16.

Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können.

(Von dem Herrn Conrector *Fasbender* zu Iserlohn.)

Soll (Taf. I. Fig. 1.) um ein Dreieck ABC ein gleichseitiges DEF gelegt werden, so kann eine Seite DE unter beliebigem Winkel φ gegen BC gezogen werden. Die Länge seiner Seite ist

$$\frac{a\cdot\sin\varphi+b\cdot\sin(\frac{1}{3}\pi+\gamma-\varphi)}{\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

Die Lothe, die man durch A, B und C auf die zugehörigen Seiten von DEF errichtet, schliefsen ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck ein. Für seine Seite erhält man, wenn man $\varphi-\frac{1}{2}\pi$ an die Stelle von φ setzt,

$$\frac{-a\cdot\cos\varphi+b\cdot\cos(\frac{1}{3}\pi+\gamma-\varphi)}{\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

Werden die Inhalte der beiden gleichseitigen Dreiecke mit M und m bezeichnet, so ist

$$(\theta.)\qquad M+m=\frac{a^2+b^2-2ab\cdot(\frac{1}{3}\pi+\gamma)}{2\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

Hiernach ist DEF ein Maximum, wenn die drei Lothe sich in Einem Puncte schneiden. Dies geschieht fortwährend unter $\frac{2}{3}\pi$, also (vorausgesetzt, dafs kein Winkel von ABC gröfser ist als $\frac{2}{3}\pi$) in dem Puncte, dessen Summe der Abstände von den 3 Spitzen des Dreiecks ein Minimum ist. Man kann daher, wenn dieser Punct gefunden ist, auch das gröfste um ABC zu legende gleichseitige Dreieck zeichnen.

Den Inhalt dieses letztern giebt die rechte Seite von $(\theta.)$ an. Für die Höhe h ist also

$$h^2=a^2+b^2-2ab\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\gamma).$$

Dieser Ausdruck mufs hinsichtlich des Dreiecks ABC symmetrisch sein. In der That läfst er sich, wenn I der Inhalt von ABC ist, verwandeln in

$$\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+4I\sin\tfrac{1}{3}\pi.$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn man h construirt. Sind (Fig. 2.) die Dreiecke CAG, ABH und BCI gleichseitig, so ist BG oder AI die zu construirende Linie; beide aber haben mit CH gleiche Länge.

Diese drei Linien schneiden sich in einem und demselben Puncte. Ist K der Durchschnitt von BG und AI, so ist, der Congruenz wegen, $\angle KIC = KBC$; also läfst sich durch die Puncte K, B, I und C ein Kreis legen und es ist $\angle BKC = \frac{2}{3}\pi$. Dasselbe gilt von AKC, und es mufs auch nun $AKB = \frac{2}{3}\pi$ sein. Daher läfst sich durch A, K, B und H ein Kreisbogen legen, da $HKA = \frac{1}{3}\pi$ und $CKH = \pi$ ist. Die Linie CH geht also durch den Durchschnitt von AI und BG; dieser Durchschnitt ist der obige Punct der kleinsten Abstandssumme. Überdies ist jede der drei genannten Linien diese kleinste Abstandssumme. Wird nemlich um BIC jener Kreis beschrieben, so ist, wo man auch K auf dem Bogen BC nimmt, stets

$$KB + KC = KI,$$

also

$$KA + KB + KC = AI.$$

Die kleinste Abstandssumme des Dreiecks ABC ist also gleich der Höhe des gröfsten um ABC zu legenden gleichseitigen Dreiecks.

Da BG auf DE senkrecht steht, so ist das aus F auf DE gefällte Loth BG nicht nur gleich, sondern auch parallel. Daher ist ferner FG mit DE, und ähnlich, DH mit EF und EI mit DF parallel.

Iserlohn, im März 1845.