

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

Dr. Arnold Berliner und Prof. Dr. August Pütter

Zweiter Jahrgang.

6. März 1914.

Heft 10.

Über die Vorzüge der Vektorrechnung¹⁾.

Von Dr. P. P. Ewald, München.

Die Vektorrechnung verdankt ihre allgemeine Einführung und Anerkennung dem in allen Zweigen der exakten Naturwissenschaften neu erwachten Bestreben nach einer formal einfachen, durchsichtigen und handgreiflichen Darstellungsweise. Sie wird *nicht* deshalb bevorzugt, weil sich mit ihrer Hilfe mathematische Wahrheiten finden ließen, die sonst aus der Tiefe der Erkenntnis nicht zu schürfen wären, sondern ihre Bedeutung ist im Gegenteil im Formalen erschöpft. Sie ist nichts als eine Kurzschrift der alten mathematischen Gleichungen, soweit sie von räumlichen Verhältnissen handeln. Es besteht ein anderes Verhältnis zwischen Vektorrechnung und der alten Art (die ich Komponentenrechnung nennen will), als zwischen projektiver (oder synthetischer) und analytischer Geometrie. Zwischen diesen herrscht ein viel größerer Unterschied: der ganze Unterschied des geometrischen Denkens vom algebraischen. Die Vektorrechnung hingegen ist nichts als eine abgekürzte Niederschrift *der gleichen* Gedankengänge, die beim Komponentenrechnen gebraucht werden; es werden also keine verschiedenen menschlichen Fähigkeiten benutzt, wie im Fall der zwei Arten, Geometrie zu treiben.

Daher kommt es auch, daß die Vektorrechnung keine wichtigen Sätze selbständig hervorgebracht hat. Die großen Sätze waren der Komponentenrechnung längst bekannt und tragen ihre Namen nach *Gauß*, *Green* und *Stokes*, Forschern, denen das formale Umgehen mit Vektoren unbekannt war.

Trotzdem birgt die Vektorrechnung ungeheure Vorteile, eben jene Erleichterungen bei der Arbeit, die ein zweckmäßig eingeführtes Zeichensystem mit sich bringt. Sie erlaubt die ersauten Zusammenhänge direkt in Formeln umzusetzen und so der Macht eines fertig bestehenden Systems der Verarbeitung zu unterwerfen. Sie erleichtert also einen der schwierigsten Vorgänge bei mathematischen Untersuchungen: den Übergang vom Begriff, der plötzlich in räumlicher Durchsichtigkeit klar wird, zur ersten Gleichung, die das formal weiter zu behandelnde Produkt dieser Erkenntnis ist.

Ein analoger Vorgang dürfte die Konzeption

¹⁾ Die Naturwissenschaften haben zwar die Berichterstattung über die reine Mathematik nicht in ihr Programm aufgenommen, wohl aber die Berichterstattung über die Fortschritte in der mathematischen Behandlung der Naturwissenschaften und der Technik.

Die Schriftleitung.

eines Akkords beim Komponisten sein. Auch ihm schwebt plötzlich ein dem Wesen nach einheitlicher Eindruck vor — und um ihn niederzuschreiben, muß er ihn auflösen und in Bestandteile zerlegen. Die Vektorrechnung der Musik würde einen Akkord durch *ein* Zeichen wiedergeben, und die Harmonielehre wäre der Inhalt des Formelsystems, das diese Zeichen untereinander verbindet.

Es hat sich herausgestellt, daß in der Vektorrechnung, wie auch sonst häufig, die rein mathematischen Bedürfnisse denen der mathematischen Physik parallel gehen und daß sich zweckmäßigerweise die Definitionen der Vektorrechnung den Begriffen der Physik eng anschließen. In welchem Maße dies der Fall ist, soll nachher an einigen Beispielen gezeigt werden. Hier sei noch etwas über den Inhalt des Formelsystems der Vektorrechnung gesagt:

Was ist zunächst ein Vektor? Die Antwort ist: ein Pfeil von bestimmter Länge. Man begegnet in der Physik zwei Arten von Größen: die einen sind durch eine Maßzahl völlig bestimmt, die anderen bedürfen zur vollen Beschreibung außer der Maßzahl die Angabe einer Richtung. Die ersten heißen *Skalare*, die zweiten *Vektoren*. Skalare sind z. B.: Masse, Volumen, Wärmemenge; Vektoren sind Kraft, Geschwindigkeit, Impuls, elektrische Feldstärke. Das geometrische Bild eines Vektors ist ein Pfeil von bestimmter Länge und Richtung, und da die Vektorformeln allein die geometrischen Eigenschaften der Vektoren aussagen, einerlei welche physikalische Größe unter dem Pfeil verstanden wird, so ist die obige Erklärung: Vektoren sind Pfeile, wohl erlaubt.

