Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören.

Von

G. Szegő in Berlin.

Einleitung.

Herr Faber hat das Problem aufgeworfen, zu einem gegebenen Bereiche D in der komplexen x-Ebene eine, nur von diesem Bereiche abhängende Folge von Polynomen zu finden, so daß *jede analytische Funktion, die sich in dem gegebenen Bereiche regulär verhält, dort in eine, nach diesen Polynomen fortschreitende Reihe entwickelbar ist.* Er hat auch mit Hilfe konformer Abbildung des Außengebietes von D eine Lösung dieser Aufgabe gegeben[1]).

Herr Fejér hat neuerdings im Zusammenhange mit seinen Untersuchungen über Interpolation auch eine allgemeine Lösung dieses Problems gegeben, indem er für die Wurzeln der Polynome, nach denen die Entwickelung fortschreitet, eine einfache Vorschrift angibt[2]).

Vorliegende Arbeit entstand aus einem Versuch, die Fabersche Frage auf eine neue Weise zu lösen. Es sei der Einfachheit halber die Begrenzung von D ein einziger regulär-analytischer Kurvenzug C; ich betrachte die Polynome

$$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

($P_n(x)$ ist vom n-ten Grade und sein höchster Koeffizient ist reell und

[1]) Über polynomische Entwickelungen [Mathematische Annalen, **57** (1903), S. 389 bis 408]; ferner: Über polynomische Entwickelungen II. [Mathematische Annalen, **64** (1907), S. 116–135]. — Im Falle einer Ellipse hat Picard dieselbe Aufgabe gelöst. S. Traité d'analyse, Zweite Auflage, Paris 1905 (Gauthiers-Villars), 2, S. 317. — Man vgl. auch Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Zweite Auflage, Berlin 1878–81 (G. Reimer), **1**, S. 198.

[2]) Interpolation und konforme Abbildung (Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1918, S. 319–331). Man vgl. insbesondere § 5.

positiv), welche durch die Kurve C und durch die folgende Orthogonalitätseigenschaft eindeutig bestimmt sind:

$$\frac{1}{l}\int_C P_m(\xi)\,\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma = \varepsilon_{mn},$$

d. h. 0 oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$; l bezeichnet hier die Länge, $d\sigma$ das Bogenelement der Kurve C[3]).

Die Polynome $P_n(x)$, welche ich im folgenden als die *„zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome"* bezeichnen möchte, besitzen mehrere interessante Eigenschaften. Unter anderen genügen sie auch der Faberschen Forderung: *Jede, in dem gegebenen Bereiche D reguläre analytische Funktion $F(x)$ kann in eine, nach den orthogonalen Polynomen fortschreitende Reihe entwickelt werden:*

$$F(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots.$$

Die Koeffizienten dieser Entwickelung lassen sich sogar einfach auf die Fouriersche Weise durch die Formeln

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\,\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ausdrücken.

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$P_n(x) = x^n;$$

man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^m\,\overline{x}^n\,d\theta = \varepsilon_{mn} \quad (x = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die orthogonalen Polynome sind demnach Verallgemeinerungen der ganzzahligen Potenzen von x; die Entwickelung nach diesen Polynomen ist dementsprechend eine Verallgemeinerung der Potenzreihe. Es gibt, wie wir sehen werden, eine ganze Reihe von Eigenschaften, die das eben definierte Polynom $P_n(x)$ mit x^n teilt, wie denn auch die Entwickelung nach diesen Polynomen die größte Analogie mit der Potenzreihe aufweist.

In dem Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist (entstanden durch die Verflachung einer Ellipse mit den Brennpunkten $-1, 1$), reduziert sich $P_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) auf das n-te Legendresche Polynom.

Das I. Kapitel dieser Arbeit enthält die Definition und die allgemeinen Eigenschaften der orthogonalen Polynome $P_n(x)$. Das II. und III. Kapitel behandeln den merkwürdigen Zusammenhang, in welchem diese Polynome

[3]) $\bar{a}$ bezeichnet die zu a konjugiert komplexe Größe.

mit jenen Funktionen stehen, welche eine *schlichte* Abbildung des Innen- bzw. Außengebietes der Kurve C der x-Ebene auf das Innere bzw. Äußere des Einheitskreises der z-Ebene vermitteln.

Im II. Kapitel erhalte ich namentlich mit Hilfe der zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome für die Funktion $\gamma(x)$, welche das *Innere* der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z| < 1$ schlicht abbildet, die folgende *Darstellung*:

$$z = \gamma(x) = \varepsilon \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K(a, a)} \int_a^x (K(a, \xi))^2 \, d\xi .$$

Hier ist

$$K(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_n(a)} P_n(x),$$

eine Reihe, die absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn a und x im Innern von C liegen[4]; ε bezeichnet hier eine beliebige Konstante mit dem absoluten Betrage 1, a ist ein beliebiger Punkt im Innern von C, welchem der Mittelpunkt des Einheitskreises, d. h. $z = 0$ entspricht. Die Integration ist auf eine beliebige Kurve zu erstrecken, die von a nach x führt und ganz im Innern von C verläuft.

Im III. Kapitel behandle ich dann den Zusammenhang der orthogonalen Polynome mit der konformen Abbildung des *Außengebietes.* Zu diesem Zwecke bestimme ich zunächst einen *asymptotischen Ausdruck* von $P_n(x)$, der außerhalb von C gilt (§ 11). Bezeichnet nämlich $z = \psi(x)$ die Funktion, welche eine schlichte Abbildung des Außengebietes der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z| > 1$ vermittelt, während die Punkte $x = \infty$ und $z = \infty$ einander entsprechen (diese Funktion ist abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1 eindeutig bestimmt), so ist

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{P_n(x)}{(\psi(x))^n} = \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \sqrt{\overline{\psi'(x)}},$$

wo ε_0 eine durch $\psi(x)$ völlig bestimmte Konstante mit dem absoluten Betrage 1 bezeichnet und x irgendein Punkt außerhalb von C ist. Daraus ergibt sich unmittelbar eine *Bestimmung der abbildenden Funktion* $\psi(x)$ durch die Polynome $P_n(x)$. Es ist nämlich einfach

$$z = \psi(x) = \varepsilon_0 \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$$

---

[4]) Ich sage im folgenden, daß eine Reihe in einem Gebiete gleichmäßig konvergiert, wenn sie in jedem abgeschlossenen Bereiche, welcher ganz im Innern dieses Gebietes liegt, gleichmäßig konvergiert.

für alle x, welche außerhalb von C liegen. Die abbildende Funktion erscheint somit im wesentlichen als Grenzwert des rationalen Quotienten

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}.$$

Dieser asymptotische Ausdruck gestattet auch den wahren Konvergenzbereich der Entwickelung einer analytischen Funktion $F(x)$ nach den $P_n(x)$ festzustellen (§ 12). Dieser Konvergenzbereich wird durch ein *Kreisbild* begrenzt. Die Kreisbilder C_R der x-Ebene sind eine Schar von doppelpunktlosen, geschlossenen Kurven, welche bei der konformen Abbildung des Außengebietes der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z| > 1$ den konzentrischen Kreisen $|z| = R > 1$ der z-Ebene entsprechen. *Die Entwickelung nach orthogonalen Polynomen*

$$F(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

$$\left(c_n = \frac{1}{l} \int\limits_C F(\xi) \overline{P_n(\xi)}\, d\sigma;\ n = 0, 1, 2, \ldots\right)$$

konvergiert nun *absolut und gleichmäßig im Innern des größten Kreisbildes* C_{R_0} $(R_0 > 1)$, *welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von* $F(x)$ *enthält, und stellt dort* $F(x)$ *dar*; *die Entwickelung divergiert ferner für alle* x *außerhalb von* C_{R_0}. *Es ist*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R_0}.$$

Ist z. B. C der Einheitskreis, so sind die Kreisbilder konzentrische Kreise mit den Radien > 1. In dem Grenzfalle ferner, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, sind die Kreisbilder homofokale Ellipsen mit den Brennpunkten $-1, 1$. Der obige Satz über die Konvergenz der Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen ist in diesen beiden Fällen wohlbekannt.

Mit diesen Mitteln können wir auch eine neue Lösung des Problems der *konvergenten Interpolation* gewinnen (§ 14). Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C; *ich wähle als Interpolationsstellen die Wurzeln der orthogonalen Polynome*[5]). Dann konvergieren die gewöhnlichen Lagrangeschen Interpolationspolynome, die an diesen Stellen mit $F(x)$ übereinstimmen, im Innern von C_{R_0} gleichmäßig und stellen dort $F(x)$ dar; C_{R_0} bezeichnet hier, wie oben, das größte Kreisbild, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(x)$ enthält. In den oben angeführten speziellen Fällen ist dieser Satz wohlbekannt. Ist nämlich C der Einheitskreis, so sind diese Interpolations-

[5]) Die Menge dieser Wurzeln hat keinen Häufungspunkt außerhalb von C (§ 13).

polynome identisch mit den Abschnitten der Taylorschen Entwickelung um den Nullpunkt; ist ferner C das Intervall $(-1, 1)$, so ist diese Interpolation mit der sog. Gaußschen Interpolation identisch, deren Stellen bekanntlich Wurzeln der Legendreschen Polynome sind.

Die Resultate des I. Kapitels gelten nicht nur dann, wenn die Kurve C durchgängig analytisch ist, sondern auch dann, wenn sie *bloß stetig, geschlossen und doppelpunktlos* ist; sie gelten sogar (mit Ausnahme von Satz VI) auch im entarteten Falle des Intervalls. Im II. und III. Kapitel beschränke ich mich hingegen meist auf analytische Kurven.

Die Resultate des I. Kapitels können unmittelbar auf gewisse Polynome $Q_n(x)$ verallgemeinert werden, die folgendermaßen definiert sind:

Es sei $f(\xi)$ eine auf der Kurve C definierte stetige und *positive* Funktion. Ich betrachte eine Folge von Polynomen

$$Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x), \ldots$$

($Q_n(x)$ ist vom n-ten Grade und sein höchster Koeffizient ist reell und positiv) mit der folgenden charakteristischen Eigenschaft:

$$\frac{1}{l}\int_C f(\xi) Q_m(\xi) Q_n(\xi)\, d\sigma = \varepsilon_{mn},$$

d. h. 0 oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$. Die Funktionen

$$\sqrt{f(\xi)}\, Q_n(\xi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bilden somit ein normiertes Orthogonalsystem.

Ist z. B. $f(\xi) = 1$, so ist

$$Q_n(x) = P_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist $f(\xi)$ positiv und stetig, sonst aber beliebig, und ist C der Einheitskreis, so sind die $Q_n(x)$ mit gewissen Polynomen identisch, welche ich in meiner Arbeit „Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen“[6]) untersucht habe.

Ist $f(\xi)$ positiv und stetig, sonst aber beliebig und ist C das Intervall $(-1, 1)$, so sind die $Q_n(x)$ mit gewissen Polynomen identisch, welche in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche eine wichtige Rolle spielen. (Sie sind die Näherungsnenner gewisser Kettenbrüche.)[7])

Die Resultate des II. Kapitels können auch auf die Polynome $Q_n(x)$ verallgemeinert werden.

---

[6]) Erste Mitteilung, [Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), S. 167–202]; zweite Mitteilung ist im Erscheinen begriffen.

[7]) S. etwa O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1913 (B. G. Teubner), S. 379.

In einer späteren Arbeit möchte ich die Theorie der Toeplitzschen Formen (die sich auf den Kreis beziehen)[8]) auf beliebige Kurven übertragen. Ist nämlich $f(\xi)$ eine auf der analytischen Kurve C definierte reelle und stetige Funktion, so kann man die folgende Schar von Hermiteschen Formen der Variablen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ bilden:

$$H_n(f; t) = \frac{1}{l}\int\limits_C f(\xi)\,|t_0 + t_1\xi + \ldots + t_n\xi^n|^2 d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich betrachte die n-te dieser Formen unter der Nebenbedingung

$$H_n(1; t) = \frac{1}{l}\int\limits_C |t_0 + t_1\xi + \ldots + t_n\xi^n|^2 d\sigma = 1$$

und bezeichne die „Eigenwerte", d. h. die Wurzeln der Determinante der Form

$$H_n(f - \mu; t) = \frac{1}{l}\int\limits_C (f(\xi) - \mu)\,|t_0 + t_1\xi + \ldots + t_n\xi^n|^2 d\sigma$$

mit

$$\mu_0^{(n)}, \mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_n^{(n)}.$$

Dann ist

$$m \leqq \mu_\nu^{(n)} \leqq M \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wenn m und M das Minimum bzw. Maximum von $f(\xi)$ auf der Kurve C bezeichnen. Die Eigenwerte $\mu_\nu^{(n)}$ sind ferner „im Durchschnitt"[9]) gleich den Werten von $f(\xi)$ in denjenigen Punkten von C, welche bei der konformen Abbildung des Außengebietes von C auf das Äußere des Einheitskreises, in die äquidistanten Punkte des Einheitskreises übergehen[10]).

[8]) S. etwa a. a. O. [6]). Ebenda möchte ich die Resultate des III. Kapitels auf die Polynome $Q_n(x)$ übertragen.

[9]) Die reellen Zahlen

$$\left\{x_\nu^{(n)}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{y_\nu^{(n)}\right\} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind „im Durchschnitt" gleich, wenn:

a) beide Mengen beschränkt sind

und

b) für jede stetige Funktion $F(\alpha)$ die Gleichung gilt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\left(F(x_\nu^{(n)}) - F(y_\nu^{(n)})\right) = 0\,.$$

[10]) Diese Punktgruppen spielen in den Untersuchungen des Herrn Fejér über Interpolation eine kardinale Rolle. Vgl. a. a. O. [2]), wo sie als regelmäßig verteilte Punkte bezeichnet sind.

Inhalt.

I. Kapitel.

Definition und allgemeine Eigenschaften der orthogonalen Polynome.

§ 1.

