

22.

Propriétés d'un système de courbes algébriques ayant en commun un certain nombre de points.

(Par M. Woepcke.)

I.

Nous avons vu (Tome LIII de ce Journal, page 260) que si l'on a un système de trois courbes de l'ordre n passant par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, on pourra mener, par les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ autres intersections de C_2 avec C_3 une courbe c_1 de l'ordre $n-1$ qui coupera, en outre, chacune des deux courbes C_2 et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points, et qu'alors, si par ces deux groupes de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points et deux fois $2(n-1)-r$ points, pris respectivement parmi les intersections de C_1 avec C_2 et C_3 , on mène deux autres courbes c_3 et c_2 de l'ordre $n-1$, ces deux courbes passeront par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points situés sur la courbe C_1 .

Mais la courbe c_3 est aussi bien déterminée par les $2(n-1)-r$ intersections de C_1 avec C_2 et les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points situés sur C_1 qu'elle a en commun avec c_2 , que par les mêmes $2(n-1)-r$ intersections et les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points situés sur C_2 qu'elle a en commun avec c_1 . On pourra donc aller de la courbe c_1 à la courbe c_2 , et de celle-ci à la courbe c_3 , qui alors devra passer par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ intersections de c_1 avec C_2 . C'est ce qui nous permet d'énoncer le même théorème de la manière suivante qui se prête facilement aux généralisations que nous allons donner ci-après.

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes de l'ordre n , passant par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, \dots, 2n-3$. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ autres intersections $i_{1,2}$ des courbes C_1 et C_2 et par r points pris à volonté sur la courbe C_1 , faisons passer une courbe $c_{1,2}$ de l'ordre $n-1$ qui coupera, en outre, C_2 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points. Par ceux-ci et $2(n-1)-r$ points pris parmi les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{2,3}$ communs aux courbes C_2 et C_3 outre ceux qu'elles ont en commun avec C_1 , menons une courbe $c_{2,3}$ de l'ordre $n-1$; elle passera par toutes les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ intersections $i_{2,3}$ et coupera, en outre, C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points. Par ces derniers points et $2(n-1)-r$ points pris parmi les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{1,3}$ communs aux courbes C_1 et C_3

outre ceux qu'elles ont en commun avec C_2 , menons de nouveau une courbe $c_{1,3}$ de l'ordre $n-1$. Je dis que cette courbe passera par toutes les intersections $i_{1,3}$ et qu'elle passera, en outre, par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ intersections de $c_{1,2}$ avec C_1 différentes des $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ intersections $i_{1,2}$.

Par les $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ points communs aux courbes C_1, C_2, C_3 faisons passer maintenant une quatrième courbe C_4 de l'ordre n . Alors, par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points différents des intersections $i_{2,3}$ en lesquels C_3 est rencontrée par $c_{2,3}$, nous pourrons mener, outre $c_{1,3}$, une courbe $c_{3,4}$ de l'ordre $n-1$ passant par $2(n-1)-r$ et dès lors par tous les points $i_{3,4}$. De même nous pourrons mener une courbe $c_{1,4}$ par les intersections de $c_{3,4}$ avec C_4 différentes des intersections $i_{3,4}$ et par $2(n-1)-r$ des points $i_{1,4}$. De ce qui précède il suit que $c_{1,3}$ et $c_{1,4}$ passeront par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points situés sur C_1 et distincts des intersections $i_{1,3}$ et $i_{1,4}$, et je prétends que ce sont les mêmes $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points situés sur C_1 par lesquels passaient déjà $c_{1,3}$ et $c_{1,2}$.

En effet, chacune des courbes $c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}$ a en commun avec C_1 les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{1,2}, i_{1,3}, i_{1,4}$ respectivement, outre lesquels chacune d'elles ne peut avoir en commun avec C_1 que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points. Mais les courbes $c_{1,2}$ et $c_{1,3}$ passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points de la courbe C_1 distincts des points $i_{1,2}$ et $i_{1,3}$, et les courbes $c_{1,3}$ et $c_{1,4}$ passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points de la courbe C_1 différents des points $i_{1,3}$ et $i_{1,4}$. Il faut donc que les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points de C_1 que $c_{1,3}$ a en commun avec $c_{1,2}$ et $c_{1,4}$, soient les mêmes, parceque ces points sont distincts des $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points $i_{1,3}$ et que la courbe $c_{1,3}$ ne peut rencontrer C_1 qu'en $n(n-1)$ points.

