

Posizioni osservate del Pianeta *Le-Verrier* riferite al piano dell' ecclittica con le corrispondenti posizioni del Sole desunte dalle Eff. di Berlino.

1846	Tempo Medio al Merid. di Berlino.	Longit. di Sole dall' Equin. vero.	Log. dist. di Sole du Terra.	Long. osserv. del Pianeta dall' Eq. vero.	Latit. Geoc. osservata.	Corr. dagli elem. ellif.
Sept. 23	266 ^h 50 ^m 17	180°31' 10"7	0,0011371	325°52' 48"02	—0°31' 53"57	+54' 30"7
24	267,37131	181 22 26,8	0,0010282	— 51 44,24	31 53,46	54 26,0
25	268,40399	182 23 15,2	0,0008983	— 50 27,35	31 53,96	54 18,0
28	271,40117	185 19 54,3	9,0005184	— 46 45,80	31 58,65	53 48,4
Ott. 10	283,36258	197 7 43,9	9,9990199	— 35 35,72	31 59,32	52 25,6
11	284,35977	198 6 58,3	9,9988982	— 33 42,80	31 56,47	52 17,4
19	292,33769	206 2 16,2	9,9979309	— 27 57,00	31 53,70	51 30,8
Nov. 4	308,29377	221 58 57,2	9,9960693	— 22 32,1 ±	32 4,5 ±	50 33,8 ±
6	310,28831	223 59 3,5	9,9958590	— 22 31,1	31 48,1	50 36,2
11	315,27467	228 59 53,0	9,9953615	— 22 51,16	31 46,37	50 25,3
12	316,27199	230 0 8,8	9,9952661	— 22 58,50	31 46,30	50 23,2
14	318,26633	232 0 45,1	9,9950795	— 23 24,90	31 43,77	50 20,9
16	320,26107	234 1 29,7	9,9948962	— 24 12,70	31 42,43	50 20,2
25	329,23669	243 5 59,8	9,9941280	— 28 25,45	—0 31 39,60	+50 32,2

La rapida variazione delle correzioni delle longitudini geocentriche, degli elementi ellittici indicata dai precedenti confronti sembra annunziare una forte correzione nella distanza del Pianeta dal Sole, la quale dietro gli elementi stessi risulta circa = 33,06. Essendo lentissimo il moto eliocentrico, si può ritenere per un piccolo intervallo di tempo l'orbita circolare; nel qual caso due osservazioni servono a determinarne il raggio. Combinando insieme le osservazioni del giorno 23 Settembre fatta in Berlino, e quella del giorno 25 Novembre

da me fatta in Padova ho trovato i seguenti elementi, i quali rappresentano sufficientemente le osservazioni.

Raggio dell' orbita circolare	= 29,2274
Epoca ai 23 Settembre 0 ^h 0' in Berlino	= 327°0' 10"3
Longitudine del nodo Ascendente	= 132 2 50
Inclinazione dell' orbita	= 2 0 8

ora è conveniente osservare, che la piccolezza dell' Arco eliocentrico trascorso dal Pianeta rende molto incerta la posizione del piano dell' Orbita.

Santini.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von Herrn Professor Dr. *Anger*.

Die Aufgabe: durch vier gegebene Punkte diejenige Ellipse zu legen, welche den kleinsten Inhalt hat, entspricht der in der monatlichen Correspondenz Bd. XXII aufgelösten: die grösste Ellipse zu finden, welche die Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. Während diese letztere auf eine quadratische Gleichung führt, wird die Lösung jener, wie zuerst *Euler* in der Abhandlung: „Problema geometricum quo inter omnes ellipses, quae per data quatuor puncta traduci possunt, ea quaeritur, quae habet aream minimam“ in den Nov. Act. der Petersburger Akademie vom Jahre 1791 p. 138 gezeigt hat, von einer cubischen Gleichung abhängig.

Wenn man die vier gegebenen Punkte zu einem Vierecke verbindet, zwei gegenüberliegende Seiten verlängert, bis sie sich in einem Punkte schneiden, diesen Punkt zum Anfangspunkte schiefwinkliger Coordinaten und diese Linien als Axen des schiefwinkligen Coordinaten-Systems annimmt, so ist die Lage der vier Punkte durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= a, & y &= 0 \\ x &= b, & y &= 0 \\ x &= 0, & y &= c \\ x &= 0, & y &= d, \end{aligned}$$

wo a, b, c, d gegebene positive Größen bedeuten, bestimmt.

Wenn nun

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die auf dieses Coordinaten-System bezogene Gleichung der gesuchten kleinsten Ellipse ist, so findet sich

$$A = cd, \quad C = ab, \quad 2D = -cd(a+b), \quad 2E = -ab(c+d), \quad F = abcd,$$

und der Coefficient B wird durch die cubische Gleichung

$$(1) \dots B^3 - (a+b)(c+d)B^2 + \frac{3cd(a+b)^2 + 3ab(c+d)^2 - 4abcd}{4}B - \frac{abcd(a+b)(c+d)}{2} = 0$$

bestimmt, wo zugleich, damit der Kegelschnitt eine Ellipse werde die Bedingung $B^2 < AC$ erfüllt werden muß.