Die Vektorrechnung oder besser *Vektoralgebra* behandelt die Beziehungen einzelner Vektoren. Sie lehrt die Addition und Multiplikation und bildet die Grundlage der *Vektoranalysis*, in welcher die Methoden der Differential- und Integralrechnung auf Vektorfelder angewandt werden. Unter einem *Vektorfeld* ist dabei ein Raumteil verstanden, wo in jedem Punkt ein gewisser Vektor existiert. Man stelle sich strömendes Wasser vor und denke in jedem Punkt die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Wassers als Pfeil aufgetragen, so hat man ein Vektorfeld vor sich. Oder man betrachte ein elektrisches Feld und trage an jedem Punkte den nach Größe und Richtung bestimmten Pfeil der elektrischen Kraft \mathbf{E} ein. Es ist einleuchtend, daß solche Vektorfelder gewisse rein geometrische Eigenschaften gemeinsam haben — und diese bilden den Inhalt des Formelsystems der Vektoranalysis.

1. Addition.

Bereits das Zeichen $+$ hat in der Vektorrechnung eine Bedeutung, die sich dem physikalischen Bedürfnis gänzlich anpaßt. Die (sog. geometrische) Addition geschieht nach der Parallelogrammregel, wie sie bei der Addition von Kräften, Geschwindigkeiten usw. geläufig ist.

Während die Addition zweier Skalare von der Größe 1 einen Skalar von der Größe 2 ergibt, (1 Calorie + 1 Calorie = 2 Calorien), hängt die Größe des Vektors $c = a + b$ ganz von dem Winkel zwischen a und b ab. Als Größe oder Betrag eines Vektors ist dabei seine Länge definiert — ohne Rücksicht auf seine Richtung. Der Betrag $|c|$ des Vektors c ist mithin eine skalare Größe.

Die Additionsregel erläutert deutlich das rein formale Wesen der Vektorrechnung, insofern, als sie auf die „Komponenten“ eines Vektors führt. Jeder Vektor kann durch Addition aus 3 Vektoren von beliebiger¹⁾ Richtung aufgebaut werden,

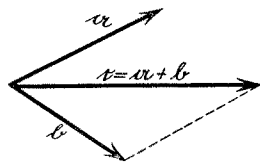


Fig. 1.

welche die „Komponenten des Vektors längs diesen Richtungen“ genannt werden. Im besonderen können die drei Richtungen mit den Achsen eines Koordinatensystems (xyz) zusammenfallen, und man kann alle in einer Untersuchung vorkommenden Vektoren in ihre Komponenten längs (x, y, z) auflösen. Statt mit einem Vektor a rechnet man dann mit drei ihm völlig gleichwertigen Komponenten a_x, a_y, a_z , und dies ist die alte Methode, die „Komponentenrechnung“.

Die Nebeneinanderstellung von Vektor- und Komponentenschreibweise geschieht in folgender symbolischen Gleichheit:

$$a = (a_x, a_y, a_z)$$

welche sagt, daß die drei Komponenten, durch welche in der alten Schreibweise der Vektor beschrieben wird, in der neuen Bezeichnung durch den Buchstaben a zusammengefaßt sind. Alle Überlegungen der Vektorrechnung sind durch die dreifache Anzahl von Gleichungen zwischen Komponenten ebenfalls zu führen, und die Vektorrechnung zeitigt keine ihr eigentümlichen Resultate.

II. Multiplikation.

Es werden zwei Weisen definiert, um zwei Vektoren zu einem Produkt zu vereinigen. Die beiden Operationen, welche Multiplikation genannt werden, stehen ebenfalls im engsten Zusammenhang mit physikalischen Größen. Das Produkt der Vektoren a und b hängt nicht nur von den Längen

¹⁾ Einschränkung: die 3 Richtungen dürfen nicht in einer Ebene liegen.

der Vektoren ab, sondern auch von ihrer gegenseitigen Lage, d. h. dem Winkel ϑ , den sie einschließen.

A. Das skalare Produkt. Besondere Bedeutung besitzt in der Physik das Produkt der Länge eines Vektors in die Länge derjenigen Komponente eines zweiten Vektors, welche in die Richtung des ersten fällt. Sei z. B. der erste Vektor der zurückgelegte Weg bei einer geradlinigen Bewegung, der zweite Vektor eine Kraft, welche an dem sich bewegenden Körper angreift (Vektoren s und \mathfrak{F}). Dann ist die *Arbeit*, welche von der Kraft bei der Bewegung geleistet wurde, gleich dem Produkte von $|s|$ (Länge oder Betrag von s) mit der Komponente von \mathfrak{F} , welche in die Richtung von s fällt, und deren Länge $|\mathfrak{F}| \cos \vartheta$ ist.

