

3. *Untersuchungen über den Schalldruck; von Fritz Küstner.*¹⁾

§ 1.

Die Existenz des Schalldruckes ist von Lord Rayleigh²⁾ zuerst bewiesen worden und hat hauptsächlich Interesse erregt wegen der Analogie zu dem von der elektromagnetischen Strahlung ausgeübten Strahlungsdrucke.

Kürzlich hat nun Hr. Waetzmänn³⁾ gefunden, daß neben dem konstanten Überdruck, der bei der Reflexion von Wellen an festen Wänden auftritt, auch noch neue Töne entstehen, deren Perioden in den Perioden der auffallenden Wellen nicht enthalten sind. Hr. Waetzmänn erläutert speziell seinen Gedanken an einem besonders einfachen und experimentell wichtigen Falle, daß nämlich auf eine reflektierende Wand eine typische Schwebungswelle auftritt, die aus sich zwei Tonwellen von gleichen Amplituden und sehr wenig verschiedenen Wellenlängen zusammensetzt, wobei das Verhältnis der Schwingungszahlen der Primärtöne ein solches sein soll, daß ihr größter gemeinschaftlicher Teiler gleich der Schwebungszahl pro Sekunde ist. Nach der Meinung des Hrn. Waetzmänn

1) Der Verfasser, der als Kriegsfreiwilliger ins Feld gezogen war, ist am 31. Januar 1916 einer im Felde erworbenen Infektion erlegen. In seinem Nachlasse fand sich der Inhalt der §§ 2—5 in Formeln fertig vor; den Inhalt des § 6 hatte er mir mündlich mitgeteilt. Ich habe bei der Darstellung lediglich ein etwas anderes Randwertproblem zugrunde gelegt, das dem Experiment mehr angepaßt ist, den sachlichen Inhalt aber in keiner Weise ändert, und den Inhalt des letzten Paragraphen rekonstruiert. Die Formulierung des im ersten Paragraphen wiedergegebenen Gedankenganges von Waetzmänn rührt von Hrn. Waetzmänn selbst her.

Cl. Schaefer.

2) Lord Rayleigh, Papers 5. p. 41 ff. u. 262 ff.

3) E. Waetzmänn, Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterländ. Kultur 1913, naturwissenschaftl. Sektion, p. 32 ff.; Verh. d. Deutschen Phys. Ges. 16. p. 424. 1914.

sei dann der Schalldruck im Maximum der Schwebungen größer als im Minimum, d. h. aber mit anderen Worten, daß neben dem konstanten Überdruck, dem Rayleighschen Schalldruck, in erster Linie noch ein Ton entsteht, dessen Periodenzahl gleich der Schwebungsanzahl ist, der Differenzton erster Ordnung.

Hr. Waetzmann weist auch darauf hin, daß Rayleigh den beschriebenen Effekt bei seiner Art der Berechnung des Schalldruckes nicht finden konnte, weil Rayleigh nur den Mittelwert der Druckschwankungen berechnet. Im Gegensatz zu Rayleigh müsse vielmehr der gesamte zeitliche Verlauf des Druckes berechnet werden.

Diese Berechnung durchzuführen und damit dem Waetzmannschen Gedanken die exakte Formulierung zu geben, war der Zweck dieser Arbeit.

§ 2.

Wir gehen von den unverkürzten hydrodynamischen Gleichungen aus (denn von diesen ist der Ausgangspunkt zu nehmen, weil der Schalldruck ein zeitlicher Mittelwert über den hydrodynamischen Druck ist), die wir etwa der Helmholtzschen Abhandlung über Luftschwingungen in Pfeifen mit offenen Enden¹⁾ entnehmen, wobei wir lediglich auf den Fall spezialisieren, daß alle Größen nur von x und t (nicht von y und z) abhängen. Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern wird direkt aus experimentellen Gründen nahegelegt. Wir haben also:

$$(1a) \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2),$$

$$(1b) \quad - \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (hu).$$

Darin bedeutet P die Potentialfunktion der äußeren Kräfte, p den hydrodynamischen Druck, h die Dichte, u die Geschwindigkeit parallel der x -Achse. Ferner setzen wir die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials voraus, so daß zu setzen ist:

$$(2) \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

1) H. Helmholtz, Wiss. Abhandl. 1. p. 303.