En faisant un raisonnement analogue pour une cinquième courbe, et enfin pour un nombre quelconque de courbes de l'ordre n qu'on fera passer par les $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ points communs aux courbes C_1, C_2, C_3 , on obtient le théorème général suivant.

Si on fait passer m courbes de l'ordre n , soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$, par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, \dots, 2n-3$, il existera, en général, une infinité) de systèmes de $\frac{1}{2}m(m-1)$ courbes de l'ordre $n-1$, déterminées de la manière ci-dessus exposée, correspondant respectivement aux autres intersections des courbes C prises*

*) Pour $r=0$ il n'existe qu'un seul système de cette espèce.

deux à deux, et dont toujours $m-1$ passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points situés sur chacune des courbes C .

De même, si on fait passer m courbes de l'ordre n , soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$, par $\frac{1}{2}n(n+1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, \dots, n-3$, il existera, en général, une infinité de systèmes de $\frac{1}{2}m(m-1)$ courbes de l'ordre $n-2$, correspondant respectivement aux autres intersections des courbes C prises deux à deux, et dont toujours $m-1$ passent par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ mêmes points situés sur chacune des courbes C .

Les $\frac{1}{2}m(m-1)$ courbes de l'ordre $n-1$ ou $n-2$ se coupent, trois à trois, en $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ groupes de $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ ou $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-r$ points, et sur chacune de ces courbes il se trouve $m-2$ de ces groupes.

Il n'est pas besoin de dire que ces deux théorèmes donnent lieu à un très-grand nombre de corollaires et d'applications. Nous n'en citerons ici que quelques-uns des plus simples.

Soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ une série de cercles se coupant en un même point P . Sur la circonférence du cercle C_1 prenons un point quelconque p_1 ; par p_1 et le second point d'intersection de C_1 avec C_2 menons une droite qui coupera C_2 en un point p_2 ; par p_2 et le second point d'intersection de C_2 avec C_3 menons une droite qui coupera C_3 en p_3 ; et ainsi de suite. Je dis que la dernière droite qu'on mène par p_m et le second point d'intersection de C_m avec C_1 , passera de nouveau par le point p_1 , que le polygone de m côtés ainsi obtenu sera semblable au polygone formé par les centres des cercles, et que chacune de ses diagonales, soit $p_\alpha p_\beta$, passe par le second point d'intersection de deux des cercles proposés, à savoir C_α et C_β .

Soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ une série de coniques ayant un contact du second ordre en un point P et se coupant deux à deux dans un autre point que nous appellerons $i_{\alpha,\beta}$ pour les deux coniques C_α et C_β . Sur C_1 prenons arbitrairement un point p_1 et menons $p_1 i_{1,2}$ qui coupera C_2 en un point p_2 ; menons de même $p_2 i_{2,3}$ qui coupera C_3 en un point p_3 ; et ainsi de suite. La droite $p_m i_{1,m}$ viendra repasser par p_1 , et chaque diagonale $p_\alpha p_\beta$ du polygone $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$ passera par un point $i_{\alpha,\beta}$ intersection des coniques C_α et C_β .

Soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ une série de courbes du troisième ordre passant par sept mêmes points et se coupant, en outre, deux à deux en deux points. Appelons les deux points d'intersection des courbes C_α et C_β les

points $i_{\alpha, \beta}$. Les deux points $i_{1,2}$ déterminent une droite $c_{1,2}$, les points $i_{2,3}$ une droite $c_{2,3}$, les points $i_{3,4}$ une droite $c_{3,4}$, et ainsi de suite jusqu'à la droite $c_{m,1}$. Je dis que ces m droites forment un polygone de m côtés dont chaque sommet se trouve sur une des courbes C respectivement, et que, dans chaque sommet de ce polygone concourent, en outre, $m - 3$ autres droites c , ou que chaque diagonale du polygone passera par un couple de points i .