Euler bemerkt, dafs, da die Lösung der Aufgabe auf eine cubische Gleichung zurückführe, auch immer eine Ellipse gefunden werden könne, welche der gestellten Forderung genüge, und dafs, wenn sich der Fall ereignen sollte, dafs die cubische Gleichung drei mögliche Wurzeln habe, auch eben so viele Lösungen Statt finden würden, deren Eigenschaften näher anzugeben, er andern überlasse.

$$(2) \dots\dots\dots z^3 - 2pq z^2 + \{3(p^2 + q^2) - 4\} z - 4pq = 0$$

wo

$$p = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}, \quad q = \frac{c+d}{\sqrt{cd}}.$$

Das allgemeine Criterium, dafs die cubische Gleichung

$$z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

drei mögliche Wurzeln habe, ist bekanntlich:

$$\beta^2 (\alpha^2 - 4\beta) > 27\gamma^2 + 2\alpha\gamma (2\alpha^2 - 9\beta), \text{ welches sich für unsere Gleichung in:}$$

$\{9(p^2 + q^2)^2 - 24(p^2 + q^2) + 16\} \{p^2 q^2 - 3(p^2 + q^2) + 4\} > 108p^2 q^2 + 4p^2 q^2 \{8p^2 q^2 - 27(p^2 + q^2) + 36\}$ verwandelt. Da nun sowohl p als q gröfser als 2 sind, so wird man haben

$$p^2 = 4 + t, \quad q^2 = 4 + u$$

wo t und u positive Gröfsen sind, welches auch aus den identischen Gleichungen

$$\frac{(a+b)^2}{ab} = 4 + \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$\frac{(c+d)^2}{cd} = 4 + \frac{(c-d)^2}{cd}$$

unmittelbar folgt; die obige Bedingung wird demnach erfüllt wenn der Ausdruck:

$$4(t^2 + u^2) + 9(t^3 + u^3) + 9tu(t+u)^2 - 4tu - tu^2 - t^2u - 32t^2u^2$$

positiv ist. Derselbe kann aber wie folgt geschrieben werden:

$$4(t-u)^2 + 4tu + 8(t^3 + u^3) + (t+u)(t-u)^2 + 9tu(t-u)^2 + 4t^2u^2$$

woraus hervorgeht, dafs diese Gröfse in der That stets positiv ist, also die Gleichung (2) und daher auch die Gleichung (1) immer drei mögliche Wurzeln hat. Da ferner der Coefficient von z in der Gleichung (2) offenbar positiv ist, so sind nach dem *Descartes'schen* Satze die Wurzeln dieser Gleichung zugleich alle positiv.

Die Bedingung $B^2 < AC$ fordert, dafs $z < 2$ sei. Da in der Gleichung (2) der links stehende Theil für $z = 0$ negativ, nämlich $-4pq$, und für $z = 2$ positiv, nämlich $6(p-q)^2$ wird, so liegt in der That eine Wurzel zwischen den Grenzen 0 und 2, und da das Glied $4pq$ immer gröfser als 16 ist, so können zwischen diesen Grenzen nicht alle drei Wurzeln enthalten sein, sondern nur eine, und zwar die

Es ist mir gelungen zu zeigen, dafs die cubische Gleichung auf welche das Problem führt, im Allgemeinen immer drei mögliche und zwar positive Wurzeln hat, und dafs diejenige, welche hier allein in Betracht kommt, stets die kleinste von allen ist, während die beiden andern Wurzeln sich auf Kegelschnitte die nicht Ellipsen sind, beziehen.

Um dies zu zeigen setze ich

$$B = \frac{1}{2}z \sqrt{abcd}$$

und transformire die obige Gleichung (1) in folgende

kleinste von allen, wodurch die obige Behauptung, dafs diejenige Wurzel, welche für die Aufgabe allein in Betrachtung kommt, die kleinste der drei Wurzeln ist, sich bestätigt.

Wenn sich das Viereck in ein Trapez verwandelt, dessen nicht parallele Seiten gleich sind, also $a = c$, und $b = d$, mithin $p = q$ wird, so sind die drei Wurzeln der Gleichung (2) folgende:

$2, p^2 - 1 + \sqrt{p^4 - 4p^2 + 1}$, und $p^2 - 1 - \sqrt{p^4 - 4p^2 + 1}$ von denen nur die letzte in Betracht kommt, während die erste und zweite sich resp. auf eine Parabel und Hyperbel beziehen. Wenn das Viereck ein Parallelogramm wird, ist es zweckmässig die Diagonalen als Coordinaten-Axen anzunehmen, wodurch die Gleichung (1) sich nicht wesentlich ändert.

Brief des Herrn *d'Arrest* an den Herausgeber.

Berlin 1847. Juni 11.

Nachdem die Beobachtungen des Cometen von *Colla* nun wohl geschlossen sein werden, habe ich versucht die Bahn

desselben genauer zu bestimmen, als es aus den ersten Beobachtungen möglich war. Bei der ungewöhnlich grofsen