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(4) \quad -\frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Zu diesen Gleichungen muß nun noch für ein kompressibles Medium eine Beziehung zwischen p und h treten, für die wir der Einfachheit halber das Boylesche Gesetz (isothermer Fall)

$$(5) \quad p = a^2 \cdot h$$

annehmen; der adiabatische Fall läßt sich ganz analog behandeln.

Mit (5) werden nun (3) und (4):

$$(6) \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{a^2}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(7) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} = p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$(8) \quad P - a^2 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(9) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{p}{p_0} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \log \left(\frac{p}{p_0} \right).$$

Dabei bedeutet p_0 eine Konstante; setzt man aus (8) den Wert für p in die Gleichung (9) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[P - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ &+ \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[P - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

d. h. eine Gleichung, die lediglich die Funktion Φ enthält, und die ausgerechnet die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} &= a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

oder:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist nun Φ aus dieser Gleichung bestimmt, so kann mittels (8) der hydrodynamische Druck und aus diesem der „Schalldruck“ berechnet werden.

§ 3.

Im allgemeinen werden in der Akustik die Größen P und Φ nebst ihren Ableitungen als unendlich kleine Größen erster Ordnung angesehen, deren Produkte, Quadrate und noch höhere Potenzen vernachlässigt werden. Die Gleichungen (8) und (10) werden in diesem Falle:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$(12) \quad a^2 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = P - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

die sich in dem speziellen Falle, daß keine äußeren Kräfte wirken, auf die folgenden reduzieren:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

$$(14) \quad \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Auch wir wollen zunächst diese verkürzten Gleichungen benutzen und sehen, welche Folgerungen aus ihr für den Schalldruck zu ziehen sind.

Wir betrachten — im engen Anschluß an das Experiment (Kundtsche Staubfiguren) — folgenden Fall:

Ein Rohr von der Länge 1 cm liege mit seiner Achse parallel der x -Achse. Das Ende $x=1$ sei durch eine starre Wand verschlossen, so daß dort die Geschwindigkeit zu allen Zeiten Null sein muß; also:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=1} = \Phi'(1) = 0.$$

Das offene Ende $x=0$ wird durch einen dicht abschließenden Stempel verschlossen, der von außen in eine Schwingung

$A \cdot \sin nt$ versetzt werden kann; diese Verrückung zwingt er der Luft am Ende des Rohres auf, so daß dort die Geschwindigkeit $\Phi'(0) = A \cdot n \cdot \cos nt$ sein muß. Während also im ganzen Rohre die Gleichung (13) gilt, gelten an den Enden bzw. die beiden Randbedingungen:

$$(15) \quad \text{für } x = 0: \Phi'(0) = A \cdot n \cdot \cos nt,$$

$$(16) \quad \text{für } x = 1: \Phi'(1) = 0.$$

Eine partikuläre Lösung dieses Problems ist leicht zu gewinnen; man überzeugt sich sofort, daß der Ansatz

$$(17) \quad \Phi(x, t) = a \cdot A \cdot \sin \frac{n}{a} x \cdot \cos nt + C \cos \frac{n}{a} x \cdot \cos nt$$

sowohl der Gleichung (13), als auch der Randbedingung (15) genügt; wenn C geeignet gewählt wird, läßt sich auch (16) erfüllen. Man findet für C :

$$(18) \quad C = A \cdot a \cdot \frac{\cos(n/a)}{\sin(n/a)},$$

womit die Lösung (17) die Gestalt annimmt:

$$\Phi(x, t) = a \cdot A \sin \frac{nx}{a} \cdot \cos nt + a \cdot A \cdot \frac{\cos(n/a)}{\sin(n/a)} \cdot \cos \frac{nx}{a} \cdot \cos nt,$$

oder:

$$(19) \quad \Phi(x, t) = \frac{A \cdot a}{\sin(n/a)} \cdot \cos \frac{n}{a} (x - 1) \cdot \cos nt.$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von n , die nicht die Gleichung:

$$\sin \frac{n}{a} = 0$$

befriedigen, d. h. für alle Werte $n \neq \nu a \pi$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots \infty$). Würde n gleich einem solchen Werte, so würde die Amplitude der Schwingung unendlich, also die Lösung versagen. Dies liegt natürlich lediglich an der Vernachlässigung der Reibung, deren Einführung wir aber (es müßten die Differentialgleichungen für kompressible reibende Flüssigkeiten benutzt werden) zur Vermeidung von Komplikationen unterlassen wollen, zumal sachlich für unser Problem nichts gewonnen würde. Wir werden also im folgenden stets $n \neq \nu a \pi$ voraussetzen.