Oder es sei u die Geschwindigkeit des Körpers, so ist

$$|u| \cdot |\mathfrak{F}| \cdot \cos \vartheta$$

die *Leistung* der Kraft.

Hier sind aus den zwei Vektoren \mathfrak{F} und s resp. u durch Bildung des Betrages zwei Skalare hergestellt worden, die nach der gewöhnlichen Art multipliziert werden können. Es entsteht ein Ausdruck, der das Produkt dieser Vektoren genannt werden muß. Da die Arbeit, Leistung, Energie und andere analog zu bildende Größen Skalare sind, so wird allgemein dem Produkt

$$(a \cdot b) = |a| \cdot |b| \cos (a, b)$$

keine Richtung beigelegt, und es wird „skalares Produkt von a und b “ genannt (Zeichen: runde Klammern).

Ungleich dem Produkt $a \cdot b$ von Skalaren verschwindet das „skalare Produkt“ $(a \cdot b)$ nicht nur, wenn der Betrag eines der Glieder Null ist, sondern auch dann, wenn die Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Diese Tatsache kann oft mit Vorteil

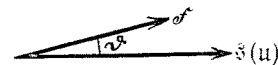


Fig. 2.

dazu benutzt werden, um die *Bedingung* auszudrücken, daß zwei Richtungen senkrecht zueinander sind. Zu dem Zweck versteht man unter a und b Einheitsvektoren, d. h. Vektoren von der Länge 1, welche die betreffenden Richtungen haben, und schreibt nun die Bedingung:

$$(a \cdot b) = 0. \quad (1)$$

Sind andererseits a und b einander parallel, so ist $(a \cdot b) = |a| \cdot |b|$, d. h. gleich dem Produkt der Maßzahlen.

Bei der skalaren Multiplikation von Vektoren gilt das distributive Gesetz: $((a + b) \cdot c) = (a \cdot c) + (b \cdot c)$. Dies ist sofort ersichtlich, weil die Komponente längs c des Vektors $(a + b)$ gleich der Summe der Komponenten von a und von b ist (vgl. Fig. 3). Unter Benutzung dieser Tatsache läßt sich die Komponentenschreib-

weise des skalaren Produktes erhalten. Zu dem Zweck stelle man sich \mathfrak{a} und \mathfrak{b} aus den zueinander senkrechten Vektoren (Komponenten) a_x, a_y, a_z und b_x, b_y, b_z aufgebaut vor; es ist also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z$, wo das Zeichen $+$ die geometrische Addition bedeutet und wo a_x, \dots, b_z für den Augenblick *Vektoren* von der Richtung x, y, z sein sollen. Man hat nach dem obigen Satz

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) &= (a_x + a_y + a_z) (b_x + b_y + b_z) \\ &= (a_x b_x) + (a_y b_y) + (a_z b_z) + (a_x b_y) \\ &\quad + (a_x b_z) + (a_y b_x) + (a_y b_z) + (a_z b_x) + (a_z b_y). \end{aligned}$$

Die 6 letzten skalaren Produkte sind Null, weil die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, während in den ersten 3 Produkten die Vektoren parallel sind und daher nach der obigen Bemerkung das skalare Produkt gleich dem Produkt der Längen a_x, \dots ist. Versteht man jetzt (wie gewöhnlich) unter a_x, \dots, b_z die *Längen* der Komponenten von \mathfrak{a} und \mathfrak{b} (also Skalare), so ist

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \dots \quad (2)$$

Dies ist die Darstellung des skalaren Produktes durch die Komponenten der Vektoren.

Ein einfaches Beispiel für die Art, wie die gewöhnlichen Formeln der analytischen Geometrie mit den Vektorformeln zusammenhängen,

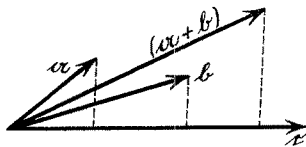


Fig. 3.

bildet die fundamentale Formel, welche das Senkrechtstehen zweier Richtungen (α, β, γ) und $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ausdrückt:

$$\cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \cos \gamma \cos \gamma_0 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

Kennzeichnet man nämlich die erste Richtung durch den Einheitsvektor \mathfrak{a} , so sind dessen Komponenten gerade

$$a_x = \cos \alpha, \quad a_y = \cos \beta, \quad a_z = \cos \gamma$$

und ähnlich sind die Komponenten des Einheitsvektors \mathfrak{b} , der die zweite Richtung festlegt: $\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0$. Die Gleichung (3) der analytischen Geometrie ist also nichts anderes, als Gleichung (1), in welche vermittels (2) die Komponenten der Einheitsvektoren eingeführt sind.

