7.

Summen von Reihen, ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendungen dieser Sätze.

(Von Herrn Dr. *Dienger*, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe im Badischen.)

So lange die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{x\varphi'(0)}{1}+\frac{x^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{x^3\varphi'''(0)}{1.2.3}+\dots\dots\dots$$

convergirt, ist

$$\varphi(0)+\frac{x\varphi'(0)}{1}+\frac{x^2\varphi''(0)}{1.2}+\dots\dots\dots=\varphi(x),$$

und zwar, wenn $\varphi(z)$ endlich ist, für *alle* Werthe von z, von $z=0$ bis $z=x$. Diess ist die bekannte *Maclaurin*'sche Formel. Von diesem Satze sind die folgenden Entwicklungen Anwendungen.

§. 1.

Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\Big[\varphi(0)+\frac{2kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\dots\dots\dots\Big]dx;$$

vorausgesetzt, dass $\varphi(z)$ endlich sei für alle möglichen reellen Werthe von z und dass die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{2kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\dots\dots\dots$$

convergire, für alle möglichen reellen Werthe von x.

Nun ist bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x^{2r+1}dx=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x^{2r}dx=\frac{(2r-1)(2r-3)\dots\dots1}{2^r}\sqrt{\pi}.$$

Substituirt man Diess, so ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(2kx)\,dx = \sqrt{\pi}\left[\varphi(0) + \frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}\cdot\frac{1}{2} + \dots + \frac{(2k)^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\dots 2r}\cdot\frac{(2r-1)(2r-3)\dots 1}{2^r} + \dots\right]$$

$$= \sqrt{\pi}\left[\varphi(0) + \frac{k^2\varphi''(0)}{1} + \dots\dots\dots + \frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\dots r} + \dots\dots\dots\right].$$

Dadurch erhält man folgenden Lehrsatz:

Ist $\varphi(2kx)$ und $e^{-x^2}\varphi(2kx)$ für alle reellen Werthe von x endlich, und für dieselben Werthe die Reihe

$$\varphi(0) + \frac{2kx\varphi'(0)}{1} + \frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2} + \frac{(2kx)^3\varphi'''(0)}{1.2.3} + \dots\dots\dots \text{ in inf.}$$

convergent, so ist

$$(1.)\ \varphi(0) + \frac{k^2\varphi''(0)}{1} + \frac{k^4\varphi^{(4)}(0)}{1.2} + \dots + \frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\dots r} + \dots \text{ in inf.} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(2kx)\,dx.$$

Hieraus folgt weiter unmittelbar:

$$(2.)\ \varphi(0+)\frac{k\varphi''(0)}{1} + \frac{k^2\varphi^{(4)}(0)}{1.2} + \dots + \frac{k^r\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\dots r} + \dots \text{in inf.} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(2x\sqrt{k})\,dx,$$

wenn man in die obigen Bedingungen $\sqrt{k}$ statt k setzt

Man setze $\varphi(y) = \psi(z+y)$, so erhält man:

Ist $\psi(z+2xk)$ sowohl, als $e^{-x^2}\psi(z+2xk)$ endlich für alle reellen Werthe x und ist für dieselben Werthe die Reihe

$$\psi(z) + \frac{2kx\psi'(z)}{1} + \frac{(2kx)^2\psi''(z)}{1.2} + \dots\dots\dots \text{ in inf.}$$

convergent, so ist

$$(3.)\ \psi(z) + \frac{k^2\psi''(z)}{1} + \frac{k^4\psi^{(4)}(z)}{1.2} + \dots + \frac{k^{2r}\psi^{(2r)}(z)}{1.2\dots r} + \dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\psi(z+2xk)\,dx;$$

welches die, bekanntlich von *Laplace* gefundene Formel ist.

Aus der Formel (1) folgt unter denselben Bedingungen:

$$(4.)\ \varphi(0)\frac{k}{1} + \frac{\varphi''(0)}{1}\cdot\frac{k^3}{3} + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{1.2}\cdot\frac{k^5}{5} + \dots + \frac{\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\dots r}\cdot\frac{k^{2r+1}}{2r+1} + \dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^k \varphi(2xk)\,dk\,.\,dx,$$

und

$$(5.)\ \varphi(0) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\varphi''(0)}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\varphi^{(4)}(0)}{1.2} + \dots + \frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\dots r} + \dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \varphi(2xy)\,dy\,.\,dx,$$

wenn $\varphi(z)$ für alle reellen Werthe von x endlich ist und die Reihe

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0).2x}{1} + \frac{\varphi''(0).(2x)^2}{1.2} + \dots\dots\dots \text{ in inf.}$$

für dieselben Werthe von x convergirt.

Aus (2) folgt

$$(6.)\ \varphi(0)k+\frac{\varphi''(0).k^2}{1.2}+\frac{\varphi^{(4)}(0).k^3}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{\varphi^{(2r)}(0).k^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}+\ldots\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\int_0^k\varphi(2x\sqrt{k})\,dk.dx$$

und

$$(7.)\ \frac{\varphi(0)}{1}+\frac{\varphi''(0)}{1.2}+\frac{\varphi^{(4)}(0)}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots(r+1)}+\ldots\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\int_0^1\varphi(2x\sqrt{y})\,dy.dx$$

wenn, für alle reellen Werthe von x,

$$\varphi(0)+\frac{2x\varphi'(0)}{1}+\frac{(2x)^2\varphi''(0)}{1\cdot 2}+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergirt und $\varphi(x)$ endlich ist.