Da wir nach (19) $\Phi(x, t)$ im ganzen Rohre kennen, können wir auch den hydrodynamischen Druck berechnen, indem wir (14) anwenden; es ist also bei uns:

$$(20) \quad \log \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}},$$

oder, wenn wir die Exponentialfunktion entwickeln und, da nach Voraussetzung $\partial \Phi / \partial t$ unendlich klein ist, mit dem ersten Gliede abbrechen, so folgt:

$$(21) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\},$$

eine Gleichung, die die Lösung unseres Problems enthält, da der hydrodynamische Druck p durch (21) bis auf Größen erster Ordnung genau angegeben wird. Setzen wir nach (19) den Wert von $\partial \Phi / \partial t$ ein, so folgt:

$$(22) \quad p(x, t) = p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \sin nt.$$

Wir wollen den Druck für das feste Ende $x = 1$ berechnen. Dafür ergibt sich:

$$(23) \quad p(1, t) = p_0 + \frac{p_0 A n}{a \cdot \sin \frac{n}{a}} \cdot \sin nt,$$

und endlich wollen wir dessen Mittelwert für eine volle Periode bestimmen. So erhalten wir, da

$$\overline{p(1)} = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$$

ist:

$$(24) \quad \overline{p(1)} = p_0,$$

d. h. in dem mit Schallenergie erfüllten Rohre ist im Mittel kein höherer Druck vorhanden, also ohne Schwingungen existieren würde. Ein Schalldruck, d. h. eine Differenz zwischen $\overline{p(1)}$ und p_0 existiert also nicht, sofern die Rechnung konsequent nur Glieder erster Ordnung berücksichtigt.

§ 4.

Wir wollen indessen jetzt in Gleichung (20), die wir (21) nur bis zum ersten Gliede entwickelten, das quadratische Glied noch mitnehmen. Ob dies statthaft ist, soll später diskutiert werden. Statt (21) folgt also:

$$(21a) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2a^4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right\},$$

und wenn man $\partial \Phi / \partial t$ einsetzt:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \sin nt \\ &+ \frac{p_0}{2} \frac{A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \frac{n}{a}} \cdot \cos^2 \left[\frac{n(x-1)}{a} \right] \cdot \sin^2 nt, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn wir wieder auf die Stelle $x = 1$ spezialisieren (wo wir uns irgend eine Vorrichtung zur Messung von p angebracht denken können):

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} p(1) &= p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \sin nt \\ &+ \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} - \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos 2nt. \end{aligned} \right.$$

Bestimmen wir den Mittelwert durch Integration über eine Periode, so folgt dieses Mal:

$$(27) \quad \overline{p(1)} = p_0 + \frac{p_0 A^2 n^2}{4 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)};$$

also ergibt sich eine mittlere Druckerhöhung, der sogenannte Schalldruck:

$$(28) \quad \overline{p(1)} - p_0 = \frac{A^2 p_0 n^2}{4 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)},$$

oder, nach Gleichung (5), wenn die normale Dichte

$$h_0 = \frac{p_0}{a^2}$$

eingeführt wird:

$$(29) \quad \overline{p(1)} - p_0 = \frac{h_0 A^2 n^2}{4 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)}.$$

Dieser Wert ist aber, wie man sich leicht überzeugt, gleich der mittleren Energie pro Längeneinheit des Rohres, also genau der Wert, den Lord Rayleigh angibt. Wir wollen zunächst dieses Resultat in Verbindung setzen mit dem Auftreten von Kombinationstönen, um zu prüfen, inwieweit der Gedanke von Hrn. Waetzmann sich bewährt und inwieweit er ein neues Prinzip zur Erklärung der Kombinationstöne darstellt.

§ 5.