Das skalare Produkt ist das typische Beispiel für die Unmittelbarkeit der Darstellung in der Vektorschreibweise. Wie schwierig ist jedesmal der Übergang von der Operation: „man projiziere den Vektor \mathfrak{b} auf \mathfrak{a} und multipliziere die Länge von \mathfrak{a} mit der Länge der Projektion“ bis zur Darstellung dieses Vorganges durch die Komponenten von \mathfrak{a} und \mathfrak{b} , d. h. durch die rechte Seite der Gleichung (2)! Die Vektorrechnung führt für die oft angewandte Operation ein besonderes Zeichen ein (die runde Klammer), so daß sich die

anschauliche Handlung sofort niederschreiben läßt, und die obige Formel sorgt automatisch für die Umsetzung dieses Zeichens in die alte Schreibweise, wenn sie gewünscht wird.

B. *Das Vektorprodukt.* Bedeutet \mathfrak{i} einen elektrischen Strom (der ja auch Richtung und Intensität hat und somit ein Vektor ist), und \mathfrak{S} eine magnetische Kraft, welche ihn beeinflusst, so erfährt der Strom nach dem Biot-Savartschen Gesetz eine ablenkende Kraft \mathfrak{F} , die der Größe von \mathfrak{i} , der Größe von \mathfrak{S} und dem Sinus des von \mathfrak{i} und \mathfrak{S} eingeschlossenen Winkels ϑ proportional ist und sowohl auf \mathfrak{i} wie auf \mathfrak{S} senkrecht steht. Die Kraft ist also durch einen Pfeil darzustellen, der $\perp \mathfrak{i}, \perp \mathfrak{S}$ steht und dessen Länge

$$|\mathfrak{i}| \cdot |\mathfrak{S}| \cdot \sin \vartheta$$

ist. $\mathfrak{i}, \mathfrak{S}$ und der Sinn des Pfeiles müssen dabei ein Rechtssystem bilden¹⁾.

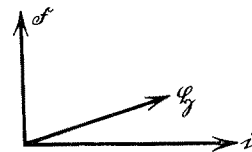


Fig. 4.

Diese Zusammenstellung von \mathfrak{i} und \mathfrak{S} ist eine zweite Art von Produktbildung zweier Vektoren, für die in der Vektorrechnung ein besonderes Zeichen (die eckige Klammer) eingeführt ist. Das Produkt $[\mathfrak{i} \mathfrak{S}]$ selbst ist ein neuer Vektor, genannt Vektorprodukt.

Außer bei den Einwirkungen magnetischer Kräfte auf elektrische Ladungen tritt das Vektorprodukt in der Kreiselltheorie auf, welche ja manche Analogie zur Elektrodynamik hat. Überhaupt drücken sich Momente als Vektorprodukt aus: die Kraft \mathfrak{F} greife an einem Punkte an, der vom Drehpunkt aus am Ende des Vektors \mathfrak{r} liege. (\mathfrak{r} ist also der gerichtete Abstand vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft.) Dann ist das Moment der Kraft um den Drehpunkt der Größe nach gleich dem Betrag von

$$[\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{r}].$$

Es wird auch am übersichtlichsten durch den auf der Drehebene senkrecht stehenden Pfeil $[\mathfrak{F} \mathfrak{r}]$ dargestellt. Addition von Momenten geschieht dann durch geometrische Addition der Pfeile.

Das Vektorprodukt ist nicht eigentlich wie die bisher betrachteten Vektoren eine gerichtete Länge, sondern ein Flächenstück von bestimmter Lage und mit bestimmtem Umlaufssinn. Sind

¹⁾ Um zu entscheiden, daß die Vektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{S}$ und \mathfrak{F} ein Rechtssystem bilden, bewege man den Vektor \mathfrak{i} so wie den Griff eines Korkziehers, der in den Kork geschraubt wird. Bei dieser Bewegung muß 1) \mathfrak{i} auf dem *kurzesten* Wege in die Richtung von \mathfrak{S} gelangen und 2) \mathfrak{i} *im Sinne* des Pfeiles \mathfrak{F} sich verschieben. Fig. 4 zeigt das Rechtssystem $\mathfrak{i}, \mathfrak{S}, \mathfrak{F}$. Ein Linkssystem erhält man daraus durch Vertauschung von \mathfrak{i} und \mathfrak{S} oder durch Umkehrung des Pfeiles \mathfrak{F} .