Definition der orthogonalen Polynome.

1. Es sei C eine stetige, doppelpunktlose und geschlossene rektifizierbare Kurve in der komplexen x-Ebene. Ist $f(\xi)$ eine auf C definierte Funktion, so verstehe ich unter dem Integral

$$\int_C f(\xi)\, d\sigma,$$

wie gewöhnlich, den Grenzwert

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{m} f(x_\nu)\,|\,\xi_\nu - \xi_{\nu-1}\,|;$$

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ sind hier der Reihe nach gewisse Punkte auf C, für welche

$$\lim_{m=\infty} \operatorname*{Max}_{0 \leqq \nu \leqq m} |\,\xi_\nu - \xi_{\nu-1}\,| = 0 \qquad (\xi_{-1} = \xi_m)$$

ist und x_ν einen beliebigen Punkt von C bezeichnet, der zwischen $\xi_{\nu-1}$ und ξ_ν liegt. Man hat offenbar

$$\int_C d\sigma = l,$$

wo l die Länge von C bezeichnet.

2. Die Veranlassung zu meinen Untersuchungen gab die folgende Minimum-Aufgabe:

Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C; welches ist das Polynom n-ten Grades $S_n(x)$, für welches das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |\,F(\xi) - S_n(\xi)\,|^2\, d\sigma$$

den kleinsten Wert hat?

Ich bezeichne dieses Polynom mit $s_n(x)$; Existenz und Eindeutigkeit desselben folgt nach bekannten Schlußweisen, etwa nach den Regeln der Differentialrechnung [11]). Ich behaupte nun, daß das Polynom n-ten Grades

$$s_n(x) - s_{n-1}(x),$$

von einem konstanten Faktor abgesehen, von $F(x)$ *unabhängig* ist, einzig und allein von der Kurve C und von n abhängt und durch folgende Orthogonalitätseigenschaft zu charakterisieren ist:

$$\frac{1}{l}\int_C \left(s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi)\right)' \xi^\nu\, d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)\text{ [12]}).$$

[11]) Die Aufgabe ist äquivalent mit dem Aufsuchen des Minimums der Hermiteschen Form:

$$\frac{1}{l}\int_C |\,t_0 F(\xi) + t_1 + t_2\,\xi + \ldots + t_{n+1}\,\xi^n\,|^2\, d\sigma$$

unter der Nebenbedingung $t_0 = 1$. Es gibt bekanntlich ein einziges Wertsystem der Variabeln t_ν, für welches dies eintritt.

[12]) Durch diese n Bedingungen ist ein Polynom n-ten Grades (abgesehen von einem konstanten Faktor) eindeutig bestimmt.

In der Tat, aus der Minimumeigenschaft von $s_n(x)$ folgt für alle $\alpha \neq 0$ und für $0 \leqq \nu \leqq n$ die Ungleichung:

$$\frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi) - \alpha\xi^\nu|^2 d\sigma > \frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi)|^2 d\sigma.$$

Also ist

$$2\Re\frac{\bar{\alpha}}{l}\int_C (F(\xi) - s_n(\xi))\bar{\xi}^\nu d\sigma + \frac{|\alpha|^2}{l}\int_C |\xi|^{2\nu} d\sigma > 0\ \text{[13]}.$$

Nun kann aber eine Ungleichung

$$2\Re\bar{\alpha}q + |\alpha|^2 p > 0 \qquad (p > 0)$$

nur dann für alle $\alpha \neq 0$ bestehen, wenn $q = 0$ ist, d. h.

$$\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_n(\xi))\bar{\xi}^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ähnlich folgt für $n \geqq 1$

$$\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_{n-1}(\xi))\bar{\xi}^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1).$$

Also ergibt sich

$$\frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\bar{\xi}^\nu d\sigma = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_{n-1}(\xi))\bar{\xi}^\nu d\sigma -$$

$$-\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_n(\xi))\bar{\xi}^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

w. z. b. w.

Ich wende dieses Resultat auf die Funktion $F(x) = x^n$ $(n \geqq 1)$ an. Dann ist offenbar

$$s_n(x) = x^n,$$

also

$$F(x) - s_{n-1}(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x);$$

es gilt somit der Satz:

Es ist für alle Polynome n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma$$

[13]) $\Re x$ bezeichnet den reellen Teil der komplexen Größe x.

dann und nur dann ein Minimum, wenn $A_n(x)$ die Orthogonalitätseigenschaft

$$\frac{1}{l}\int_C A_n(\xi)\bar{\xi}^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

besitzt.

3. Ausgehend von diesen Ergebnissen definiere ich jetzt ein Orthogonalsystem von Polynomen

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

mit den folgenden Eigenschaften:

a) $P_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades.

b) Der höchste Koeffizient von $P_n(x)$ ist positiv.

c) $\frac{1}{l}\int_C P_m(\xi)\,\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma = \varepsilon_{mn}$ $\qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ich bezeichne die $P_n(x)$ als *die zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome.* Die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Systems ist nach dem bekannten Satz von E. Schmidt über die Orthogonalisierung eines gegebenen Funktionensystems a priori klar. Die Polynome $P_n(x)$ können auch einfach dargestellt werden, und zwar auf folgende Weise.

Es sei

$$h_{pq} = \frac{1}{l}\int_C \xi^p \bar{\xi}^q d\sigma,$$

dann ist

$$h_{pq} = \overline{h_{qp}} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Hermiteschen Formen

$$H_n(1;t) = \sum_{p,q=0}^{n} h_{pq} t_p \bar{t}_q = \frac{1}{l}\int_C |t_0 + t_1\xi + \ldots + t_n\xi^n|^2 d\sigma$$

sind für alle n positiv definit. Ich bezeichne die Determinante dieser Form mit D_n, dann ist also

$$D_n > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man hat z. B.

$$D_0 = h_{00} = 1,\ D_1 = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & \ldots & h_{0n} \\ h_{10} & h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n0} & h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots$$

Ich behaupte nun, daß für $n \geqq 1$

$$P_n(x) = \alpha_n \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \ldots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \ldots & h_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{0,n-1} & h_{1,n-1} & \ldots & h_{n,n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} = \alpha_n D_{n-1} x^n + \ldots$$

ist, wo α_n eine später zu bestimmende Konstante bezeichnet. In der Tat ist

$$\frac{1}{l}\int_C P_n(\xi)\,\bar{\xi}^\nu\,d\sigma = \alpha_n \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \dots & h_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{0,n-1} & h_{1,n-1} & \dots & h_{n,n-1} \\ h_{0\nu} & h_{1\nu} & \dots & h_{n\nu} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n-1; \\ \alpha_n D_n & \text{für } \qquad \nu = n. \end{cases}$$

Die Normierung von $P_n(x)$ (d. h. die Bestimmung von α_n) erfolgt durch die Bedingung b) und durch die Bedingung

$$\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2\,d\sigma = 1.$$

Es ist somit $\alpha_n > 0$ und man hat

$$\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2\,d\sigma = \alpha_n D_{n-1}\frac{1}{l}\int_C P_n(\xi)\,\bar{\xi}^n\,d\sigma = \alpha_n^2 D_{n-1} D_n;$$

es muß also

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\ ^{14)}$$

sein, d. h.

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \dots & h_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{0,n-1} & h_{1,n-1} & \dots & h_{n,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots;\ P_0(x) = 1).$$

4. Aus dieser Formel ergibt sich leicht eine andere Darstellung von $P_n(x)$. Es gilt nämlich der

Hilfssatz. *Sind A_{pq} beliebige reelle oder komplexe Größen, dann gilt die Identität:*

$$\begin{vmatrix} A_{00} & A_{10} & \dots & A_{n0} \\ A_{01} & A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{0,n-1} & A_{1,n-1} & \dots & A_{n,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} = \left| A_{pq}x - A_{p+1,q} \right|_0^{n-1}\ ^{15)}.$$

[14]) Die Wurzeln aus positiven Größen sind hier und im folgenden stets positiv zu nehmen.

[15]) Ich bezeichne mit

$$|a_{pq}|_0^{n-1}$$

eine Determinante n-ter Ordnung mit den Elementen a_{pq} $(p, q = 0, 1, \dots, n-1)$.

Ich beweise diese Gleichung etwa mit dem folgenden Verfahren. Ich addiere die $-x$-fache n-te (d. h. vorletzte) Spalte der Determinante auf der linken Seite zur $n+1$-ten (d. h. letzten) Spalte derselben, weiter die $-x$-fache $n-1$-te Spalte zur n-ten, usw. Es ergibt sich auf diese Weise schließlich eine Determinante, deren letzte Reihe mit Ausnahme ihres ersten Elementes aus lauter Nullen besteht. Daraus folgt leicht die Behauptung.

Ich setze hier $A_{pq} = h_{pq}$; es ist also

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \left| h_{pq} x - h_{p+1,q} \right|_0^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; P_0(x) = 1).$$

Das Polynom $P_n(x)$ ist somit für $n \geqq 1$ abgesehen von einem konstanten Faktor gleich der Determinante der Hermiteschen Form

$$H_{n-1}(x - \cdot\,; t) = \frac{1}{l} \int_C (x - \xi) \left| t_0 + t_1 \xi + \ldots + t_{n-1} \xi^{n-1} \right|^2 d\sigma$$
$$= \sum_{p,q=0}^{n-1} (h_{pq} x - h_{p+1,q}) t_p \bar{t}_q .$$

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist

$$h_{pq} = \begin{cases} \dfrac{1}{p+q+1} & \text{für gerade } p+q \\ 0 & \text{für ungerade } p+q \end{cases} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, X_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $X_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet. Die Determinantenform, in welcher jetzt ganz allgemein die orthogonalen Polynome erscheinen, ist in diesem Falle wohlbekannt.

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$h_{pq} = \varepsilon_{pq} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$P_n(x) = x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

§ 2.

Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen.

5. Mit Heranziehung des Begriffs der orthogonalen Polynome können wir jetzt die Ergebnisse von **2.** in der folgenden Form aussprechen:

Satz I. *Es sei $F(x)$ im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär-analytisch; es gibt dann eine ganz bestimmte nach den orthogonalen Polynomen fortschreitende Entwickelung*

$$c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

deren aufeinanderfolgende Abschnitte

$$s_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_n P_n(x)$$

für alle n folgende Minimum-Eigenschaft besitzen: Das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - S_n(\xi)|^2 d\sigma$$

ist für alle Polynome n-ten Grades $S_n(x)$ *dann und nur dann minimal, wenn* $S_n(x) = s_n(x)$ *ist. Dieses Minimum ist gleich*

$$\sigma_n = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma - |c_0|^2 - |c_1|^2 - \dots - |c_n|^2.$$

Die Koeffizienten der obigen Entwickelung ergeben sich auf die ***Fouriersche*** *Weise durch die Formeln*

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Der erste Teil dieses Satzes wurde bereits in **2.** bewiesen. Es war nämlich für $n \geqq 1$

$$\frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\,\bar{\xi}^{\nu}\, d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1),$$

d. h.

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) = c_n P_n(x),$$

wo c_n eine von $F(x)$ abhängige Konstante bezeichnet. Die Auswertung von c_n erfolgt auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_C s_n(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma \\ &= \frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - F(\xi))\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma, \end{aligned}$$

also nach **2.**

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma.$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_0(\xi))\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - c_0)\, d\sigma = 0,$$

d. h.

$$c_0 = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\, d\sigma, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Es ist somit

$$\sigma_n = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma + \frac{1}{l}\int_C |s_n(\xi)|^2 d\sigma$$

$$-2\Re\,\frac{1}{l}\int_C F(\xi) s_n(\xi)\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma - |c_0|^2 - |c_1|^2 - \ldots - |c_n|^2.$$

Damit ist Satz I in allen Teilen bewiesen.

Es gilt ferner der

Satz II. *Es ist für alle Polynome n-ten Grades von der Form*

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma$$

dann und nur dann minimal, wenn

$$A_n(x) = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}\, P_n(x) = \mu_n P_n(x)$$

ist. Das Minimum ist gleich $\frac{D_n}{D_{n-1}} = \mu_n^2$.

Es ist nämlich nach **3.**

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, x^n + \ldots.$$

6. Die Polynome $s_n(x)$, d. h. die Abschnitte der obigen Entwickelung, liefern somit im Sinne der kleinsten Quadrate unter allen Polynomen desselben Grades die beste Approximation für $F(x)$[16]. Ähnlich ist $P_n(x)$ durch die im Satz II ausgesprochene Minimumeigenschaft ausgezeichnet. In dem speziellen bzw. Grenzfalle, wo C der Einheitskreis bzw. das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, sind diese Sätze wohlbekannt. Insbesondere Satz I drückt dann eine Grundeigenschaft der Potenzreihe bzw. der nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Entwickelung aus.

Die obige Entwickelung hat vorläufig nur eine rein formelle Bedeutung. Ich bringe dies mit der Bezeichnung

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

zum Ausdruck; dies ist lediglich ein abkürzendes Symbol für das Bestehen der Formeln

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

[16]) Vgl. die Fußnote [21]).