Zu diesem Zwecke knüpfen wir an den § 3 an, indem wir jetzt folgendes Randwertproblem behandeln:

Im ganzen Rohre gelte wieder die Gleichung:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

ferner für das Ende $x = 1$ die alte Gleichung (16):

$$(16) \quad \text{für } x = 1: \Phi'(1) = 0;$$

dagegen am Ende $x = 0$ die neue Bedingung:

$$(30) \quad \text{für } x = 0: \Phi'(0) = A \cdot n \cdot \cos nt + B \cdot m \cdot \cos mt,$$

d. h. wir leiten jetzt zwei Töne von den Frequenzen n und m in das Rohr hinein, damit die Gelegenheit zur Entstehung von Kombinationstönen gegeben ist. Unter der Voraussetzung, daß sowohl

$$n \neq \nu a \pi,$$

als auch

$$m \neq \nu a \pi$$

sind, ergibt sich die Lösung dieses Randwertproblems:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, t) = \\ \frac{A a}{\sin\left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \cos nt + \frac{B a}{\sin\left(\frac{m}{a}\right)} \cdot \cos \frac{m(x-1)}{a} \cdot \cos mt, \end{array} \right.$$

deren Richtigkeit leicht zu verifizieren ist. Setzen wir diesen Wert in die bis zum zweiten Gliede einschließlich entwickelte Gleichung (21a) ein, so folgt unmittelbar, wenn wir gleich für $x = 1$ spezialisieren:

$$\begin{aligned}
 p(1) = p_0 &+ \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \sin n t + \frac{1}{2} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \sin^2 n t \\
 &+ \frac{p_0 B m}{a \sin \frac{m}{a}} \cdot \sin m t + \frac{1}{2} \frac{p_0 B^2 m^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{m}{a}\right)} \cdot \sin^2 m t \\
 &+ \frac{p_0 A B n m}{a^2 \sin \frac{n}{a} \cdot \sin \frac{m}{a}} \cdot \sin n t \cdot \sin m t,
 \end{aligned}$$

oder:

$$(32) \left\{ \begin{aligned}
 p(1) = p_0 &+ \frac{p_0 A n}{a \sin \left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \sin n t + \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a}\right)} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \cos 2 n t \\
 &+ \frac{p_0 B m}{a \sin \frac{m}{a}} \cdot \sin m t + \frac{1}{4} \frac{p_0 B^2 m^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{m}{a}\right)} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{p_0 B^2 m^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{m}{a}\right)} \cdot \cos 2 m t \\
 &+ \frac{\frac{1}{2} p_0 A B n m}{a^2 \sin \left(\frac{n}{a}\right) \cdot \sin \left(\frac{m}{a}\right)} \left[\cos (n - m) t + \cos (n + m) t \right].
 \end{aligned} \right.$$

Berechnet man für diesen Ausdruck wieder das Zeitmittel, so findet man für den Schalldruck $\overline{p(1)} - p_0$:

$$(33) \quad \overline{p(1)} - p_0 = \frac{h_0}{4} \frac{A^2 n^2}{\sin^2 \frac{n}{a}} + \frac{h_0}{4} \frac{B^2 m^2}{\sin^2 \left(\frac{m}{a}\right)},$$

wieder ganz analog wie bei Lord Rayleigh.

Für uns ist jedoch gerade Gleichung (32) wichtig, weil sie uns die am Ende $x=1$ ausgeübte Kraft als Funktion der Zeit angibt. Man erkennt, daß außer den Frequenzen n und m , die wir am Ende $x=0$ anbrachten, noch die Oktaven $2n$ und $2m$ sowie der Differenzton erster Ordnung $(n-m)$ und der Summationston erster Ordnung $(n+m)$ auftreten, die also, wenn wir am Ende $x=1$ eine Membran anbringen, diese in Schwingungen versetzt, die nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen zu behandeln sind. Wir gehen darauf nicht weiter ein. Jedenfalls sieht man, daß in der Membran auch Kombinationstöne auftreten.

§ 6.

Gegen die vorstehenden Betrachtungen kann und muß ein Einwand gemacht werden. In der Gleichung (13) für das Geschwindigkeitspotential haben wir die quadratischen und höheren Glieder gestrichen, dagegen in der Druckgleichung (14) bzw. (21a) beibehalten. Das ist, wie es scheint, eine Inkonssequenz, die der Rechtfertigung bedarf. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die Rayleighsche Ableitung, indem dieser für das Geschwindigkeitspotential eine Lösung der gewöhnlichen Wellengleichung (13) nimmt, bei der Druckgleichung aber die Genauigkeit weiter treibt. Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein. Wir wollen nun sehen, was sich ergibt, wenn wir die quadratischen Glieder überall systematisch beibehalten.