Prenons un des cas les plus simples de ce dernier corollaire. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles passant par deux mêmes points. Sur la circonférence de C_1 prenons un point quelconque a , de même sur C_2 un point b , et sur C_3 un point c . La droite ab coupera C_2 en un second point, et la droite ac coupera C_3 en un second point; appelons ces deux points α_2 et α_3 . De même ba coupera C_1 en un point β_1 , et bc coupera C_3 en un point β_3 . Enfin ca coupera C_1 en un point γ_1 et cb coupera C_2 en un point γ_2 . Je dis que les droites $\alpha_2\alpha_3$ et $\beta_1\beta_3$ se rencontreront en un point p_3 situé sur la circonférence de C_3 ; que les droites $\alpha_2\alpha_3$ et $\gamma_1\gamma_2$ se rencontreront en un point p_2 situé sur la circonférence de C_2 ; et que les droites $\beta_1\beta_3$ et $\gamma_1\gamma_2$ se rencontreront en un point p_1 situé sur la circonférence de C_1 ; enfin que le triangle $p_1p_2p_3$ sera semblable au triangle abc .

Faisons encore une application aux courbes du quatrième ordre. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles passant par deux mêmes points. Sur la circonférence de C_1 prenons deux points a, a' ; sur la circonférence de C_2 deux points b, b' ; et sur la circonférence de C_3 deux points c, c' . Le cercle C_1 et les deux droites $bc, b'c'$ couperont le cercle C_2 et les deux droites $ac, a'c'$ encore en six points $i_{1,2}$; de même $C_1, bc, b'c'$ et $C_3, ab, a'b'$ se couperont encore en six points $i_{1,3}$; et $C_2, ac, a'c'$ et $C_3, ab, a'b'$ se couperont encore en six points $i_{2,3}$. Je dis qu'il existera deux courbes du troisième ordre passant ensemble par six mêmes points situés sur le système $C_1, bc, b'c'$, passant l'une par les six points $i_{1,2}$ et l'autre par les six points $i_{1,3}$, coupant, en outre, l'une le système $C_2, ac, a'c'$ en six points p_2 et l'autre le système $C_3, ab, a'b'$, en six points p_3 , et se rencontrant enfin en trois points π de telle façon que les vingt-un points $i_{2,3}, p_2, p_3$ et π sont situés sur trois droites.

III.

D'après ce qui a été démontré (Tome LIII, page 260 de ce Journal) trois courbes C de l'ordre n qui passent par $\frac{1}{2}n(n-1) + 1 + r$ mêmes points,

donnent lieu à trois courbes C' de l'ordre $n-1$ qui, à leur tour, passent par $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ mêmes points.

Nous faisons observer que, en vertu de ce même théorème, si $r < n-1$, les trois courbes C' donnent lieu, à leur tour, à trois courbes C'' de l'ordre $n-2$ qui passent par $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+r$ mêmes points.

De même, si $r > 0$, les courbes C'' donneront lieu à trois courbes C''' de l'ordre $n-3$ passant par $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-(r-1)$ mêmes points.

Si $r < n-2$, les courbes C''' donnent pareillement lieu à trois courbes C^{IV} de l'ordre $n-4$ passant par $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)+r-1$ mêmes points, lesquelles, si $r > 1$, donnent lieu à trois courbes C^V de l'ordre $n-5$ passant par $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)-(r-2)$ mêmes points.

En continuant ainsi on voit qu'on peut arriver à trois courbes de l'ordre $n-2p$, si l'on fait $r < n-p$ et $> p-2$; et à trois courbes de l'ordre $n-(2p+1)$, si l'on fait $r < n-p$ et $> p-1$. Conséquemment, pour arriver jusqu'à trois droites, il faut prendre $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-3}{2}$ pour r , si n est impair, et $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$, si n est pair.