7. Satz I gestattet einige, im wesentlichen bekannte Schlüsse zu ziehen. Aus der Formel von σ_n folgt zunächst die „Besselsche Ungleichung"

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 \leqq \frac{1}{l}\int\limits_C |F(\xi)|^2 d\sigma$$

und also die Konvergenz der Reihe

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots.$$

Man kann die Frage stellen, ob das Orthogonalsystem der Polynome $P_n(x)$ vollständig ist, in dem Sinne, daß es keine, im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär-analytische und nicht identisch verschwindende Funktion $F_0(x)$ gibt, für welche

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{l}\int\limits_C F_0(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wäre. Dies wird sofort klar, wenn ich für jedes $F(x)$ die Gleichung

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots = \frac{1}{l}\int\limits_C |F(\xi)|^2 d\sigma,$$

oder was damit gleichwertig ist,

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = 0$$

beweise. Man hat nun nach einem bekannten Satz aus der Theorie der analytischen Funktionen für geeignete Polynome $P(x)$

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

und zwar gleichmäßig im abgeschlossenen Innenbereich von C, wo ε eine gegebene positive Größe bezeichnet[17]). Dann ist aber

$$\frac{1}{l}\int\limits_C |F(\xi) - P(\xi)|^2 d\sigma < \varepsilon^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz III. *Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C und*

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots.$$

Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l}\int\limits_C |F(\xi) - s_n(\xi)|^2 d\sigma = 0,$$

[17]) D. Hilbert, Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen Rationalen fortschreitende Reihe [Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1897, S. 63—70].

wenn $s_n(x)$ *die* n*-te Partialsumme dieser Entwickelung bezeichnet; es gilt ferner die „Parsevalsche Formel“*

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma.$$

Das Orthogonalsystem der Polynome $P_n(x)$ *besitzt somit die Vollständigkeitseigenschaft.*

8. Ich beweise nun den folgenden

Hilfssatz. *Sind die analytischen Funktionen* $F_n(x)$ *im abgeschlossenen Innen- (Außen-) bereich von* C *regulär und*

$$\lim_{n=\infty} \int_C |F_n(\xi)|\, d\sigma = 0,$$

dann ist im Innern (außerhalb) von C *gleichmäßig*[18])

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = 0.$$

Dieser Satz ist eine einfache Folge des Cauchyschen Integralsatzes. Ist nämlich x innerhalb (außerhalb) von C, so ist

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_n(\xi)}{\xi - x}\, d\xi,$$

also

$$|F_n(x)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{F_n(\xi)}{\xi - x}\right| d\sigma \leqq \frac{1}{2\pi\delta}\int_C |F_n(\xi)|\, d\sigma,$$

wenn δ die minimale Entfernung von x von den Punkten der Kurve C bezeichnet. Daraus folgt die Behauptung.

Dieser Hilfssatz wird im folgenden mehrmals benützt. Es sei hier

$$F_n(x) = \frac{(F(x) - s_n(x))^2}{l},$$

dann ergibt sich der

Satz IV. *Es sei* $F(x)$ *regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von* C *und*

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots.$$

Dann konvergiert diese Entwickelung gleichmäßig im Innern von C *und stellt dort* $F(x)$ *dar.*

Eine wesentliche Ergänzung dieses Satzes werde ich in § 12 beweisen.

---

[18]) Vgl. die Fußnote [4]).

§ 3.

Über eine Extremum-Aufgabe.

9. Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C und

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

Der n-te Abschnitt dieser Entwickelung ist in der folgenden Form zu schreiben:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) \\ &= \frac{1}{l}\int\limits_C F(\xi)\left(\overline{P_0(\xi)}\, P_0(x) + \overline{P_1(\xi)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(\xi)}\, P_n(x)\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Der „Kern" dieses Integralausdruckes ist

$$K_n(\xi, x) = \overline{P_0(\xi)}\, P_0(x) + \overline{P_1(\xi)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(\xi)}\, P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades von $\bar{\xi}$ und x; man hat ferner

$$K_n(\xi, x) = \overline{K_n(x, \xi)}.$$

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$K_n(\xi, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{\xi}^\nu x^\nu = \frac{1 - (\bar{\xi} x)^{n+1}}{1 - \bar{\xi} x}.$$

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist bekanntlich

$$K_n(\xi, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} X_\nu(\bar{\xi})\, X_\nu(x) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{X_n(\bar{\xi})\, X_{n+1}(x) - X_{n+1}(\bar{\xi})\, X_n(x)}{x - \bar{\xi}},$$

wo $X_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet.

10. Ähnlich wie $P_n(x)$ [19]) ist auch die Funktion $K_n(\xi, x)$ dadurch ausgezeichnet, daß sie die Lösung einer Extremum-Aufgabe liefert. Es gilt nämlich der

Satz V. *Es sei a beliebig und $G_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades von der Eigenschaft*

$$\frac{1}{l}\int\limits_C |G_n(\xi)|^2 d\sigma = 1.$$

Dann ist das Maximum von $|G_n(a)|^2$

$$\operatorname{Max} |G_n(a)|^2 = K_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(a)|^2.$$

Dies wird für die Polynome

$$G_n(x) = \varepsilon \frac{K_n(a, x)}{\sqrt{K_n(a, a)}}$$

[19]) Vgl. Satz II.

(und nur für diese) erreicht, wo ε eine beliebige Konstante mit dem absoluten Betrage 1 bezeichnet.

In der Tat sei

$$G_n(x) = t_0 P_0(x) + t_1 P_1(x) + \ldots + t_n P_n(x),$$

dann ist

$$\frac{1}{l}\int_C |G_n(\xi)|^2 d\sigma = |t_0|^2 + |t_1|^2 + \ldots + |t_n|^2;$$

die Aufgabe ist somit das Maximum von

$$|t_0 P_0(a) + t_1 P_1(a) + \ldots + t_n P_n(a)|^2$$

zu bestimmen, während

$$|t_0|^2 + |t_1|^2 + \ldots + |t_n|^2 = 1$$

ist. Dies ist aber nach der Schwarzschen Ungleichheit gleich

$$|P_0(a)|^2 + |P_1(a)|^2 + \ldots + |P_n(a)|^2 = K_n(a, a)$$

und es wird für

$$t_\nu = \varepsilon \frac{\overline{P_\nu(a)}}{\sqrt{K_n(a, a)}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n; \ |\varepsilon| = 1)$$

erreicht, w. z. b. w.

Daraus folgt der

Satz V′. *Es ist für alle Polynome n-ten Grades $\Gamma_n(x)$ mit der Eigenschaft $\Gamma_n(a) = 1$ das Integral*

$$\frac{1}{l}\int_C |\Gamma_n(\xi)|^2 d\sigma$$

dann und nur dann minimal, wenn

$$\Gamma_n(x) = \frac{K_n(a, x)}{K_n(a, a)}$$

ist. Das Minimum ist gleich $\frac{1}{K_n(a, a)}$.

11. Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C und a sei im Innern von C. Dann ist nach **8.**

$$|F(a)| \leqq \frac{1}{2\pi\delta}\int_C |F(\xi)|\, d\sigma,$$

wenn δ die minimale Entfernung zwischen a und den Punkten von C bezeichnet. Ich setze hier $F(x) = (G_n(x))^2$, wo $G_n(x)$ irgendein Polynom n-ten Grades mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{l}\int_C |G_n(\xi)|^2 d\sigma = 1$$

bezeichnet. Dann ist

$$|G_n(a)|^2 \leqq \frac{l}{2\pi\delta}$$

und also nach Satz V

$$\operatorname{Max} |G_n(a)|^2 = K_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(a)|^2 \leqq \frac{l}{2\pi\delta}$$

und zwar für alle n. Daraus folgt der

Satz VI. *Die Reihensumme*

$$K(a, a) = |P_0(a)|^2 + |P_1(a)|^2 + \dots + |P_n(a)|^2 + \dots$$

ist stets endlich, wenn a im Innern von C liegt. Sie stellt die genaue obere Grenze von $|G(a)|^2$ dar, während $G(x)$ die Gesamtheit der im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär-analytischen Funktionen mit der Bedingung

$$\frac{1}{l}\int\limits_C |G(\xi)|^2 d\sigma = 1$$

durchläuft.

Die Reihe

$$K(a, x) = \overline{P_0(a)}\, P_0(x) + \overline{P_1(a)}\, P_1(x) + \dots + \overline{P_n(a)}\, P_n(x) + \dots$$

ist absolut und gleichmäßig konvergent, wenn a und x im Innern von C liegen, und stellt dort eine reguläre analytische Funktion von $\bar{a}$ und x dar. Es ist

$$K(a, x) = \overline{K(x, a)}.$$

Der zweite Teil dieses Satzes ist eine unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichheit. Die Berechnung der Reihensumme $K(a, x)$ folgt erst in § 6. Vgl. über die Summe $K(a, x)$ auch § 12, **44.**

Ist C der Einheitskreis, so sind die Reihen

$$K(a, a) = 1 + |a|^2 + \dots + |a|^{2n} + \dots$$

bzw.

$$K(a, x) = 1 + \bar{a}x + \dots + \bar{a}^n x^n + \dots$$

für $|a| < 1$, $|x| < 1$ konvergent.

§ 4.

Über die Wurzeln der Polynome $P_n(x)$ und über die Tschebyscheffschen Polynome.

12. Es sei $n \geqq 1$ und x_0 eine Wurzel von $P_n(x)$. Dann ist

$$\frac{P_n(x)}{x - x_0}$$

ein Polynom $n-1$-ten Grades, also nach der Grundeigenschaft der orthogonalen Polynome

$$\frac{1}{l}\int_C P_n(\xi)\frac{\overline{P_n(\xi)}}{\xi - x_0}\,d\sigma = \frac{1}{l}\int_C \left|\frac{P_n(\xi)}{\xi - x_0}\right|^2 (\xi - x_0)\,d\sigma = 0\,,$$

d. h.:

$$x_0 = \frac{\int_C \left|\frac{P_n(\xi)}{\xi - x_0}\right|^2 \xi\,d\sigma}{\int_C \left|\frac{P_n(\xi)}{\xi - x_0}\right|^2 d\sigma}\,.$$

Daraus folgt der

Satz VII. *Die Wurzeln der zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome $P_n(x)$ liegen alle innerhalb des kleinsten konvexen, abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{K}$, welcher die Kurve C enthält.*

Nähere Feststellungen über die Lage dieser Wurzeln erfolgen in § 13.

Ist C der Einheitskreis, so liegen die Wurzeln von $P_n(x) = x^n$ alle im Nullpunkt.

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist $P_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) das n-te Legendresche Polynom; die Wurzeln desselben liegen alle in der Tat im Intervalle $(-1, 1)$.

13. Herr Fejér hat mir eine Beweismethode mitgeteilt, welche nicht nur den Satz VII erledigt, sondern auch ermöglicht, analoge Sätze über die Wurzeln anderer wichtiger Polynome abzuleiten.

Der Beweis stützt sich auf die folgende merkwürdige Auffassung des kleinsten konvexen, abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{K}$, welcher eine Kurve C enthält:

$\mathfrak{K}$ besteht aus denjenigen Punkten der Ebene (und nur aus jenen), von welchen aus es unmöglich ist, sich gleichzeitig allen Punkten von C zu nähern.

Liegt nämlich x im Innern von $\mathfrak{K}$ und ist x' irgendeine neue Lage von x, so lege man durch x eine Gerade, welche senkrecht zu dem Vektor $x' - x$ liegt. Dann ist geometrisch klar, daß x' von allen Punkten von C, welche nicht in derselben Halbebene liegen wie x', weiter entfernt ist als x. Auch im Falle, wo x am Rande von $\mathfrak{K}$ liegt, läßt sich leicht zeigen, daß keine Verschiebung von x in x' möglich ist, durch welche man sich allen Punkten der Kurve C simultan nähern würde.

Ist aber x außerhalb von $\mathfrak{K}$, so gibt es immer eine Verschiebung von geeigneter Richtung und Größe, durch welche man gleichzeitig allen Punkten von C näher kommt. Man lege etwa durch x irgendeine Gerade, welche keinen Punkt mit $\mathfrak{K}$ gemein hat. Dann ist klar, daß man durch eine Verschiebung, welche senkrecht zu dieser Geraden gerichtet und genügend klein ist, gleichzeitig allen Punkten von C näher kommt.

Es gilt nun der allgemeine Satz:

Ist k positiv und $A_n^{(k)}(x)$ das Polynom, welches unter allen Polynomen n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

für das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^k d\sigma$$

den kleinsten Wert liefert, so liegen die Wurzeln von $A_n^{(k)}(x)$ in dem kleinsten konvexen Bereiche $\mathfrak{K}$, welcher die Kurve C enthält.

Würde nämlich eine Wurzel von $A_n^{(k)}(x)$, etwa x_1, außerhalb von $\mathfrak{K}$ liegen, so setze ich das Polynom

$$\frac{A_n^{(k)}(x)}{x-x_1}(x-x_1')$$

an, wo x_1' eine solche Stelle bezeichnet, für welche

$$\left|\frac{\xi - x_1'}{\xi - x_1}\right| < 1$$

ist, während ξ die Punkte von C durchläuft. Daraus folgt aus Stetigkeitsgründen, daß sogar

$$\left|\frac{\xi - x_1'}{\xi - x_1}\right| \leqq \vartheta < 1$$

ist, d. h.

$$\frac{1}{l}\int_C \left| A_n^{(k)}(\xi)\,\frac{\xi - x_1'}{\xi - x_1}\right|^k d\sigma \leqq \vartheta^k\,\frac{1}{l}\int_C |A_n^{(k)}(\xi)|^k d\sigma < \frac{1}{l}\int_C |A_n^{(k)}(\xi)|^k d\sigma,$$

was der Definition von $A_n^{(k)}(x)$ offenbar widerspricht.

Es ist nach Satz II

$$A_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}\,P_n(x);$$

daraus folgt somit ein neuer Beweis für Satz VII.

Ist C der Einheitskreis, so ist für alle k

$$A_n^{(k)}(x) = x^n\,[20].$$

---

[20]) Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|^k d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 + \bar a_1 x + \dots + \bar a_n x^n|^k d\theta \qquad (x = e^{i\theta})$$

und wenn

$$B(x) = 1 + \bar a_1 x + \dots + \bar a_n x^n$$

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächstsn Seite.)

14. Man kann die folgende Frage stellen:

Es sei $A_n(x)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

und das Maximum von $|A_n(x)|$ auf C

$$\underset{(C)}{\mathrm{Max}} |A_n(x)| = M.$$

Welches ist dann das Polynom n-ten Grades von der obigen Form, für welches M minimal ist?

