \frac{(E^2 - GC)a + (GB - DE)b + (CD - BE)c}{(CD - BE)a + (AE - BD)b + (B^2 - AC)c}$$

und

$$x' = \frac{(GB - DE)a + (D^2 - GA)b + (AE - BD)c}{(CD - BE)a + (AE - BD)b + (B^2 - AC)c},$$

und diese Ausdrücke müssen in der Gleichung

$$(p'y + q'x + r')^2 = (py + qx + r)(p'y' + q'x' + r')$$

des Systems der beiden Tangenten substituirt werden. Den gleichen Nenner der beiden Ausdrücke bezeichnen wir mit  $N$ , und mit  $n$  den Ausdruck  $AE^2 - 2BDE + CD^2 + G(B^2 - AC)$ . Wird die Substitution wirklich vollführt, so erhält man

$$p' = Ay' + Bx' + D = \frac{na}{N}; \quad q' = By' + Cx' + E = \frac{nb}{N}$$

und

$$r' = Dy' + Ex' + G = \frac{nc}{N},$$

und hierdurch verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{n}{N}(ay + bx + c)^2 = (py + qx + r)(ay' + bx' + c);$$

die weitere Substitution und Reduction führt endlich zu der Gleichung:

$$[AE^2 - 2BDE + CD^2 + G(B^2 - AC)](ay + bx + c)^2 \\ = (Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G) \cdot K,$$

in welcher unter  $K$  der constante Factor:

$$K = (E^2 - GC)a^2 + 2(GB - DE)ab + (D^2 - GA)b^2 + 2(CD - BE)ac \\ + 2(AE - BD)bc + (B^2 - AC)c^2$$

verstanden wird. Diese Gleichung für das System der beiden durch die Endpunkte der gegebenen Sehne gehenden Tangenten des Kegelschnitts scheint ebenfalls neu zu sein, und nur ein specieller Fall derselben findet sich in den Lehrbüchern der analytischen Planimetrie und in einer früheren Abhandlung von mir in Bezug auf die Sphärik.

Ist nämlich  $a = b = 0$ , d. h. ist ein Stück der Cardinale des Coordinaten-Systems selbst die gegebene Berührungssehne, so ist  $K = (B^2 - AC) \cdot c^2$  und die Gleichung verwandelt sich nun in

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex = \frac{AE^2 - 2BDE + CD^2}{B^2 - AC};$$

in der Planimetrie stellt aber diese Gleichung das System der beiden Asymptoten der Hyperbel dar.

Gelegentlich werde ich auf die Anwendungen der vorstehenden allgemeinen Gleichung zurückkommen.

## Beweis des Lehrsatzes 28. im zweiten Bande dieses Journals (Seite 190).

(Die Aufnahme ist durch Zufall einige Jahre verspätet.)

Der Lehrsatz heisst:

Wenn irgend ein sphärisches Dreieck  $ABC$  (Taf. II. Fig. 2.) gegeben ist, und man zieht aus seinen Winkeln durch irgend einen Punkt  $P$  Hauptkreise  $APA_1$ ,  $BPB_1$ ,  $CPC_1$ , welche die gegenüberliegenden Seiten in  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  treffen, so hat man, wenn  $M$  der Pol (das Centrum) und  $R$  der Radius des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises ist:

$$\frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} + \frac{\sin PB_1}{\sin BB_1} + \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1} = \frac{\cos MP}{\cos R}.$$

Um diesen Satz elementar zu beweisen, ziehe man vom Mittelpunkte der Kugel aus Radien nach den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $P$ ,  $M$ ; von den fünf letzten Radien werde das Sehnendreieck in  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $p$ ,  $m$  geschnitten; ferner ziehe man im Sehnendreiecke die geraden Linien  $Aa'$ ,  $Bb'$ ,  $Cc'$ , welche sich in  $p$  schneiden, und noch die gerade Linie  $mp$  vom Mittelpunkte  $m$  des Kreises, nach dem Durchschnittspunkte  $p$ . Wird der Mittelpunkt der Kugel mit  $V$  bezeichnet, so ist offenbar

$$\frac{pb'}{Bb'} = \frac{Vp}{VB} \cdot \frac{\sin PB_1}{\sin BB_1}, \quad \frac{pa'}{Aa'} = \frac{Vp}{VA} \cdot \frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} \quad \text{und} \quad \frac{pc'}{Cc'} = \frac{Vp}{VC} \cdot \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1};$$

Da nun aber  $\frac{pb'}{Bb'} + \frac{pa'}{Aa'} + \frac{pc'}{Cc'} = 1$  und  $VA = VB = VC$  ist, so erhält man

$$\frac{\sin PB_1}{\sin BB_1} + \frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} + \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1} = \frac{VA}{Vp}.$$

Nun ist aber  $Vm = VA \cos R$ , und  $Vm = Vp \cdot \cos MP$ , also ist  $\frac{VA}{Vp} = \frac{\cos PM}{\cos R}$ , welches dem aufgestellten Satze gemäß ist.