\mathbf{a} und \mathbf{b} die zu multiplizierenden Vektoren, so ist nämlich das Vektorprodukt am unmittelbarsten zu definieren als das aus \mathbf{a} und \mathbf{b} zu bildende Parallelogramm, dessen Inhalt $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \vartheta$ ist, und welchem der Umlaufssinn: erst \mathbf{a} dann \mathbf{b} , zuerteilt ist. Dieses Flächenstück wird nach *Graßmanns* Vorgang durch den Pfeil *ergänzt und dargestellt*, der senkrecht auf ihm steht, eine Länge hat, die dem Flächeninhalte proportional ist und mit den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem bildet (Fig. 5). Erst der Ergänzung ist es zu danken, daß das Vektorprodukt sich unmittelbar in das System der Vektoralgebra einfügt. Immerhin bleibt dort, wo ein Wechsel von einem Rechts- in ein Links-Koordinatensystem stattfindet, die Wesensverschiedenheit des Vektorproduktes vom gewöhnlichen Vektor bemerklich.

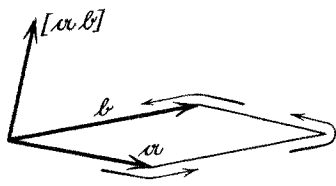


Fig. 5.

Wie aus der Definition des Rechtssystems ersichtlich, gilt

$$[\mathbf{a} \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \mathbf{a}];$$

das commutative Gesetz der Multiplikation ist aufgegeben.

Hingegen bleibt das assoziative Gesetz bestehen und gestattet, das Vektorprodukt durch die Komponenten auszudrücken, wie es oben beim skalaren Produkt geschah. Ersetzt man nämlich die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} durch die Summe aus 3 nach den Achsen gerichteten Vektoren $a_x + a_y + a_z$, $b_x + b_y + b_z$ (vergl. oben), so zerfällt das Produkt in 9 Einzelprodukte:

$$\begin{aligned} &[(a_x + a_y + a_z) \cdot (b_x + b_y + b_z)] \\ &= [a_x b_x] + [a_x b_y] + [a_x b_z] \\ &+ [a_y b_x] + [a_y b_y] + [a_y b_z] \\ &+ [a_z b_x] + [a_z b_y] + [a_z b_z] \end{aligned}$$

Von diesen sind drei Null, weil die Vektoren parallel sind. Die weiteren 6 zerfallen in Paare von gleicher Richtung des Produktpfeils. Z. B. haben die Produkte $[a_x b_y]$ und $[a_y b_x]$ die Richtung z , da die Vektoren die x - oder y -Richtung besitzen. Der erste Vektor $[a_x b_y]$ ist — bei positiven Vektoren a_x und b_y — längs der positiven z -Achse eines rechtshändigen Koordinatensystems gerichtet, der zweite $[a_y b_x]$ wegen der Reihenfolge nach der negativen z -Achse (a_y , b_x positiv!). Da ferner das Vektorprodukt zweier aufeinander senkrechter Vektoren gleich dem Produkt der Beträge ist, so ist der gesamte Anteil von $[\mathbf{a} \mathbf{b}]$, der längs $+z$ gerichtet ist,

$$a_x b_y - a_y b_x,$$

wenn unter a_x, \dots jetzt wieder die (skalaren)

Längen der Komponenten von \mathbf{a} und \mathbf{b} verstanden werden.

Man erhält als die drei Komponenten des Vektorproduktes

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \mathbf{b}]_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ [\mathbf{a} \mathbf{b}]_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ [\mathbf{a} \mathbf{b}]_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned}$$

Die rechtsstehenden Größen würde man auch erhalten haben, wenn man das Parallelogramm $[\mathbf{a} \mathbf{b}]$ nacheinander auf die drei Koordinatenebenen projiziert hätte. Die x -Komponente $[\mathbf{a} \mathbf{b}]_x$ ist auch aufzufassen als die „Ergänzung“ zu der Projektion des Parallelogramms auf die zu x senkrechte y - z -Ebene.

Bei der Komponentendarstellung des Vektorproduktes zeigt sich in noch höherem Maße als beim skalaren Produkt, wie schwer der physikalisch wichtige Begriff sich in der alten Schreibweise ausdrücken läßt, und welche Denkersparnis das Zeichen $[\mathbf{a} \mathbf{b}]$ in sich birgt.