Ich bezeichne dieses Polynom als das zu der Kurve C gehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom $T_n(x)$. Es sei das Maximum von $T_n(x)$ auf C gleich m_n, dann ist also für *jedes* Polynom $A_n(x)$ irgendwo auf C

$$|A_n(x)| \geqq m_n. \text{[21]}$$

---

für $|x| < 1$ von 0 verschieden ist, dann ist offenbar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|^k \, d\theta \geq |B(0)|^k = 1.$$

[21]) Existenz und Unität dieser Polynome folgt aus gewissen Sätzen von Tonelli. Vgl. I polinomi d' approssimazione di Tschebychev [Annali di matematica, **XV** (1908), S. 47—119] S. 108. — Vgl. auch P. Montel, Leçons sur les séries de polynomes a une variable complexe, Paris 1910 (Gauthiers-Villars), S. 66—71, sowie G. Faber, Journal für Mathematik, **150** (1919), S. 79—106.

Ich bemerke hier, daß diese Polynome in gewissem Sinne Gegenstücke der orthogonalen Polynome sind. Man kann nämlich ganz allgemein unter der Abweichung (écart) der analytischen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf der Kurve C folgendes verstehen:

(a) $$\sqrt{\frac{1}{l}\int_C |f(\xi) - g(\xi)|^2 \, d\sigma},$$

dies ist die Abweichung im Sinne der kleinsten Quadrate, oder im Besselschen Sinne.

(b) $$\underset{(C)}{\mathrm{Max}} |f(x) - g(x)|,$$

dies ist die Abweichung im Tschebyscheffschen Sinne (die zweite ist offenbar größer als die erste). Satz II sagt nun aus, daß unter den Polynomen n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

dasjenige, welches von 0 im Besselschen Sinne möglichst wenig abweicht, folgendes ist:

$$A_n(x) = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}} P_n(x)$$

und man hat

$$\mu_n = \mathrm{Min} \sqrt{\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 \, d\sigma} = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}.$$

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächsten Seite.)

Ist z. B. $n = 1$ und $T_1(x) = x - \alpha$, dann ist offenbar α der Mittelpunkt, m_1 der Radius des kleinsten Kreises, welcher die Kurve C völlig überdeckt.

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$T_n(x) = x^n; \quad m_n = 1.$$

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist bekanntlich

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2^n}; \quad m_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$ [22])

Es gilt nun der Fejérsche Satz:

Die Wurzeln der zur Kurve C gehörigen Tschebyscheffschen Polynome $T_n(x)$ liegen alle im kleinsten konvexen Bereiche $\mathfrak{K}$, welcher die Kurve C enthält.

Die hier gegebene Definition sagt anderseits, daß

$$A_n(x) = T_n(x)$$

das Polynom ist, welches von 0 im Tschebyscheffschen Sinne möglichst wenig abweicht. Man hat

$$\operatorname{Min} \operatorname*{Max}_{(C)} |A_n(x)| = m_n.$$

Es ist also

$$\mu_n = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}} \leq m_n.$$

Die Benennung „Tschebyscheffsche Polynom" hat übrigens bei Tonelli eine erweiterte Bedeutung. So bezeichnet er nämlich das Polynom n-ten Grades $K_n(x)$, welches von einer gegebenen analytischen Funktion $F(x)$ auf der Kurve C im Tschebyscheffschen Sinne möglichst wenig abweicht. Ist $F(x) = x^n$, so ist offenbar

$$F(x) - K_{n-1}(x) = T_n(x),$$

wenn $T_n(x)$ das oben definierte, zu der Kurve C gehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom bezeichnet.

[22]) Herr Faber hat a. a. O. [21]) S. 84–86 bewiesen, daß die Tschebyscheffschen Polynome dieselben sind, wenn C eine Ellipse mit den Brennpunkten $-1, 1$ ist. Es seien a und b ($a > b$) die Halbachsen dieser Ellipse und R durch die Bedingungen

$$a = \frac{R + \frac{1}{R}}{2}, \qquad b = \frac{R - \frac{1}{R}}{2} \qquad (R > 1)$$

bestimmt, so ist dann

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} \quad \text{und} \quad m_n = \frac{R^n + \frac{1}{R^n}}{2^n} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{a-b}{2}\right)^n.$$

Ist $b = 0$, d. h. $R = 1$, so reduziert sich der letzte Ausdruck auf den im Texte angegebenen.

Würde nämlich eine Wurzel, etwa x_1, des Tschebyscheffschen Polynoms $T_n(x)$ außerhalb von $\mathfrak{K}$ liegen, so bilde ich das Polynom

$$T_n^*(x) = \frac{T_n(x)}{x - x_1}(x - x_1'),$$

wo x_1' die gleiche Bedeutung hat wie oben. Dann ist aber

$$\underset{(C)}{\operatorname{Max}} |T_n^*(x)| = \underset{(C)}{\operatorname{Max}} |T_n(x)| \left|\frac{x - x_1'}{x - x_1}\right| \leqq \vartheta m_n < m_n,$$

was der Definition von $T_n(x)$ widerspricht. Daraus folgt der Satz.

Auf diese Polynome will ich noch später zurückkommen (man vgl. § 9).

§ 5.

Über die Wurzeln der Polynome $K_n(a, x)$.

15. Der Zweck dieses Paragraphen ist die Lage der Wurzeln von

$$K_n(a, x) = \overline{P_0(a)}\,P_0(x) + \overline{P_1(a)}\,P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}\,P_n(x)$$

festzustellen. Es gilt zunächt für jedes Polynom n-ten Grades $R_n(x)$ die (für $K_n(a, x)$ charakteristische) Gleichung

$$\frac{1}{l}\int_C \overline{K_n(a, \xi)}\,R_n(\xi)\,d\sigma = R_n(a).$$

In der Tat sei

$$R_n(x) = t_0 P_0(x) + t_1 P_1(x) + \ldots + t_n P_n(x),$$

dann ist nach der Grundeigenschaft der orthogonalen Polynome

$$\frac{1}{l}\int_C \overline{K_n(a, \xi)}\,R_n(\xi)\,d\sigma = P_0(a)\,t_0 + P_1(a)\,t_1 + \ldots + P_n(a)\,t_n = R_n(a),$$

w. z. b. w.

Es sei nun a fest und x_0 eine Wurzel von $K_n(a, x)$; dann ist zunächst $x_0 \neq a$, weil ja

$$K_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(a)|^2 \geqq |P_0(a)|^2 = 1$$

ist. Ich setze in der obigen Formel

$$R_n(x) = \frac{K_n(a, x)}{x - x_0}(x - a),$$

dann ist also

$$\frac{1}{l}\int_C |K_n(a, \xi)|^2 \frac{\xi - a}{\xi - x_0}\,d\sigma = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist es ersichtlich, daß die Vektoren, welche vom Nullpunkt ausgehend die Zahlen

$$\frac{\xi - a}{\xi - x_0}$$

darstellen, nicht durchwegs in einen Winkelraum von der Öffnung $< \pi$ hineinfallen können, während ξ die Kurve C durchläuft.

Was hat dies für eine geometrische Bedeutung? Das Argument dieser komplexen Zahlen ist offenbar der Winkel zwischen den Strahlen ξa und ξx_0; es müssen also zwei Punkte ξ', ξ'' auf C geben, für welche

$$\sphericalangle\, a \xi' x_0 - \sphericalangle\, a \xi'' x_0 = \pi$$

ist. Die Punkte a, x_0, ξ', ξ'' bestimmen dann ein Kreisviereck, dessen gegenüberliegende Ecken ξ' und ξ'' sind.

Die Wurzeln von $K_n(a, x)$ haben also stets die folgende Eigenschaft: *Es ist $x_0 \neq a$ und man kann immer durch a und x_0 einen Kreis schlagen, welcher mit C wenigstens zwei solche Punkte gemein hat, die auf entgegengesetzten Seiten der geraden Linie $a x_0$ liegen.* Dadurch ist für die Wurzeln x_0 von $K_n(a, x)$ ein Bereich der x-Ebene festgelegt.

16. Herr Fejér hat eine merkwürdige Verallgemeinerung des kleinsten konvexen, die Kurve C enthaltenden Bereiches gegeben, die eine geometrische Charakterisierung des soeben definierten Wurzelbereiches gestattet.

Es sei a ein beliebiger Punkt in der komplexen x-Ebene, liege aber nicht auf der Kurve C. Die Transformation durch reziproke Radien

$$x' = \frac{1}{x-a}, \quad x = a + \frac{1}{x'}$$

bildet die Kurve C der x-Ebene auf eine Kurve C' der x'-Ebene ab. Ich bilde nun den kleinsten (im gewöhnlichen Sinne) konvexen Bereich $\mathfrak{K}'$, welcher die Bildkurve C' enthält. Dann entspricht durch die obige Abbildung dem Bereiche $\mathfrak{K}'$ der x'-Ebene wieder ein ganz bestimmter Bereich $\mathfrak{K}_a$ in der komplexen x-Ebene und dies ist der von Herrn Fejér definierte Bereich, welcher durch C und a vollständig bestimmt ist.

Man kann den eben definierten Bereich $\mathfrak{K}_a$ etwa mit Hilfe der folgenden Vorschrift konstruieren. Es seien ξ' und ξ'' beliebige Punkte von C, die voneinander und von a verschieden sind. Man schlage durch die Punkte a, ξ', ξ'' einen Kreis *und nehme die Punkte desjenigen Kreisbogens $\widehat{\xi', \xi''}$, welcher a nicht enthält. Die Gesamtheit dieser, von den Kreisbögen $\widehat{\xi', \xi''}$ beschriebenen Punkte der Ebene, während ξ' und ξ'' unabhängig voneinander die Kurve C durchlaufen, ist der Bereich $\mathfrak{K}_a$*[23]).

[23]) Dies folgt aus dem Umstande, daß bei der obigen Transformation Kreise (Geraden) in Kreise übergehen. Liegt a auf der Kurve C, so wende ich eine ähnliche Konstruktion an und rechne den Punkt a auch zu $\mathfrak{K}_a$.

Ist a außerhalb von C, so enthält $\mathfrak{K}_a$ stets den abgeschlossenen Innenbereich von C; ist aber a im Innern von C, so kann dies niemals der Fall sein, da dann z. B. eine genügend kleine Umgebung von a nicht zu $\mathfrak{K}_a$ gehört.

Ist a außerhalb von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}_a$ stets ein endlicher Bereich. Ist a im Innern von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}_a$ ein unendlicher Bereich.

Ist a im Unendlichen, so ist der Fejérsche Bereich $\mathfrak{K}_a$ identisch mit $\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$, wie oben, den kleinsten konvexen Bereich bezeichnet, welcher die Kurve C enthält.

Das Folgende ist nun geometrisch klar: $\mathfrak{K}_a$ *besteht aus solchen Punkten* x *(und nur aus solchen), welche so beschaffen sind, daß man durch* a *und* x *immer einen Kreis schlagen kann, welcher mit der Kurve* C *wenigstens zwei solche Punkte gemein hat, die auf entgegengesetzten Seiten der geraden Linie* ax *liegen.*

Es gilt somit der

Satz VIII. *Die Wurzeln des Polynoms*

$$K_n(a,x) = \overline{P_0(a)}\,P_0(x) + \overline{P_1(a)}\,P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}\,P_n(x)$$

liegen alle im oben definierten Bereiche $\mathfrak{K}_a$[24]).

17. Herr Fejér hat diesen Satz mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien erhalten. Mit derselben Methode erhält man auch die folgenden Sätze:

Es sei k *eine beliebige positive Zahl; ich betrachte die Gesamtheit der Polynome* n*-ten Grades* $U_n(x)$, *für welche* $U_n(a) = 1$ *ist. Mit* $u_n^{(k)}(x)$ *bezeichne ich dasjenige unter diesen Polynomen, für welches*

$$\frac{1}{l}\int\limits_{C} |U_n(\xi)|^k\, d\sigma$$

minimal ist. Dann liegen sämtliche Wurzeln von $u_n^{(k)}(x)$ *in dem Bereiche* $\mathfrak{K}_a$.

Es ist offenbar

$$u_n^{(2)}(x) = \frac{K_n(a,x)}{K_n(a,a)}.$$

Ferner:

Bezeichne ich mit $u_n(x)$ *dasjenige unter den Polynomen* n*-ten Grades* $U_n(x)$ *mit der Nebenbedingung* $U_n(a) = 1$, *für welches*

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |U_n(x)|$$

minimal ist. Dann liegen sämtliche Wurzeln von $u_n(x)$ *in dem Bereiche* $\mathfrak{K}_a$.

18. Es sei C der Einheitskreis. Liegt a im Innern von C, so ist $\mathfrak{K}_a$ offenbar der abgeschlossene Außenbereich von C; ist a außerhalb von C, so ist $\mathfrak{K}_a$ der abgeschlossene Innenbereich von C. Liegt endlich a auf C, so besteht $\mathfrak{K}_a$ aus sämtlichen Punkten von C.

---

[24]) Daraus folgt leicht ein neuer Beweis von Satz VII. Vgl. 18.

Man hat in diesem Falle

$$K_n(a, x) = \frac{1-(\bar{a}x)^{n+1}}{1-\bar{a}x},$$

so daß, in diesem speziellen Falle, Satz VIII leicht zu bestätigen ist.

Es sei C das Intervall $(-1, 1)$. Ist a nicht reell, so ist geometrisch klar, daß der Bereich $\mathfrak{K}_a$ folgendermaßen zu gewinnen ist. Man schlage durch die Punkte $a, -1, 1$ einen Kreis, dessen Fläche von der Strecke $(-1, 1)$ in zwei Segmente zerlegt wird. $\mathfrak{K}_a$ ist dann dasjenige dieser Segmente, welches den Punkt a nicht enthält. Sämtliche Wurzeln des Polynoms

$$K_n(a, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} X_\nu(\bar{a}) X_\nu(x) = \frac{n+1}{2} \frac{X_n(\bar{a}) X_{n+1}(x) - X_{n+1}(\bar{a}) X_n(x)}{x-\bar{a}}$$

liegen also nach Satz VIII in diesem Segmente; $X_n(x)$ bezeichnet hier das n-te Legendresche Polynom.