Aus der allgemeinen Gleichung (10) folgt dann bei Abwesenheit äußerer Kräfte:

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} = 0;$$

dazu tritt die Druckgleichung (8):

$$(35) \quad \log \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2.$$

Wir wollen (34) für die alten Randbedingungen lösen, also die Bedingungen vorschreiben:

$$(36) \quad \text{für } x = 0: \Phi'(0) = A n \cdot \cos n t;$$

$$(37) \quad \text{für } x = 1: \Phi'(1) = 0.$$

Die Glieder zweiter Ordnung werden dem Quadrate der Amplitude proportional sein; um dies zum Ausdruck zu bringen, wollen wir schreiben:

$$(38) \quad \Phi = A \cdot \Psi,$$

so daß an Stelle von (34), (35), (36), (37) die folgenden Gleichungen zu treten haben:

$$(39a) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2A \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} = 0,$$

$$(39b) \quad \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\frac{A}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{A^2}{2a^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(40) \quad \Psi'(0) = n \cdot \cos n t,$$

$$(41) \quad \Psi'(1) = 0.$$

Wäre in (39a) $A = 0$, so fielen wir auf unsere alte Lösung zurück; das legt den Ansatz nahe:

$$(42) \quad \Psi = \Psi_0 + A \cdot \Psi_1 + A^2 \Psi_2 + \dots,$$

wo Ψ_0 unsere alte Lösung für verschwindend kleines A ist. Die Randbedingungen (40) und (41) werden erfüllt, indem man setzt:

$$(43) \quad \begin{cases} \Psi_0'(0) = n \cdot \cos nt; & \Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) = \dots = 0, \\ \Psi_0'(1) = \Psi_1'(1) = \Psi_2'(1) = \dots & = 0. \end{cases}$$

Setzen wir (42) in (39a) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + A^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \dots \\ - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} - a^2 A \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} - a^2 A^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} \dots \\ + 2A \left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + A \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + A^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x} + A \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial x} + A^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial x} \dots \right] = 0, \end{aligned}$$

und wenn man die Koeffizienten gleicher Potenzen von A gleichsetzt, ergibt sich folgendes System von Gleichungen und Randbedingungen:

$$(44a) \quad \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} = 0; \quad \Psi_0'(1) = n \cdot \cos nt; \quad \Psi_0'(1) = 0;$$

$$(44b) \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x}; \quad \Psi_1'(0) = \Psi_1'(1) = 0;$$

$$\dots$$

Wir brechen mit der Gleichung für Ψ_1 ab, die ja den quadratischen Gliedern entspricht.

Für Ψ_0 haben wir aus Gleichung (19), wo nur gemäß (38) der Faktor A zu streichen ist:

$$(45) \quad \Psi_0(x, t) = \frac{a}{\sin\left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \cos nt.$$

Mit diesem Werte haben wir den in (44b) auf der rechten Seite auftretenden Ausdruck

$$-2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x}$$

zu bilden; das liefert:

$$(46) \quad -2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x} = \frac{n^3}{2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \left[1 - \cos \frac{2n(x-1)}{a} \right] \cdot \sin 2nt;$$

also lautet das jetzt zu lösende Problem nach (44b) und (46):

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = \frac{n^3}{2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \left[1 - \cos \frac{2n(x-1)}{a} \right] \cdot \sin 2nt, \\ \Psi_1'(0) = \Psi_1'(1) = 0. \end{cases}$$

Das ist aber ein bekanntes Randwertproblem, nämlich das des an beiden Enden freischwingenden Stabes, dessen Lösung sofort hingeschrieben werden kann. Man findet¹⁾:

$$\Psi_1(x, t) = \frac{C_0}{\left(\frac{4n^2}{a^2} \right)} \cdot \sin 2nt + \sin 2nt \cdot \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot C_{\nu}}{\frac{4n^2}{a^2} - \nu^2 \pi^2} \cos \nu \pi x$$

oder

$$(48) \quad \Psi_1(x, t) = (\sqrt{2}) \sin 2nt \cdot \sum_{\nu}^{\infty} \frac{C_{\nu}}{\frac{4n^2}{a^2} - \nu^2 \pi^2} \cdot \cos \nu \pi x.$$

Dabei bedeutet die Klammer um $\sqrt{2}$, daß die Wurzel für $\nu = 0$ zu streichen ist.