Prenons par exemple trois cercles C_1, C_2, C_3 passant par deux mêmes points P et Q , et trois droites D_1, D_2, D_3 passant par un même point R . Le cercle C_1 et la droite D_1 couperont, en outre, le cercle C_2 et la droite D_2 en quatre points $i_{1,2}$. De même C_1 et D_1 couperont C_3 et D_3 en quatre points $i_{1,3}$; enfin C_2 et D_2 couperont C_3 et D_3 en quatre points $i_{2,3}$. Par les quatre points $i_{2,3}$ nous pouvons faire passer (de deux manières différentes) deux droites que nous désignerons ensemble par $c_{2,3}$, et qui couperont le cercle C_2 en deux points p_2 et le cercle C_3 en deux points p_3 . Je dis que les quatre points $i_{1,2}$ et les deux points p_2 seront sur une conique $c_{1,2}$, que les quatre points $i_{1,3}$ et les deux points p_3 seront sur une conique $c_{1,3}$, et que les coniques $c_{1,2}$ et $c_{1,3}$ se couperont en quatre points dont deux seront situés sur les deux droites $c_{2,3}$, et les deux autres sur le cercle C_1 , mais de telle façon que si l'on désigne ces deux derniers points par p_1 , les trois droites qui passent respectivement par les deux points p_1 , les deux points p_2 , et les deux points p_3 , et que l'on peut désigner respectivement par c'_1, c'_2, c'_3 , concourent en un même point S .

Figure 1. — Trois cercles C_1, C_2, C_3 passant par deux points P, Q . Trois droites D_1, D_2, D_3 passant par un point R . Les points $i_{1,2}, i_{1,3}, i_{2,3}$ sont les points d'intersection des cercles et des droites. Les points p_1, p_2, p_3 sont les points d'intersection des coniques $c_{1,2}, c_{1,3}$ et des droites $c_{2,3}$. Les droites c'_1, c'_2, c'_3 concourent en un point S .

III.

Mentionnons encore deux théorèmes relatifs à des lignes droites qui découlent immédiatement du théorème démontré tome LIII, page 260.

1. Soient D_1, D_2, D_3 et D'_1, D'_2, D'_3 deux faisceaux de droites issus de deux points A et B . Appelons $i_{1,2}$ les deux points d'intersection de D_1 avec D'_2 et de D'_1 avec D_2 ; de même appelons $i_{1,3}$ les deux points d'intersection de D_1 avec D'_3 et de D'_1 avec D_3 ; et $i_{2,3}$ les deux points d'intersection de D_2 avec D'_3 et de D'_2 avec D_3 . Les trois droites $c_{1,2}, c_{1,3}, c_{2,3}$ déterminées respectivement par les couples de points $i_{1,2}, i_{1,3}, i_{2,3}$ concourront en un même point C .

On voit aisément que, de la même manière, le faisceau C , ainsi obtenu, donne lieu, à son tour, combiné avec le faisceau A , au faisceau B ; ou combiné avec le faisceau B , au faisceau A .

De ce théorème on déduit, comme on sait, le théorème corrélatif, que si l'on a sur une droite trois points a, b, c et sur une autre droite trois points α, β, γ , les points d'intersection de $a\beta$ avec $b\alpha$, de $a\gamma$ avec $c\alpha$ et de $b\gamma$ avec $c\beta$ sont en ligne droite.

Si chacun des deux faisceaux se compose de m droites, les points i donnent lieu à $\frac{1}{2}m(m-1)$ droites c qui se coupent, trois à trois, en $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ points, et sur chacune des droites c se trouvent $m-2$ de ces points.

2. Par le sommet a d'un triangle abc menons une droite A , par le sommet b une droite B , et par le sommet c une droite C ; appelons $i_{1,2}$ le point d'intersection de A avec B , $i_{1,3}$ le point d'intersection de A avec C , et $i_{2,3}$ le point d'intersection de B avec C . Par $i_{2,3}$ menons une droite quelconque $c_{2,3}$ coupant ab en p_3 et ac en p_2 . Je dis que les deux droites $i_{1,2}p_2$ et $i_{1,3}p_3$ se coupent sur bc .

Dessau, au mois de juillet 1857.