Ist a reell und $|a| \geqq 1$, so ist $\mathfrak{K}_a$ das Intervall $(-1, 1)$. Ist a reell und $|a| < 1$, so ist $\mathfrak{K}_a$ die ganze reelle Achse. Die Wurzeln des Polynoms

$$X_n(a) X_{n+1}(x) - X_{n+1}(a) X_n(x)$$

sind also sämtlich reell, sobald a reell ist; ist hierbei $|a| \geqq 1$, so liegen sie sogar im Intervalle $(-1, 1)$.

Im Grenzfalle, wo der imaginäre Teil von a ins Unendliche rückt, geht das Segment $\mathfrak{K}_a$ in das Intervall $(-1, 1)$ über. Es ist ferner

$$\lim_{a=\infty} \frac{X_n(\bar{a}) X_{n+1}(x) - X_{n+1}(\bar{a}) X_n(x)}{\bar{a}^{n+1}} = c\, X_n(x) \qquad (c \neq 0),$$

so daß wir auf diese Weise den bekannten Satz über die Wurzeln der Legendreschen Polynome herausbekommen.

II. Kapitel.

Über die konforme Abbildung des Innengebietes.

§ 6.

Darstellung der abbildenden Funktion im Innern von C.

19. Es sei C eine geschlossene und doppeltpunktlose analytische Kurve in der komplexen x-Ebene. Dann gibt es nach der Theorie der konformen Abbildung eine Funktion

$$z = \gamma(x),$$

welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Gebiet

$|z| < 1$ der z-Ebene abbildet, während der Nullpunkt einem gegebenen Punkte $x = a$ im Innern von C entspricht. D. h.

$$\gamma(a) = 0.$$

Durch diese Forderung ist $\gamma(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1) eindeutig bestimmt. Aus der Voraussetzung, daß C eine analytische Kurve ist, folgt dann, daß $\gamma(x)$ auch in einem größeren, die Kurve C in seinem Innern enthaltenden Gebiete regulär und schlicht ist[25]).

Es gibt bekanntlich immer eine und nur eine Funktion

$$x = g(z),$$

welche für $|z| \leqq 1$ regulär und schlicht ist und die Umkehrung der vorigen Abbildung liefert. Man hat, wenn x und z zugehörige Werte bezeichnen,

$$\gamma'(x)\, g'(z) = 1;$$

es ist also

$$\gamma'(x) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad g'(z) \neq 0.$$

Hier bezeichnen x und z beliebige Stellen im abgeschlossenen Innenbereich von C bzw. im Bereiche $|z| \leqq 1$.

Die im I. Kapitel definierten orthogonalen Polynome gestatten nun eine merkwürdige Darstellung der abbildenden Funktion $\gamma(x)$. Es gilt der

Satz IX. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und $\gamma(x)$ bezeichne eine Funktion, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Gebiet $|z| < 1$ der z-Ebene abbildet, während der Nullpunkt $z = 0$ einem gegebenen Punkte $x = a$ im Innern von C entspricht; dann ist im Innern von C*

$$\gamma(x) = \varepsilon \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K(a, a)} \int_a^x (K(a, \xi))^2\, d\xi,$$

wo ε eine Konstante mit dem absoluten Betrage 1, l die Länge von C und

$$K(a, x) = \overline{P_0(a)}\, P_0(x) + \overline{P_1(a)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}\, P_n(x) + \ldots$$

ist. $P_n(x)$ bezeichnet hier das zur Kurve C gehörige n-te orthogonale Polynom. (Die Reihe $K(a, x)$ konvergiert nach Satz VI immer, wenn x im Innern von C liegt.)

20. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf den folgenden einfachen

Hilfssatz. *Es sei $K(z)$ eine analytische Funktion, welche für $|z| \leqq 1$ regulär und von 0 verschieden ist. Ich betrachte die Gesamt-*

---

[25]) Vgl. etwa Picard, Traité d'analyse, 2. Auflage, Paris 1905 (Gauthiers-Villars) 2, S. 301—307.

heit der analytischen Funktionen $E(z)$, die für $|z| \leqq 1$ regulär sind und der Bedingung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K(z)E(z)|^2\, d\theta = 1 \qquad (z = e^{i\theta})$$

genügen. Es sei endlich a_0 fest und $|a_0| < 1$; dann ist das Maximum von $|E(a_0)|^2$

$$\operatorname{Max} |E(a_0)|^2 = \frac{1}{1-|a_0|^2}\,\frac{1}{|K(a_0)|^2}.$$

Ich setze

$$K(z)E(z) = t_0 + t_1 z + \ldots + t_n z^n + \ldots;$$

dann ist laut der obigen Voraussetzung

$$|t_0|^2 + |t_1|^2 + \ldots + |t_n|^2 + \ldots = 1,$$

also mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichheit

$$|E(a_0)|^2 \leqq \frac{1}{|K(a_0)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}|t_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty}|a_0|^{2n} = \frac{1}{1-|a_0|^2}\,\frac{1}{|K(a_0)|^2}.$$

(Dieses Maximum wird dann und nur dann erreicht, wenn für alle n

$$t_n = c\bar{a}_0^n,$$

d. h. wenn

$$K(z)\,E(z) = \frac{c}{1-\bar{a}_0 z}$$

ist. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-\bar{a}_0 z|^2} = \frac{1}{1-|a_0|^2} \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Daraus folgt somit

$$|c| = \sqrt{1-|a_0|^2}$$

und also

$$E(z) = \varepsilon\,\frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\bar{a}_0 z}\,\frac{1}{K(z)} \qquad (|\varepsilon| = 1).$$

21. Für $a_0 = 0$ liefert dieser Hilfssatz den folgenden:

A. *Es sei $K(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär-analytisch und von 0 verschieden; ich betrachte sämtliche analytische Funktionen $E(z)$, welche für $|z| \leqq 1$ regulär sind und der Bedingung*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K(z)E(z)|^2\, d\theta = 1 \qquad (z = e^{i\theta})$$

genügen. Dann ist

$$\operatorname{Max} |E(0)|^2 = \frac{1}{|K(0)|^2}.$$

Ferner gilt

B. *Es sei a ein gegebener Punkt im Innern der Kurve C. Ich betrachte sämtliche analytische Funktionen $G(x)$, welche im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär sind und der Bedingung*

$$\frac{1}{l}\int_C |G(\xi)|^2 d\sigma = 1$$

genügen. Dann ist

$$\operatorname{Max} |G(a)|^2 = K(a, a),$$

wo $K(a, x)$ die obige Bedeutung hat[26]).

Diese Sätze liefern die Lösungen je einer Extremum-Aufgabe, welche sich auf die Funktionenklassen $E(z)$ bzw. $G(x)$ beziehen. Ich setze nun in A.

$$K(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, g'(z) \quad {}^{27}),$$

wo $g(z)$ die Abbildung liefernde Funktion in **19.** ist. Es sei ferner

$$E(z) = E(\gamma(x)) = G(x)$$

und also

$$G(x) = G(g(z)) = E(z).$$

Dann sind $E(z)$ und $G(x)$ gleichzeitig regulär. Man hat ferner auf C

$$d\sigma = |g'(e^{i\theta})|\, d\theta = \frac{d\theta}{|\gamma'(\xi)|} \qquad (\xi = g(e^{i\theta})),$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K(z)E(z)|^2 d\theta = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} |g'(z)|\, |E(z)|^2 d\theta = \frac{1}{l}\int_C |G(\xi)|^2 d\sigma \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Es ist endlich

$$E(0) = G(a),$$

so daß

$$\operatorname{Max} |E(0)|^2 = \operatorname{Max} |G(a)|^2,$$

d. h.

$$K(a, a) = \frac{1}{|K(0)|^2} = \frac{l}{2\pi}\,\frac{1}{|g'(0)|} = \frac{l}{2\pi}\,|\gamma'(a)|.$$

22. Nach diesen Vorbereitungen bilde ich das Integral

$$J_n = \frac{1}{l}\int_C |K_n(a, \xi) - \lambda \sqrt{\gamma'(\xi)}|^2 d\sigma,$$

---

[26]) Vgl. Satz VI.

[27]) Es ist $g'(z) \neq 0$ für $|z| \leqq 1$; ein jeder Zweig von $\sqrt{g'(z)}$ ist also dort regulär-analytisch. Ähnliches gilt für $\sqrt{\gamma'(x)}$ im abgeschlossenen Innenbereich von C.

wo $K_n(a, x)$ die obige Bedeutung hat[28]) und λ eine später zu bestimmende Konstante bezeichnet. Man hat

$$\frac{1}{l}\int\limits_C |K_n(a, \xi)|^2 d\sigma = K_n(a, a),$$

ferner

$$\frac{1}{l}\int\limits_C |\gamma'(\xi)|\, d\sigma = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{l};$$

es ist endlich

$$\frac{1}{l}\int\limits_C K_n(a, \xi)\sqrt{\overline{\gamma'(\xi)}}\, d\sigma = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2\pi} K_n(a, g(z))\frac{|g'(z)|}{\sqrt{\overline{g'(z)}}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_0^{2\pi} K_n(a, g(z))\sqrt{g'(z)}\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Nun ist die Funktion von z

$$K_n(a, g(z))\sqrt{g'(z)}$$

regulär-analytisch für $|z| \leqq 1$; das letzte Integral ist somit gleich

$$\frac{2\pi}{l} K_n(a, g(0))\sqrt{g'(0)} = \frac{2\pi}{l}\frac{K_n(a, a)}{\sqrt{\gamma'(a)}}\ ^{29)}.$$

D. h.

$$J_n = K_n(a, a) - 2\,\Re\,\lambda\frac{2\pi}{l}\frac{K_n(a, a)}{\sqrt{\gamma'(a)}} + |\lambda|^2\frac{2\pi}{l}.$$

Ich setze hier

$$\lambda = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\overline{\gamma'(a)}},$$

dann folgt

$$J_n = \frac{l}{2\pi}|\gamma'(a)| - K_n(a, a),$$

d. h. nach dem obigen Resultate

$$\lim_{n=\infty} J_n = \frac{l}{2\pi}|\gamma'(a)| - K(a, a) = 0.$$

---

[28]) Vgl. § 3.

[29]) Ist $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = f(0).$$

Ist $f(z)$ regulär für $|z| \geqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = f(\infty).$$

Also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l} \int_C \left| K_n(a,\xi) - \frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(\xi)} \right|^2 d\sigma = 0.$$

Die Funktion unter dem Zeichen des absoluten Betrages ist aber regulär-analytisch, wenn ξ im abgeschlossenen Innenbereich von C liegt. Daraus folgt nach dem Hilfssatz in **8.**, daß

$$\lim_{n=\infty} K_n(a,x) = K(a,x) = \frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(x)}$$

ist für alle x, welche im Innern von C liegen. Man hat ferner

$$K(a,a) = \frac{l}{2\pi} |\gamma'(a)|,$$

so daß

$$\frac{(K(a,x))^2}{K(a,a)} = \frac{\overline{\gamma'(a)}}{|\gamma'(a)|} \frac{l}{2\pi} \gamma'(x),$$

woraus die obige Darstellung von $\gamma(x)$ folgt[30]).

§ 7.

Bemerkungen.

23. Ich bemerke, daß der obige Beweis die *Existenz* der abbildenden Funktion $\gamma(x)$ voraussetzt; er liefert also kein Existenztheorem für $\gamma(x)$, sondern gibt lediglich eine neue Darstellung derselben.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß man mit Hilfe von Satz IX die abbildende Funktion $\gamma(x)$ unmittelbar durch Polynome annähern kann. Ich setze nämlich

$$\gamma_n(x) = \varepsilon \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K_n(a,a)} \int_a^x (K_n(a,\xi))^2 d\xi;$$

dies ist ein Polynom $2n+1$-ten Grades, dessen Auswertung keine prinzipiellen Schwierigkeiten aufweist. Man hat nun im Innern von C

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n(x) = \gamma(x).$$

Es sei z. B. C der Einheitskreis, dann ist

$$P_n(x) = x^n,$$

also

$$K(a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}^n x^n = \frac{1}{1-\bar{a}x}.$$

---

30) Eine andere Darstellung von $\gamma(x)$ werde ich in § 11 geben.

Man erhält somit

$$\gamma(x) = \varepsilon(1 - |a|^2) \int_a^x \frac{d\xi}{(1 - \bar{a}\xi)^2} = \varepsilon \frac{x - a}{1 - \bar{a}x} \qquad (|\varepsilon| = 1),$$

ein bekanntes Resultat.