C_{ν} ist ein Fourierscher Koeffizient mit folgender Bedeutung:

$$C_{\nu} = \frac{(\sqrt{2}) \cdot n^3}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right) \cdot a^2} \cdot \int_0^1 \cos \nu \pi x \cdot \left\{ \cos \frac{2n}{a} (x-1) - 1 \right\} dx.$$

Kürzen wir ab:

$$(\sqrt{2}) \sum_{\nu}^{\infty} \frac{C_{\nu} \cdot \cos \nu \pi x}{\frac{4n^2}{a^2} - \nu^2 \pi^2} = U(x),$$

so folgt als Lösung für $\Psi_1(x, t)$:

$$(49) \quad \Psi_1(x, t) = U(x) \cdot \sin 2nt,$$

also unter Rücksicht auf (38) und (49) für das Geschwindigkeitspotential Φ :

$$(50) \quad \Phi(x, t) = \frac{A \cdot a}{\sin \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos \frac{n}{a} (x-1) \cdot \cos nt + A^2 \cdot U(x) \cdot \sin 2nt.$$

1) Vgl. z. B. Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik. Bd. I. p. 592ff. u. 661ff.

Wir erkennen also, daß die Berücksichtigung des quadratischen Gliedes in (34) das Auftreten der Oktave des ursprünglichen Tones mit sich bringt, in einer Stärke, die dem Quadrate der Amplitude des primären Tones proportional ist.¹⁾ Nach (35) ist nun:

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

oder:

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2}.$$

Entwickelt man bis zu den quadratischen Gliedern, so folgt:

$$(51) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2a^4} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right\}.$$

Ausgerechnet gibt der Ausdruck auf der rechten Seite, wenn überall nur noch Quadrate von A berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} p = p_0 \left[1 + \frac{A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \cos \frac{n}{a} (x-1) \cdot \sin n t - \frac{2 n^2}{a^2} A^2 U(x) \cdot \cos 2 n t \right. \\ \left. - \frac{A^2 n^2}{2 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin^2 \frac{n}{a} (x-1) \cos^2 n t \right. \\ \left. + \frac{A^2 n^2}{2 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos^2 \frac{n(x-1)}{a} \cdot \sin^2 n t \right], \end{aligned}$$

und wenn wir für $x = 1$ spezialisieren:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} p(1) = p_0 \left[1 + \frac{A n}{a \sin \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin n t - \frac{2 n^2 A^2}{a^2} \cdot U(1) \cos 2 n t \right. \\ \left. + \frac{A^2 n^2}{2 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin^2 n t \right]. \end{aligned} \right.$$

1) Würde man in Gl. (35) zwei Töne $An \cdot \cos nt + Bm \cos mt$ wirken lassen, so würden auch im Ausdruck von Φ Kombinationstöne auftreten, was auch durch die Überlegung erkannt wird, daß in der Differentialgleichung für Φ (34) ein quadratisches Glied auftritt. Auch Helmholtz hat diesen Sachverhalt bereits vollkommen klar erkannt, wie aus seiner Anmerkung p. 318 (l. c.) hervorgeht, die, wie es scheint, nicht die genügende Beachtung gefunden hat.

Bilden wir jetzt den Mittelwert für eine Periode, so folgt sofort das nicht von vornherein zu erwartende Resultat:

$$(53) \quad \overline{p(1)} = p_0 + \frac{p_0}{a^2} \frac{A^2 n^2}{4 \sin^2\left(\frac{n}{a}\right)} = p_0 + \frac{h_0 A^2 n^2}{4 \sin^2\left(\frac{n}{a}\right)},$$

d. h. wir erhalten genau den nämlichen Wert des Schalldruckes wie in Gleichung (29). Die Vernachlässigung der quadratischen Glieder in der Differentialgleichung für Φ ist also gerechtfertigt.

Breslau, Physik. Inst. d. Univ., im März 1916.

(Eingegangen 21. Juli 1916.)