III. Die Differentiation von Vektoren.

In einem Vektorfelde läßt sich der Vektor, der zu einem gewissen Punkte gehört, mit dem Vektor vergleichen, der zu einem benachbarten Punkte gehört. Wenn beide Vektoren verschieden sind, so ist ihre Differenz wieder ein Vektor, nämlich jener kleine Pfeil, der zu dem zweiten Vektor addiert werden muß, um den ersten Pfeil zu ergeben. Nennen wir die beiden Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 und die Entfernung der Punkte s , so ist der Differentialquotient des Vektors \mathbf{v}

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{s}$$

genau wie bei einer skalaren räumlichen Funktion v der Differentialquotient gebildet wird:

$$\frac{dv}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v_1 - v_2}{s}$$

In beiden Fällen ist der Differentialquotient natürlich noch davon abhängig, in welcher Richtung das Stück s aufgetragen worden ist. Es kann sich hier nicht darum handeln, die Regeln des Differenzierens von Vektoren systematisch auseinanderzusetzen, sondern es soll nur gezeigt werden, welcher Art die Begriffsbildung überhaupt ist, und daß der Differentialquotient einer Vektorfunktion (Vektorfeld) selbst wieder ein Vektor ist, der durch den Vergleich von Nachbarvektoren entsteht.

Es möge nun wieder an einigen Differentialoperationen gezeigt werden, welche konkreten Bedeutungen den Abkürzungen der Vektoranalysis innewohnen.

IV. Die Divergenz: *div*.

Eine inkompressible Flüssigkeit, wie Wasser, ströme in ganz beliebiger Weise in einem Gefäß, welches weder Zufluß noch Abfluß habe. Dann strömt in jedes kleine Volumen, das wir für die Betrachtung herausgreifen mögen, ebensoviel

Wasser ein wie aus. Wäre es anders, so würde dieser Raumteil mit Wasser überladen resp. davon entblößt werden. Trägt man die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Wassers als Vektorfeld auf, so äußert sich natürlich diese Tatsache als geometrische Eigentümlichkeit des Vektorfeldes. — Andererseits möge in dem Gefäße nun ein Zufluß angebracht werden. Dann ist in einem Raumteil, welcher die Einflußöffnung umschließt, diese Eigentümlichkeit verloren gegangen: die Öffnung wird zur scheinbaren Quelle, aus der Wasser ins Innere des Gefäßes fließt. Die Ergiebigkeit der Quelle ist aus der Geschwindigkeitsverteilung in ihrer Umgebung zu ersehen; $\text{div } \mathbf{v}$ mißt die Ergiebigkeit. Die Definition von $\text{div } \mathbf{v}$ ist so: man berechne den gesamten Einfluß $E \cdot dS$ in das Volumelement dS , ferner den gesamten Ausfluß $A \cdot dS$, so ist

$$\text{div } \mathbf{v} = A - E.$$

$\text{div } \mathbf{v}$ ist ein Skalar.

Der genannte Ein- und Ausfluß in dS läßt sich entweder als Oberflächenintegral über das Volumelement erhalten, oder als Differenz des Flusses durch gegenüberliegende Seiten des Volumelementes, d. h. mittels der Differentialquotienten des Geschwindigkeitsfeldes. Das Oberflächenintegral ist die unmittelbare Definition der Operation div , während die zweite Betrachtung ein Koordinatensystem erfordert und daher den Anschluß an die Komponentenrechnung mit sich bringt. Die Aussage, daß der Differentialausdruck gleich dem Oberflächenintegral ist, ist der Inhalt des *Gaußschen Satzes*.

Der Begriff der Divergenz ist in der ganzen Physik von größtem Nutzen. Handelt es sich z. B. um die elektrische Kraft \mathfrak{E} , so ist diese überall derart verteilt, daß $\text{div } \mathfrak{E} = 0$, mit Ausnahme derjenigen Stellen des Raumes, wo sich eine elektrische Ladung befindet. Allein aus den Ladungen treten nämlich die elektrischen Kraftlinien aus, wie die Stromlinien des Wassers aus der Quelle. Dies sagt die eine Maxwellsche Gleichung:

$$\text{div } \mathfrak{E} = \varrho, \quad (4)$$

wo ϱ gleich der Dichte der elektrischen Ladung ist. Die andere Gleichung:

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0 \quad (5)$$

lehrt, daß die magnetischen Kräfte \mathfrak{H} anders verteilt sind: es gibt keine isolierten Magnetpole, d. h. unkompenzierte magnetische Ladungen.

V. Die Rotation: rot .

Der Begriff der Rotation wird auch an der Strömung von Wasser am klarsten gemacht. Man denke sich nämlich kleine Stäbchen im Wasser schwimmend — dann sind zwei Arten von Bewegungen unterscheidbar: entweder die Stäbchen bleiben ihrer Anfangslage dauernd parallel, oder sie verändern ihre Orientierung im Laufe der Bewegung. Die „Rotation“ des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} , $\text{rot } \mathbf{v}$, ist die Winkelgeschwindigkeit

dieser Hölzchen und daher Null, wenn sie keine Drehung erfahren.