24. Ich bezeichne jetzt die obige Funktion $\gamma(x)$ mit $\gamma(a; x)$, d. h. $\gamma(a; x)$ sei die Funktion, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene abbildet und der Bedingung

$$\gamma(a; a) = 0$$

genügt. Es sei a_0 ein beliebiger, aber fester Punkt im Innern von C, so vermittelt die Funktion

$$\frac{\gamma(a_0; x) - \gamma(a_0; a)}{1 - \overline{\gamma(a_0; a)}\gamma(a_0; x)}$$

ebenfalls eine schlichte Abbildung des Inneren der Kurve C auf das Innere des Einheitskreises, während $x = a$ in $z = 0$ übergeht. Sie muß also (abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1) mit $\gamma(a; x)$ übereinstimmen, d. h.

$$\gamma(a; x) = \eta \frac{\gamma(a_0; x) - \gamma(a_0; a)}{1 - \overline{\gamma(a_0; a)}\gamma(a_0; x)} \qquad (|\eta| = 1).$$

Daraus folgt

$$|\gamma'(a; a)| = \frac{|\gamma'(a_0; a)|}{1 - |\gamma(a_0; a)|^2} \text{ [31]},$$

also

$$K(a, a) = \frac{l}{2\pi} \frac{|\gamma'(a_0; a)|}{1 - |\gamma(a_0; a)|^2}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß $K(a, a)$ *im Innern von C nicht beschränkt bleibt.*

25. Satz IX gestattet eine Antwort auf die in Satz VI offen gelassene Frage über die Bedeutung von $K(a, x)$ zu geben. Es ist nämlich

$$|\gamma'(a)| = \frac{1}{|g'(0)|} = \frac{2\pi}{l} K(a, a)$$

das Vergrößerungsverhältnis (oder die Verzerrung) der Abbildung im Punkte $x = a$; ferner

$$K(a, x) = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\overline{\gamma'(a)}}\, \sqrt{\gamma'(x)}.$$

26. Man kann auch (wie es in der Theorie der konformen Abbildungen üblich ist) die folgende Frage stellen:

Welche ist die Funktion, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Innere eines Kreises der z-Ebene abbildet, während ein

[31]) $\gamma'(a; x)$ ist die Ableitung nach x.

gegebener Punkt a im Innern von C dem Mittelpunkt des Kreises entspricht und das Vergrößerungsverhältnis im Punkte a gleich 1 *ist?*

Diese Funktion ist

$$\gamma^*(x) = \frac{\varepsilon}{(K(a, a))^2} \int_a^x (K(a, \xi))^2 \, d\xi \qquad (|\varepsilon| = 1),$$

d. h.

$$\gamma^*(x) = \frac{l}{2\pi} \frac{1}{K(a, a)} \gamma(x).$$

Daraus folgt, daß der Radius dieses Kreises

$$R(a) = \frac{l}{2\pi} \frac{1}{K(a, a)}$$

ist.

Nähert sich a der Kurve C, so ist nach dem vorstehenden

$$\lim R(a) = 0,$$

d. h. das Bild von C schrumpft zu einem Punkte zusammen. Das Bild von C ist dann am größten, wenn die Summe

$$K(a, a) = \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(a)|^2$$

minimal ist. Ist z. B. C der Einheitskreis, so tritt dies für $a = 0$ ein.

III. Kapitel.

Über die konforme Abbildung des Außengebietes.

§ 8.

Hilfssätze.

27. Der Zweck dieses Kapitels ist den Zusammenhang der orthogonalen Polynome mit der Theorie der konformen Abbildung weiter zu untersuchen.

Es sei C eine geschlossene und doppelpunktlose analytische Kurve in der komplexen x-Ebene. Dann gibt es nach der Theorie der konformen Abbildung eine Funktion

$$z = \psi(x),$$

welche daß Äußere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Äußere des Einheitskreises der z-Ebene abbildet, während die Punkte $x = \infty$ und $z = \infty$ einander entsprechen. Diese Funktion ist (abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1) eindeutig bestimmt.

Ich bezeichne die inverse Funktion von $z = \psi(x)$ mit

$$x = \varphi(z).$$

Dann ist, wenn x und z zugehörige Werte bezeichnen,

$$\psi'(x)\varphi'(z) = 1;$$

es ist also außerhalb von C bzw. für $|z| > 1$

$$\psi'(x) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi'(z) \neq 0.$$

Die Funktion $\varphi(z)$ hat dabei die folgende Form

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots \qquad (\tau \neq 0),$$

wo der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \zeta^n$$

größer als 1 ist.

Aus der Voraussetzung, daß C eine analytische Kurve ist, folgt bekanntlich die Existenz einer Zahl ϱ $(0 < \varrho < 1)$ von der Eigenschaft, daß die Funktion $x = \varphi(z)$ nicht nur das Gebiet $|z| > 1$, sondern sogar das Gebiet $|z| > \varrho$ schlicht auf das Äußere einer Kurve C_ϱ abbildet, welche ganz im Innern von C verläuft. Dann konvergiert die obige Entwickelung für $|z| > \varrho$. Es ist ferner $\varphi'(z) \neq 0$ für $|z| > \varrho$ und $\psi'(x) \neq 0$, wenn x außerhalb von C_ϱ liegt.

Diese Abbildung überführt die konzentrischen Kreise mit den Radien $R > \varrho$ der z-Ebene in eine Schar von Kurven C_R der x-Ebene, welche ich *Kreisbilder* nennen will. Es ist offenbar $C_1 = C$ und wenn $\varrho < R' < R''$ ist, so ist $C_{R'}$ ganz im Innern von $C_{R''}$ enthalten.

Ist C der Einheitskreis, so ist $\varphi(z) = z$ und die Kreisbilder sind konzentrische Kreise.

Im Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, hat man

$$\varphi(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$

und also

$$z = \psi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1};$$

C_1 ist in diesem Falle das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ und die Kreisbilder C_R $(R > 1)$ sind homofokale Ellipsen mit den Brennpunkten $-1, 1$.

§ 9.

Über die Tschebyscheffschen Polynome.

28. In **14.** habe ich die Tschebyscheffschen Polynome definiert; ich komme jetzt wieder auf diese Polynome zurück, da sie für unsere weiteren Ziele von entscheidender Bedeutung sind. Ich zitiere den von Herrn Faber herrührenden

Satz X. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und $T_n(x)$ das zugehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom; es sei ferner das Maximum von $|T_n(x)|$ auf C*

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |T_n(x)| = m_n.$$

Ist

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots \qquad (\tau \neq 0)$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf das Äußere der Kurve C abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entsprechen, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{|\tau|^n} = 1.$$

Ist also $|\tau| > 1$, so hat man

$$\lim_{n=\infty} m_n = \infty.$$

Ist $|\tau| = 1$, so ist

$$\lim_{n=\infty} m_n = 1,$$

und ist endlich $|\tau| < 1$, so hat man

$$\lim_{n=\infty} m_n = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine analytische Kurve C, daß es Polynome

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

gibt, für welche die Abweichung von 0 auf der Kurve C (im Tschebyscheffschen Sinne)[32]), d. h. daß

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |A_n(x)|$$

beliebig klein werden kann, ist somit die, daß $|\tau| < 1$ ist[33]).

---

[32]) Vgl. die Fußnote [21]).

[33]) Faber a. a. O. [21]) S. 86–88. Diese notwendige und hinreichende Bedingung gilt auch dann, wenn C nicht analytisch, sondern eine beliebige stetige und doppelpunktlose Kurve ist. (Die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{|\tau|^n} = 1$$

ist indessen in diesem Falle nicht allgemein gültig. Vgl. **31.**)

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächsten Seite.)

Ich beweise hier diesen Satz mit einer Methode, die auch bei Satz XI zum Ziele führen wird. Es ist zunächst für jedes Polynom von der obigen Form

$$A_n(x) = (\varphi(z))^n + a_1(\varphi(z))^{n-1} + \ldots + a_n = \tau^n z^n r(z) \qquad (x = \varphi(z)),$$

wo $r(z)$ für $|z| \geqq 1$ regulär und $r(\infty) = 1$ ist. Also

$$\underset{(C)}{\operatorname{Max}} |A_n(x)| = |\tau|^n \underset{|z|>1}{\operatorname{Max}} |r(z)| \geqq |\tau|^n \text{ [34]},$$

d. h.

$$m_n \geqq |\tau|^n.$$

Ich will anderseits Polynome von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

bilden, für welche

$$\underset{(C)}{\operatorname{Max}} |A_n(x)| = |\tau|^n (1 + o(1)) \text{ [35]}$$

Ist C eine geradlinige Strecke von der Länge l, so ist

$$|\tau| = \frac{l}{4};$$

es ist also dann und nur dann $\lim\limits_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $l < 4$ ist.

Ist C ein Kreisbogen vom Radius R und mit dem Winkel φ, so ist

$$|\tau| = R \sin \frac{\varphi}{4};$$

es ist also dann und nur dann $\lim\limits_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $R \sin \frac{\varphi}{4} < 1$ ist.

Ist z. B. C ein Halbkreis ($\varphi = \pi$), so muß $R < \sqrt{2}$ sein.

Ist C ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit der Sehne h und mit dem Winkel $2k\pi$ $(k < 1)$, so ist

$$|\tau| = \frac{h}{4} \frac{1}{1-k};$$

es ist also dann und nur dann $\lim\limits_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $\frac{h}{1-k} < 4$ ist.

Ist C eine Halbkreisfläche (begrenzt durch einen Halbkreis und einen Durchmesser von der Länge $2R$), so ist

$$|\tau| = \frac{4R}{3\sqrt{3}};$$

es ist also dann und nur dann $\lim\limits_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $R < \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ist.

[34]) Ist $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$, so ist

$$\underset{|z|=1}{\operatorname{Max}} |f(z)| \geqq |f(0)|.$$

Ist $f(z)$ regulär für $|z| \geqq 1$, so ist

$$\underset{|z|=1}{\operatorname{Max}} |f(z)| \geqq |f(\infty)|.$$

[35]) Ich bezeichne mit $O(a_n)$ und $o(a_n)$ eine Größe, die durch a_n dividiert, mit wachsendem n beschränkt bleibt, bzw. nach 0 konvergiert.

ist. Aus diesen zwei Ergebnissen folgt offenbar der Satz X. Zu diesem Zwecke brauche ich aber einen Hilfssatz, welcher im nächsten Abschnitt dargelegt wird.

29. Hilfssatz. *Es sei* $0 < r < 1$ *und*

$$M(u) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{u} + \dots + \frac{\alpha_n}{u^n} + \dots$$

sei regulär für $|u| \geqq r$; *ich setze*

$$u_\nu^{(n)} = r e^{i\nu\frac{2\pi}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann ist bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \dots + M(u_n^{(n)})}{n} = \alpha_0 .$$

Es ist aber sogar

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \dots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + o(1).$$

In der Tat hat man

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \dots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + \frac{n\alpha_n}{r^n} + \frac{n\alpha_{2n}}{r^{2n}} + \dots;$$

es ist aber

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < r,$$

so daß

$$\alpha_n = O(\vartheta^n r^n),$$

wo $0 < \vartheta < 1$ und ϑ von n unabhängig ist. Man hat also

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \dots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + O(n\vartheta^n),$$

woraus die Behauptung folgt. Es ist sogar für jedes k

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \dots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Es ist klar, daß diese ganze Schlußweise ihre Richtigkeit auch dann beibehält, wenn die Koeffizienten α_n Funktionen einer Veränderlichen z sind, welche für $|z| \geqq r$ regulär bleiben und der Bedingung $\alpha_n = O(\vartheta^n r^n)$, wo $0 < \vartheta < 1$ und ϑ von z und n unabhängig ist, gleichmäßig genügen [36]. Die Konvergenz findet dann für $|z| \geqq r$ gleichmäßig statt.

[36]) Dies wird offenbar stets erfüllt, sobald die Funktion von zwei Variabeln $M(u) = M(u, z)$ für $|u| \geqq r$, $|z| \geqq r$ regulär ist. Man hat nämlich

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\int M(u, z)\, u^{n-1} du,$$

wo die Integration über einen Kreis $|u| = \vartheta r$ $(0 < \vartheta < 1)$ zu erstrecken ist. Nun ist

$$M(u, z) = O(1)$$

und zwar gleichmäßig für $|u| \geqq \vartheta r$ und $|z| \geqq r$. Also

$$\alpha_n = O(\vartheta^n r^n).$$

30. Es sei nun $\varrho < r < 1$, wo ϱ die gleiche Bedeutung hat, wie in **27.** Die Funktion $\varphi(u)$ ist dann regulär und schlicht für $|u| \geqq r$. Ich betrachte die folgenden Punkte in der komplexen x-Ebene

$$v_1^{(n)} = \varphi(u_1^{(n)}),\ v_2^{(n)} = \varphi(u_2^{(n)}),\ \ldots,\ v_n^{(n)} = \varphi(u_n^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $u_\nu^{(n)}$ die obige Bedeutung hat. Diese Punkte liegen alle auf dem Kreisbilde C_r, d. h. im Innern von C. Ich bilde das Polynom n-ten Grades

$$\omega_n(x) = (x - v_1^{(n)})(x - v_2^{(n)}) \ldots (x - v_n^{(n)})\ ^{37)},$$

welches offenbar die Form $\omega_n(x) = x^n + \ldots$ hat. Ich behaupte dann, daß

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |\omega_n(x)| = |\tau|^n (1 + o(1))$$

ist, d. h. die Polynome $\omega_n(x)$ genügen der in **28.** gestellten Forderung.

Ich setze nämlich im vorigen Hilfssatz

$$M(u) = M(u, z) = \log \frac{\varphi(u) - \varphi(z)}{u - z}.$$

Diese Funktion ist regulär für $|u| \geqq r$, $|z| \geqq r$, da wegen der Schlichtheit $\varphi(u) \neq \varphi(z)$, wenn $u \neq z$ ist; sie ist auch im Unendlichen regulär, da

$$\frac{\varphi(z)}{z} = \tau + \frac{\tau_0}{z} + \frac{\tau_1}{z^2} + \ldots$$

ist. Man hat nun

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)}) = \log \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi(z) - \varphi(u_\nu^{(n)})}{z - u_\nu^{(n)}} = \log \frac{\omega_n(x)}{z^n - r^n},$$

wenn x und z durch die Relation $x = \varphi(z)$ miteinander verbunden sind. Es ist ferner

$$\alpha_0 = \lim_{u=\infty} \log \frac{\frac{\varphi(u)}{u} - \frac{\varphi(z)}{u}}{1 - \frac{z}{u}} = \log \tau,$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\tau^n} \frac{\omega_n(x)}{z^n - r^n} = 1 \qquad (x = \varphi(z))$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r$. [Man hat sogar für alle k

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{\tau^n} \frac{\omega_n(x)}{z^n - r^n}\right)^{n^k} = 1 \qquad (x = \varphi(z);\ |z| \geqq r).]$$

Daraus folgt

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\tau^n} \frac{\omega_n(x)}{z^n} = 1 \qquad (x = \varphi(z)),$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r' > r$. Es ist also insbesondere

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^n} \operatorname*{Max}_{(C)} |\omega_n(x)| = 1.$$

Damit ist Satz X vollständig bewiesen.

[37]) Vgl. die Fußnote [10]).

31. Es sei z. B. C eine Ellipse mit den Brennpunkten $-1, 1$ und mit den Halbachsen a und b $(a > b)$. Ist dann R durch die Bedingungen

$$a = \frac{R + \frac{1}{R}}{2}, \quad b = \frac{R - \frac{1}{R}}{2} \qquad (R > 1)$$

bestimmt, so ist

$$\varphi(z) = \frac{Rz}{2} + \frac{1}{2Rz}.$$

Man hat also

$$\tau = \frac{R}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{2}{a+b}\right)^n m_n = 1.$$

In der Tat, es ist nach Fußnote [22])

$$m_n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{a-b}{2}\right)^n.$$

Im Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, verliert Satz X seine Gültigkeit. Dann ist nämlich[38]) $a = 1$, $b = 0$, also

$$|\tau| = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}}, \quad m_n = \frac{1}{2^{n-1}},$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{|\tau|^n} = 2$$

und nicht 1, wie es nach Satz X sein müßte.

§ 10.

Ein Grenzwertsatz über die Determinanten D_n.

32. Ich komme jetzt meinem Ziel mit einem Schritte näher, indem ich mit Hilfe des Vorhergehenden einen Grenzwertsatz über die Determinanten D_n[39]) beweise. D_n ist die Determinante der positiv definiten Hermiteschen Form

$$H_n(1; t) = \frac{1}{l} \int_C |t_0 + t_1 \xi + \ldots + t_n \xi^n|^2 d\sigma;$$

es ist also stets

$$D_n > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es gilt nun der

Satz XI. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und D_n die Determinante der Hermiteschen Form*

$$H_n(1; t) = \frac{1}{l} \int_C |t_0 + t_1 \xi + \ldots + t_n \xi^n|^2 d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

[38]) Vgl. **14**.
[39]) Vgl. **3**.

Ist

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \dots + \frac{\tau_n}{z^n} + \dots \qquad (\tau \neq 0)$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf das Äußere der Kurve C der x-Ebene abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entsprechen, dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n+1}} \frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{2\pi}{l}, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{|\tau|^n} = \sqrt{\frac{2\pi|\tau|}{l}}.$$

Die Zahlen μ_n und m_n sind somit asymptotisch gleich [40]).

33. Es ist zunächst nach Satz II

$$\mu_n^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = \operatorname{Min} \frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma,$$

wo $A_n(x)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

bezeichnet. Man hat aber nach **28.**

$$A_n(x) = \tau^n z^n r(z) \qquad (x = \varphi(z)),$$

wo $r(z)$ für $|z| \geqq 1$ regulär und $r(\infty) = 1$ ist. Es ist ferner auf C

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{|\tau|^{2n}}{l}\int_0^{2\pi} |r(z)|^2 |\varphi'(z)| d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Nun ist die Funktion

$$r(z)\sqrt{\varphi'(z)} \text{ [41])}$$

regulär für $|z| \geqq 1$ und für $z = \infty$ gleich $\sqrt{\tau}$; daraus folgt für alle $A_n(x)$

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma \geqq \frac{2\pi}{l} |\tau|^{2n+1} \text{ [42])},$$

---

[40]) Vgl. die Fußnote [21]). Es ist namentlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{m_n} = \sqrt{\frac{2\pi|\tau|}{l}}.$$

[41]) Vgl. 27.

[42]) Ist $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \geqq |f(0)|^2.$$

Ist $f(z)$ regulär für $|z| \geqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \geqq |f(\infty)|^2.$$

d. h.

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} \geqq \frac{2\pi}{l} |\tau|^{2n+1}.$$

Ich beweise anderseits, daß für geeignet gewählte Polynome $A_n(x)$ von der obigen Form

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n+1}} \frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{2\pi}{l} (1+\varepsilon)$$

ist, wo ε eine gegebene, dem absoluten Betrage nach beliebig kleine Größe bezeichnet. Aus diesen Ergebnissen folgt dann der Satz XI.

34. Es sei

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots + \frac{\beta_n}{z^n} + \ldots \qquad \left(\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right);$$

diese Funktion ist regulär für $|z| > \varrho$. Ich setze

$$g_\nu(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{z^\nu},$$

dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_C |g_\nu(z)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_\nu(z)|^2 |\varphi'(z)| d\theta = 1 + \varepsilon_\nu \qquad (z = \psi(\xi); z = e^{i\theta}),$$

wo $\varepsilon_\nu = o(1)$ ist. Es sei nun ν eine feste Zahl und $n > \nu$; ich setze

$$A_n(x) = \frac{\beta_0 \omega_n(x) + \beta_1 \tau \omega_{n-1}(x) + \ldots + \beta_\nu \tau^\nu \omega_{n-\nu}(x)}{\beta_0},$$

wo $\omega_n(x)$ die obige Bedeutung (**30.**) hat. Dies ist ein Polynom n-ten Grades von der Form $A_n(x) = x^n + \ldots$. Man hat ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\tau^n} \cdot \frac{A_n(x)}{z^n} = \frac{\beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{z^\nu}}{\beta_0} = \frac{g_\nu(z)}{\beta_0} \qquad (x = \varphi(z)),$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r' > r > \varrho$. D. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n}} \frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{1}{l} \int_C \frac{|g_\nu(z)|^2}{|\beta_0|^2} d\sigma = \frac{2\pi}{l} \frac{1+\varepsilon_\nu}{|\beta_0|^2} = \frac{2\pi|\tau|}{l} (1+\varepsilon_\nu)$$
$$(z = \psi(\xi)),$$

woraus offenbar die Behauptung folgt. Damit ist Satz XI vollständig bewiesen.

35. Im Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, ist Satz XI nicht mehr mehr gültig. Dann hat man nämlich $|\tau| = \frac{1}{2}$, $l = 4$ und

$$\mu_n^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = \text{Min}\, \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (A_n(x))^2 dx = \frac{1}{2k_n^2} \int_{-1}^{1} (X_n(x))^2 dx = \frac{1}{k_n^2} \frac{1}{2n+1},$$

wo k_n den höchsten Koeffizient des n-ten Legendreschen Polynoms $X_n(x)$ bezeichnet. Nun ist

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)),$$

also

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}(1 + o(1)),$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n+1}} \frac{D_n}{D_{n-1}} = \pi$$

und nicht $\frac{\pi}{2}$, wie es nach Satz XI sein müßte.

§ 11.

Über einen asymptotischen Ausdruck der orthogonalen Polynome.

36. Ich bestimme jetzt einen asymptotischen Ausdruck der orthogonalen Polynome $P_n(x)$, der außerhalb von C gültig ist; es gilt der

Satz XII. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und*

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \dots + \frac{\tau_n}{z^n} + \dots \qquad (\tau \neq 0;\ \tau = |\tau| e^{i\alpha})$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf das Äußere der Kurve C der x-Ebene abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entsprechen; es sei endlich $z = \psi(x)$ die inverse Funktion von $x = \varphi(z)$. Dann gilt für die zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome der asymptotische Ausdruck

$$P_n(x) = e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha} \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \sqrt{\psi'(x)}\, (\psi(x))^n (1 + o(1)),$$

u. zw. gleichmäßig außerhalb von C.

Daraus folgt für die abbildende Funktion $\psi(x)$ außerhalb von C die folgende Darstellung:

$$\psi(x) = e^{-i\alpha} \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}\ ^{43}).$$

[43]) Für die Tschebyscheffschen Polynome $T_n(x)$ gilt eine ähnliche asymptotische Formel. (Vgl. Faber, a. a. O. [21]), S. 88—92). Es ist für alle x außerhalb von C

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_n(x)}{(\tau\psi(x))^n} = 1;$$

setze ich also

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, P_n^*(x) = \frac{P_n^*(x)}{\mu_n},$$

d. h. ist $P_n^*(x)$ das n-te orthogonale Polynom, so normiert, daß sein höchster Koeffizient gleich 1 sei, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n^*(x)}{T_n(x)} = \sqrt{\tau\psi'(x)}\,.$$

Ich beweise diesen Satz durch Berechnung des Integrals

$$J_n' = \frac{1}{l}\int_C \left| \sqrt{\psi'(\xi)} - \lambda_n \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \right|^2 d\sigma,$$

wo die Konstante λ_n später bestimmt wird. Man hat

$$\frac{1}{l}\int_C |\psi'(\xi)|\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{l},$$

ferner

$$\frac{1}{l}\int_C \left| \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \right|^2 d\sigma = \frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2\, d\sigma = 1;$$

es ist endlich

$$\frac{1}{l}\int_C \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \sqrt{\psi'(\xi)}\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} \frac{P_n(\varphi(z))}{z^n} \frac{|\varphi'(z)|}{\sqrt{\varphi'(z)}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} \frac{P_n(\varphi(z))}{z^n} \sqrt{\overline{\varphi'(z)}}\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Nun ist die Funktion

$$K(z) = \frac{P_n(\varphi(z))}{z^n} \sqrt{\varphi'(z)}$$

regulär für $|z| \geqq 1$ und man hat

$$K(\infty) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \tau^{n+\frac{1}{2}}.$$

Es ist also

$$J_n' = \frac{2\pi}{l} + |\lambda_n|^2 - 2\Re\, \lambda_n \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \tau^{n+\frac{1}{2}} \text{ [44]}.$$

Ich setze hier

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \bar{\tau}^{n+\frac{1}{2}},$$

dann folgt

$$J_n' = \frac{2\pi}{l} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \frac{D_{n-1}}{D_n} |\tau|^{2n+1},$$

d. h. nach Satz XI

$$\lim_{n=\infty} J_n' = 0.$$

Es ist also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l}\int_C \left| \sqrt{\psi'(\xi)} - \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \bar{\tau}^{n+\frac{1}{2}} \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \right|^2 d\sigma = 0.$$

Die Funktion unter dem Zeichen des absoluten Betrages ist aber regulär-analytisch, wenn ξ im abgeschlossenen Außenbereich von C liegt.

---

[44]) Vgl. die Fußnote [29]).

Daraus folgt nach dem Hilfssatz in **8.**, daß für alle x, welche außerhalb von C liegen,

$$\lim_{n=\infty} \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \tau^{n+\frac{1}{2}} \frac{P_n(x)}{(\psi(x))^n} = \sqrt{\psi'(x)}$$

ist, d. h. nach Satz XI

$$\lim_{n=\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha} \frac{P_n(x)}{(\psi(x))^n} = \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \sqrt{\psi'(x)}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

37. Liegt x außerhalb von C, so ist $\psi'(x) \neq 0$; man hat also

$$\psi(x) = e^{-i\alpha} \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

d. h. nach **4.**

$$\psi(x) = \varepsilon \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_{n+1}}} \frac{\left| h_{pq}\, x - h_{p+1,q} \right|_0^n}{\left| h_{pq}\, x - h_{p+1,q} \right|_0^{n-1}},$$

wo

$$|\varepsilon| = 1, \quad h_{pq} = \frac{1}{l} \int_C \xi^p \bar{\xi}^q \, d\sigma, \quad D_n = \left| h_{pq} \right|_0^n$$

ist. Mit Hilfe dieser Formel kann man die abbildende Funktion mit rationalen Funktionen approximieren.

38. Dieses Resultat liefert auch zur Darstellung der Funktion $\gamma(x)$ ein neues Mittel, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z| < 1$ der z-Ebene schlicht abbildet, während ein gegebener Punkt $x = a$ des Innern von C in $z = 0$ übergeht (§ 6). Man kann nämlich mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien

$$x' = \frac{1}{x - a}$$

das Innere der Kurve C der x-Ebene auf das Äußere einer Kurve C' der x'-Ebene abbilden; die Funktion der $z' = \Psi(x')$, welche das letztere Gebiet auf das Gebiet $|z'| > 1$ der z'-Ebene abbildet, steht dann mit $\gamma(x)$ im folgenden Zusammenhang:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\Psi\left(\frac{1}{x-a}\right)}.$$

In der Tat sei $z' = \frac{1}{z}$, dann ist

$$z' = \Psi(x') \quad \text{und} \quad z = \gamma(x),$$

also

$$\gamma(x) = \frac{1}{z'} = \frac{1}{\Psi(x')} = \frac{1}{\Psi\left(\frac{1}{x-a}\right)}.$$

Es sei nun der Einfachheit halber $a = 0$; ich setze

$$h'_{pq} = \frac{\int\limits_{C'} \xi^p \bar{\xi}^q \, d\sigma}{\int\limits_{C'} d\sigma} = \frac{\int\limits_{C} \frac{d\sigma}{\xi^{p+1} \bar{\xi}^{q+1}}}{\int\limits_{C} \frac{d\sigma}{|\xi|^2}}$$

und

$$D'_n = |h'_{pq}|_0^n.$$

Dann ist also

$$\gamma(x) = \frac{1}{\psi'\left(\frac{1}{x}\right)} = \varepsilon' x \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{D'_{n+1}}{D'_{n-1}} \frac{|h'_{pq} - h'_{p+1,q}\, x|_0^{n-1}}{|h'_{pq} - h'_{p+1,q}\, x|_0^{n}}} \qquad (|\varepsilon'| = 1)$$

für alle x im Innern von C.

§ 12.

Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen.

39. Als wichtigste Anwendung des Satzes über den asymptotischen Ausdruck der orthogonalen Polynome behandle ich die Frage über die Konvergenz der Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen. Wir haben bereits in § 2 gesehen, daß jede analytische Funktion $F(x)$, welche im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär ist, eine Entwickelung nach orthogonalen Polynomen gestattet

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

deren Koeffizienten sich auf die Fouriersche Weise ergeben:

$$c_n = \frac{1}{l} \int\limits_C F(\xi) P_n(\xi) \, d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Entwickelung konvergiert im Innern von C und stellt dort $F(x)$ dar.