Bei der Drehung einer starren Scheibe nimmt die Verbindungslinie zweier benachbarten Teilchen alle Lagen, deren sie fähig ist, im Laufe einer ganzen Umdrehung an. Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes einer „starrten Drehung“ ist daher die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung und in dem ganzen Geschwindigkeitsfeld konstant.

$\text{rot } \mathbf{v}$ ist ein *Differentialausdruck*, denn die Drehung eines Stäbchens hängt von dem *Unterschied* der Geschwindigkeiten an seinen Endpunkten ab. Wie $\text{div } \mathbf{v}$, so läßt sich aber auch $\text{rot } \mathbf{v}$ als *Integral* schreiben, denn die Drehung des Stäbchens ist der Mittelwert der Tangentialkomponente von \mathbf{v} längs der Oberfläche des Hölzchens. Es gibt also wieder zwei Arten, $\text{rot } \mathbf{v}$ auszudrücken: durch Differentialquotienten der Vektorfunktion \mathbf{v} , wobei ein Koordinatensystem zugrunde gelegt wird; oder als Integral, wobei das Koordinatensystem überflüssig ist. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert den *Stokesschen Satz*.

Entsprechend dem Charakter einer Winkelgeschwindigkeit ist die Rotation eine Fläche von bestimmter Größe mit Umlaufsinne; diese wird wie beim Vektorprodukt durch die „Ergänzung“, den senkrecht stehenden Pfeil, bequem dargestellt.

In der Mechanik ist die „Rotation“ nützlich, sobald es sich um Drehungen handelt, also in der Kreiseltheorie usw. In der Hydrodynamik wird die Rotation mit den Wirbeln identifiziert: $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ bedeutet, daß keine Wirbel bei einer Flüssigkeitsbewegung vorhanden sind. In der elektromagnetischen Theorie zieht eine Wirbelung der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} die Entstehung einer magnetischen Kraft nach sich:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathfrak{E} \quad \left(\begin{array}{l} c = \text{Lichtgeschwindigkeit} \\ t = \text{Zeit} \end{array} \right) \quad (6)$$

und umgekehrt erzeugt eine wirbelartige Verteilung der magnetischen Kräfte ein elektrisches Feld:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H} \quad (7)$$

Die vier Gleichungen (4, 5, 6, 7) bilden zusammen das *System der Maxwellschen Gleichungen in der Schreibweise der Vektoren, und die Grundlage der gesamten Elektrodynamik und Optik*. In der Komponentenschreibweise treten an Stelle der beiden letzten Gleichungen 6 Gleichungen zwischen Komponenten.

* * *

Mit der Einführung dieser und weiterer Begriffe ist der Inhalt der Vektorrechnung natürlich nicht erschöpft, vielmehr setzt hier der Anfang eines großartigen formalen Systems ein. Es gilt ja, die Zusammenhänge zwischen den eingeführten Begriffen herauszuarbeiten und kurz zusammenzufassen, damit eine Überlegung, die bereits bis zur ersten Formel gediehen ist, nach über-

sichtlichen Regeln und möglichst automatisch weitergeführt werden kann. Zu dem Zweck gibt es ein „Einmaleins“, aus welchem beispielshalber zu sehen ist, daß

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b} &= 0, \\ \operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] &= (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b})\end{aligned}$$

ist usw. Wie an diesen Beispielen ersichtlich ist, handelt es sich meist um wiederholte Anwendung von Vektoroperationen. Selbst bei diesem Formelsystem — das als solches gewiß „formal“ ist, d. h. die direkte Vorstellung auszuschalten gestattet — bleibt der Zusammenhang mit der Anschauung in viel höherem Grade gewahrt als bei dem entsprechenden System in der Komponentenschreibweise. Beim Hantieren der Pfeile nach den Methoden der Vektorrechnung packt man diese selbst an; in der Komponentenrechnung muß man die Schattenrisse der Pfeile bewegen.

Der Vektorrechnung erschließen sich fortwährend neue Gebiete. Zuerst war es die Elektrodynamik, welche in *Maxwells* „Treatise on Electricity and Magnetism“ durch Vektoren ausgedrückt wurde. Freilich geschah dies in einer Schreibweise, die der *Hamiltonschen* Quaternionenrechnung entnommen war, einer Vorläuferin der heutigen Vektorrechnung. Immerhin ging von hier der Anstoß zur Entwicklung der Disziplin aus. Man erkannte den Nutzen für Mechanik, Hydrodynamik und andere Teile der Physik. Ferner wurde der große erzieherische Wert offenbar, der durch die Gewöhnung an konkretes Denken der Vektorrechnung innewohnt.