Was nun die Konvergenzverhältnisse am Rande und außerhalb von C betrifft, besteht eine vollständige Analogie zu den Potenzreihen. Es gilt nämlich der

Satz XIII. *Es sei $F(x)$ im abgeschlossenen Innenbereich der analytischen Kurve C regulär-analytisch und*

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

ihre Entwickelung nach orthogonalen Polynomen. Es sei C_{R_0} $(R_0 > 1)$ das größte Kreisbild (bei der konformen Abbildung des Außengebietes von C)[45]*, welches keinen singulären Punkt von $F(x)$ in seinem Innern enthält. Dann konvergiert die obige Entwickelung absolut und gleich-*

[45]) Vgl. § 8.

mäßig im Innern von C_{R_0}[46]*) und stellt dort $F(x)$ dar. Die Entwickelung divergiert ferner außerhalb von C_{R_0}. Sie hat somit C_{R_0} als echten Konvergenzbereich.*

Man hat übrigens

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R_0}\text{ [47]}).$$

40. Es sei zunächst im allgemeinen

$$\text{(A)} \qquad a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots$$

irgendeine *formell* aufgeschriebene, nach den Polynomen $P_n(x)$ fortschreitende Reihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

konvergent ist. Es sei

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \qquad (\alpha \leqq 1).$$

Ich behaupte dann, daß *die Reihe* (A) *das Kreisbild $C_{\frac{1}{\alpha}}$ als echten Konvergenzbereich besitzt, d. h. sie konvergiert im Innern von $C_{\frac{1}{\alpha}}$ absolut und gleichmäßig und stellt dort eine reguläre Funktion dar; sie divergiert hingegen überall außerhalb von $C_{\frac{1}{\alpha}}$.*

Ist $\alpha = 1$, so folgt aus Satz VI, daß die Reihe (A) stets absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn x im Innern von $C_1 = C$ liegt. Sie stellt dort ferner eine reguläre Funktion dar.

Es sei jetzt $\alpha < 1$. Liegt x außerhalb von C, so ist nach Satz XII

$$g' < \left| \frac{P_n(x)}{z^n} \right| < g'',$$

wo die Veränderlichen x und z miteinander durch die Relation

$$x = \varphi(z), \quad z = \psi(x)$$

verknüpft sind; g' und g'' bezeichnen hier positive, von n unabhängige Konstanten, die sogar auch von x bzw. z unabhängig sind, wenn $|z| \geqq R^*$ ist, wo $R^* > 1$ eine feste Zahl bedeutet. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ist nun für $|z| < \frac{1}{\alpha}$ absolut und gleichmäßig konvergent; die Reihe (A) konvergiert somit absolut und gleichmäßig, wenn x auf irgendeinem Kreis-

---

[46]) Vgl. die Fußnote [4]).

[47]) Auf dem Kreisbilde C_{R_0}, welches den Konvergenzbereich der Entwickelung begrenzt, liegt somit wenigstens ein singulärer Punkt von $F(x)$.

bilde $C_R \left(1 < R < \frac{1}{\alpha}\right)$ liegt. Daraus folgt aber nach einem Weierstraßschen Theorem[48]), daß sie im Innern von $C_{\frac{1}{\alpha}}$ (also auch in C) absolut und gleichmäßig konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt.

Liegt anderseits x außerhalb von $C_{\frac{1}{\alpha}}$, wo wieder $\alpha \leqq 1$ ist, so ist $|z| > \frac{1}{\alpha}$, d. h.

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \, |a_n z^n| = \infty$$

und also

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \, |a_n P_n(x)| = \infty,$$

woraus die Divergenz von (A) folgt.

41. Es sei nun $F(x)$ eine im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär-analytische Funktion und

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

d. h.

$$c_n = \frac{1}{l} \int_C F(\xi) \overline{P_n(\xi)} \, d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann konvergiert nach Satz III die Reihe

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots.$$

Ich setze

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = c \qquad (c \leqq 1),$$

dann behaupte ich, daß $c = \frac{1}{R_0}$ ist, wenn C_{R_0} $(R_0 > 1)$ das größte Kreisbild bezeichnet, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(x)$ enthält (es ist also $c < 1$); d. h. die Entwickelung von $F(x)$ besitzt C_{R_0} als echten Konvergenzbereich.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich zunächst, daß diese Entwickelung im Innern von $C_{\frac{1}{c}}$ absolut und gleichmäßig konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt. Diese Funktion muß übrigens mit $F(x)$ übereinstimmen, da wir bereits nach Satz IV wissen, daß die Entwickelung im Innern von C die Funktion $F(x)$ darstellt. Daraus folgt nach der Definition von R_0, daß

$$\frac{1}{c} \leqq R_0, \text{ d. h. } c \geqq \frac{1}{R_0}$$

ist.

42. Ich beweise anderseits, daß

$$c \leqq \frac{1}{R_0}$$

[48]) Vgl. etwa Montel, a. a. O.[21]), S. 16.

ist; dies wird jedenfalls dargetan, wenn ich für alle $R\,(1 < R < R_0)$ die Abschätzung

$$c_n = O\left(\frac{1}{R^n}\right)$$

beweise. Daraus folgt nämlich

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqq \frac{1}{R}$$

und also, da R beliebig nahe zu R_0 liegt,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = c \leqq \frac{1}{R_0}.$$

Diese Abschätzung folgt aber aus dem folgenden Hilfssatz:

Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich des Kreisbildes C_R $(R > 1)$; es existieren dann Polynome n-ten Grades $V_n(x)$, für welche

$$|F(x) - V_n(x)| < \frac{B}{R^n}$$

ist, wenn x auf der Kurve C liegt; B bezeichnet hier eine von n und x unabhängige Konstante.

In der Tat folgt dann mit Bezug auf die Orthogonalitätseigenschaft der Polynome $P_n(x)$, daß

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - Q(\xi))\,\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma$$

ist, wo $Q(x)$ ein *beliebiges* Polynom $n-1$-ten Grades bezeichnet. Es ist also insbesondere

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - V_{n-1}(\xi))\,\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma$$

und also

$$|c_n| < \frac{B}{R^{n-1}}\,\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|\,d\sigma,$$

d. h. nach der Schwarzschen Ungleichheit

$$|c_n| < \frac{B}{R^{n-1}}\sqrt{\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2\,d\sigma} = \frac{B}{R^{n-1}},$$

womit die verlangte Abschätzung geliefert wird.

43. Es bleibt uns noch übrig, den obigen Hilfssatz zu beweisen. Dies geschieht z. B. durch Heranziehung gewisser Interpolationspolynome, indem man als Interpolationsstellen, nach dem Vorgange von Herrn Fejér [49]), etwa folgende wählt:

$$v_\nu^{(n)} = \varphi\left(r e^{i\nu\frac{2\pi}{n}}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo die $v_\nu^{(n)}$ dieselbe Bedeutung haben wie in **30** [50]). Dann werden, wie dort ausgeführt wurde, die Polynome

$$\omega_n(x) = (x - v_1^{(n)})(x - v_2^{(n)}) \ldots (x - v_n^{(n)})$$

folgende Gleichung erfüllen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_n(x)}{\tau^n z^n} = 1,$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r' > r$. Es sei nun x auf C. Ich setze nach einer bekannten Formel

$$V_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\left(1 - \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(\xi)}\right) d\xi \text{ [51])},$$

dann ist

$$V_n(v_\nu^{(n)}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - v_\nu^{(n)}}\, d\xi = F(v_\nu^{(n)}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$F(x) - V_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\, \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(\xi)}\, d\xi.$$

Nun ist aber gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(\xi)}\right| R^{n+1} = 1,$$

wenn x auf der Kurve C und ξ auf dem Kreisbilde C_R liegt. Daraus folgt der Hilfssatz. Damit ist Satz XIII vollständig bewiesen.

44. Als Anwendung betrachte ich den Spezialfall

$$F(x) = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\gamma'(a)}\sqrt{\gamma'(x)},$$

wo a ein innerer Punkt von C ist und $z = \gamma(x)$ (wie in § 6) die Funktion bezeichnet, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf $|z| < 1$ abbildet, während $x = a$ in $z = 0$ übergeht. Dann ist $F(x)$ offenbar regulär in einem Gebiete, welches die Kurve C ganz in seinem

[49]) Vgl. die Fußnote [2]).

[50]) Man kann zu diesem Zwecke auch die Interpolationspolynome des § 14 benutzen.

[51]) Vgl. etwa Montel, a. a. O. [21]), S. 49.

Innern enthält; sie ist also jedenfalls regulär auf der Kurve C. Man hat aber nach § 6

$$\frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(a)}}\sqrt{\gamma'(x)} = \overline{P_0(a)}\,P_0(x) + \overline{P_1(a)}\,P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}\,P_n(x) + \ldots,$$

also konvergiert diese Entwickelung nicht nur im Innern von C (wie es in § 3, Satz VI bewiesen wurde), sondern auch auf C und sogar auch in einem Kreisbilde C_R, wo $R-1$ eine genügend kleine positive Zahl ist, und stellt dort $F(x)$ dar. Es ist ferner

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n]{|P_n(a)|} < 1,$$

d. h.

$$P_n(a) = O(\varrho^n),$$

wo $\varrho < 1$ ist. (Aus Satz VI folgt nur $\lim\limits_{n=\infty} P_n(a) = 0$.)[52])

§ 13.

Über die Wurzeln der orthogonalen Polynome.

45. Ich will jetzt eine Verschärfung von Satz VII aussprechen, welche aus Satz XII unmittelbar folgt.

Satz XIV. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene, $P_n(x)$ das zugehörige n-te orthogonale Polynom und*

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Wurzeln desselben. Die Menge dieser Wurzeln für alle n hat keinen Häufungspunkt außerhalb von C.

Dieser Satz hat nach Satz VII nur dann Interesse, wenn C nicht durchweg konvex ist.

46. Satz XII gestattet auch weitere Folgerungen über die Wurzeln der orthogonalen Polynome zu ziehen. Aus dem asymptotischen Ausdruck von $P_n(x)$ folgt nämlich durch logarithmische Differentiation

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{P_n'(x)}{P_n(x)} - n\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}.$$

D. h.

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x-x_\nu^{(n)}} - n\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}.$$

Es sei nun $F(x)$ eine beliebige analytische Funktion, welche sich im ab-

---

[52]) Die in § 6 gegebene Darstellung von $\gamma(x)$ gilt somit auch auf der Kurve C.

geschlossenen Innenbereich von C regulär verhält, dann folgt aus dieser Formel durch Multiplikation mit $F(x)$ und durch Integration

$$\lim_{n=\infty} \left(F(x_1^{(n)}) + F(x_2^{(n)}) + \dots + F(x_n^{(n)}) - na\right) = \frac{b}{2},$$

wo der Kürze halber

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} F(\xi)\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}\,d\xi, \qquad b = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} F(\xi)\frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)}\,d\xi$$

gesetzt wird. Die Integration bezieht sich auf ein Kreisbild C_R, wo $R-1$ eine genügend kleine positive Größe ist. Dann folgt aber nach dem Cauchyschen Integralsatze, daß

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} F(\xi)\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}\,d\xi, \qquad b = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} F(\xi)\frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)}\,d\xi$$

ist.

Man hat insbesondere

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} F(\varphi(z))\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi(e^{i\Theta}))\,d\theta,$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x_1^{(n)}) + F(x_2^{(n)}) + \dots + F(x_n^{(n)})}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi(e^{i\Theta}))\,d\theta.$$

§ 14.

Anwendung auf Interpolation.

47. Satz XV. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C. Es seien, wie oben, die Wurzeln der zu C gehörigen orthogonalen Polynome*

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \dots,\ x_n^{(n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ich bilde die Interpolationspolynome

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \dots,\ Q_{n-1}(x),\ \dots,$$

definiert durch die Forderung

$$Q_{n-1}(x_\nu^{(n)}) = F(x_\nu^{(n)}) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, 3, \dots)$$ [53].

[53]) $F(x)$ ist offenbar regulär in einem Kreisbilde C_R, wo $R-1$ eine genügend kleine positive Zahl ist. Die Wurzeln von $P_n(x)$ liegen dann, von einem bestimmten n an, im Innern von C_R. Die Polynome $Q_{n-1}(x)$ sind natürlich bloß für diese Werte von n definiert.

Dann ist

$$\lim_{n=\infty} Q_n(x) = F(x)$$

(*und zwar gleichmäßig*) *im Innern des größten Kreisbildes* C_{R_0} $(R_0 > 1)$, ***welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von*** $F(x)$ ***enthält.***

Es sei nämlich $1 < R < R_0$, dann ist, wenn x im Innern von C_R liegt, für genügend große n

$$Q_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\left(1 - \frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\right) d\xi \text{ [54]},$$

also

$$F(x) - Q_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)} d\xi,$$

d. h.

$$|F(x) - Q_{n-1}(x)| < \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \left|\frac{F(\xi)}{\xi - x}\right| \left|\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\right| d\sigma.$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\right| \frac{R^n}{|\psi(x)|^n} = \left|\frac{\psi'(x)}{\psi'(\xi)}\right|^{\frac{1}{2}},$$

so daß

$$\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)} = O(\vartheta^n),$$

wenn x im Innern und ξ auf C_R liegt; hier hat man $0 < \vartheta < 1$, und ϑ ist von n und ξ unabhängig. Hieraus folgt

$$F(x) - Q_{n-1}(x) = O(\vartheta^n),$$

womit Satz XV bewiesen ist. Auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz läßt sich leicht bestätigen.

Dieser Satz liefert eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Gaußschen Interpolation, bei welcher die Interpolationsstellen die Wurzeln der Legendreschen Polynome sind. Die liegen alle im Intervalle $(-1, 1)$. Die Kreisbilder sind dann homofokale Ellipsen mit den Brennpunkten $-1, 1$.

---

[54]) Vgl. die Fußnote [51]).

(Eingegangen am 9. Februar 1920.)