Dieser Vorteil brachte die Anwendung auf rein mathematische Gebiete zustande. Die sphärische Trigonometrie wird durch Einführung der Vektoren sehr übersichtlich und viele umständliche Formeln werden als bloße Anwendung wohlbekannter Vektorformeln dem Verständnis und dem Gedächtnis vereinfacht. Das gleiche gilt in der analytischen Geometrie und in der Theorie der Kurven und Flächen (Differentialgeometrie). In einen Zweig der angewandten Physik, der aufs engste mit der Theorie der Flächen zusammenhängt, in die geometrische Optik, wurde kürzlich von *A. Sommerfeld* und *J. Runge* die Vektorrechnung eingeführt.

Einstein-Minkowskis Relativtheorie forderte die Erweiterung des in der Elektrodynamik gebrauchten Vektorensystems. Nachdem in dieser Theorie die volle Symmetrie zwischen den 3 Raumkoordinaten und der Zeitkoordinate erreicht war, mußten die Vektoren ebenfalls die Gleichberechtigung aller 4 Koordinaten zeigen. Dies führte auf die vierdimensionale Vektorrechnung, die zuerst von *A. Sommerfeld* aufgestellt und angewandt wurde. Die Verhältnisse bei den 4-dimensionalen Vektoren sind naturgemäß ähnlich, aber erheblich schwieriger zu übersehen, wie in 3 Dimensionen. Die Beschäftigung mit der 4- und höherdimensionalen Vektorrechnung hat eine bedeutende Vertiefung und methodische Erweite-

rung unseres Wissens über Vektoren mit sich gebracht.

Es muß erwähnt werden, daß amerikanische Forscher, namentlich *Lewis* und *Wilson*, im Anschluß an Arbeiten ihres großen Landsmannes *Willard Gibbs* die Vektorrechnung in etwas anderem Sinne in das Gebiet des Vierdimensionalen hinein verfolgt haben, indem sie einer Interpretation der Relativtheorie in nicht-euklidischen Räumen nachgingen.

Die letzte Erweiterung sehr allgemeiner Natur hat im Anschluß an *A. Einsteins* neue Gravitationstheorie *M. Großmann* in Zürich angefangen. Es handelt sich hierbei um die Aufstellung der Rechenregeln für ganze Systeme von Vektoren (Tensoren) im mehrdimensionalen Raum.

Diese Erweiterungen benutzen zum Teil noch die Bezeichnungsweise der gewöhnlichen Vektorrechnung und schließen sich ihr in Definitionen und Forschungsgang mehr oder weniger eng an. Sie sind auch eine große Hilfe für das Eindringen in die Gebiete, für welche sie bestimmt sind. Aber sie haben natürlich nicht das allgemeine Interesse der gewöhnlichen Vektorrechnung und entbehren vor allem ihres Hauptvorteils, der Anschaulichkeit. In den mehrdimensionalen und nicht-euklidischen Räumen ist das schauende Erkennen verschlossen und Algebra und Analysis sind die geeigneten Führer. Daher sind in den Erweiterungen die Vektoren wieder zu schattenhaften Gebilden herabgesunken, die man nur durch ihre Projektionen erkennen kann. Aber diesmal liegt der Mangel nicht an einer ungeeigneten Darstellungsweise, sondern an der Beschränktheit des menschlichen Geistes selber.

Die Davissche Beschreibung der Landformen.

Von Prof. Dr. A. Steinhauff, Marburg a. L.

Der Name von *Davis* fand sich zwar schon früher in den deutschen Handbüchern der physischen Erdkunde, aber eingehendere Aufmerksamkeit erregte seine wissenschaftliche Leistung erst, als er im Wintersemester 1908—1909 als Austauschprofessor Vorlesungen an der Berliner Universität hielt. Durch Veröffentlichung zweier wissenschaftlicher Handbücher, der „*Physiogeographie*“ und der „*Erklärenden Beschreibung der Landformen*“, welches Buch den Inhalt der Berliner Vorlesungen bringt, ist nun jeder deutsche Geograph und Naturwissenschaftler mühelos in der Lage, die Besonderheit eines amerikanischen Vertreters der erdkundlichen Wissenschaft kennen zu lernen. Während sonst die Austauschprofessoren meist amerikanische Fragen aus Geschichte, Verfassung, Recht und Literatur behandeln, liegt das Amerikanische bei *Davis* nicht im Stoff, sondern in der Form. Es läßt sich nun