§. 2.

Es sei die Reihe

$$\varphi(0)+2kx\varphi'(0)+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1\cdot 2}+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

für alle reellen Werthe von x convergent, und die Grössen

$$\varphi(2kx)\int e^{-x^2}\varphi(2kx).x$$

seien für dieselben Werthe von x endlich, so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\left[\varphi(0).x+\frac{2k\varphi'(0)}{1}x^2+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1\cdot 2}x^3+\ldots\ldots\right]dx.$$

Benutzt man die Formeln in (§. 1), so ergiebt sich hieraus

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx=\sqrt{\pi}\left[\frac{2k\varphi'(0)}{1}\,\frac{1}{2}+\frac{(2k)^3\varphi'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 1}{2^2}+\ldots+\frac{(2k)^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)(2r+1)\ldots 1}{1\cdot 2\ \ldots\ldots\ (2r+1)2^{r+1}}+\ldots\right]$$

$$=\sqrt{\pi}\left[k\varphi'(0)+\frac{k^3\varphi'''(0)}{1}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots\ldots r}+\ldots\ldots\right].$$

Unter den obigen Voraussetzungen ist also

$$(8.)\ k\varphi'(0)+\frac{k^3\varphi'''(0)}{1}+\frac{k^5\varphi^5(0)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots\ldots r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx$$

$$(9.)\ \varphi'(0)+\frac{k^2\varphi^{(3)}(0)}{1}+\frac{k^4\varphi^{(5)}(0)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots\ldots r}+\ldots=\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx;$$

woraus

$$(10.)\ \varphi'(0)+\frac{k\varphi^{(3)}(0)}{1}+\frac{k^2\varphi^{(5)}(0)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{k^r\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2x\sqrt{k}).x\,dx$$

folgt. Aus (9) und (10) ergiebt sich

$$(11.)\ \varphi'(0)k+\frac{\varphi^{(3)}(0)}{3}\cdot\frac{k^3}{1}+\frac{\varphi^{(5)}(0)}{5}\cdot\frac{k^5}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\varphi^{(2r+1)}(0)}{2r+1}\cdot\frac{k^{2r+1}}{1\cdot 2\ldots r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x\int_0^k\frac{\varphi(2xy)}{y}\,dy\,dx$$

wenn das Integral in (11) endlich ist und die übrigen Bedingungen erfüllt werden. Für $k=1$ erhält man einen der Formel (7) analogen Satz.

Unter eben den Bedingungen erhält man aus (10):

$$(12.)\ \varphi'(0)\frac{k}{1}+\varphi^{(3)}(0).\frac{k^2}{1.2}+\varphi^{(5)}(0).\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots+\varphi^{(2r+1)}(0).\frac{k^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x\int_0^k\frac{\varphi(2x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}dy\,dx;$$

woraus für $k=1$ wieder ein einfacher Satz folgt.

Ist die Reihe

$$\psi(z)+2kx\,\psi'(z)+(2kx)^2\frac{\psi''(z)}{1.2}+\ldots\ldots.\text{ in inf.}$$

convergent und $\psi(z+2kx)$, $e^{-x^2}x\psi(z+2kx)$ für alle reellen Werthe von x endlich, so folgt aus (8):

$$(13.)\ k\psi'(z)+\frac{k^3\psi^{(3)}(z)}{1}+\ldots.+\frac{k^{2r+1}\psi^{(2r+1)}(z)}{1.2\ldots.r}+\ldots.=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x\psi(z+2kx)\,dx.$$

§. 3.

Es sei die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\ldots\ldots\text{ in inf.}$$

für alle reellen Werthe von x convergent und die Grössen $\varphi(kx)$, $\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}$ seien endlich, so ist

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left[\varphi(0)+\frac{k\varphi'(0)}{1}x+\frac{k^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots\ldots\right]dx$$

Nun ist

$$\int_0^\infty\frac{x^re^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{1.3\ldots.(2r-1)}{2^r}\sqrt{\pi},$$

also

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\pi}\left[\varphi(0)+\frac{k\varphi'(0)}{2}+k^2\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\ldots.+k^r\varphi^r(0)\frac{1.3\ldots.(2r-1)}{2.4\ldots.2r}+\ldots\right].$$

Unter den obigen Bedingungen ist demnach

$$(14.)\ \varphi(0)+k\varphi'(0)\frac{1}{2}+k^2\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\ldots.+k^r\varphi^{(r)}(0)\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots.2r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}dx.$$

Durch Integration nach k erhält man hieraus leicht neue Formeln für $k=1$, unter Bedingungen, die nach dem Vorstehenden leicht auszusprechen sind: z. B.

$$(15.)\ \varphi(0)+\varphi'(0).\frac{1}{2}+\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\ldots.\varphi^{(r)}(0).\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots.2r}+\ldots.=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Ist für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\psi(z) + kx\frac{\psi'(z)}{1} + \frac{(kx)^2\psi''(z)}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ \text{in inf.}$$

convergent, und sind $\psi(z+kx)$, $\psi(z+kx)\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ endlich, so ergiebt sich aus (14):

$$(16.)\ \psi(z)+k\psi'(z).\frac{1}{2}+k^2\psi''(z)\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+k^r\psi^{(r)}(z)\frac{1\cdot 3\ldots\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\ldots\ldots 2r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\psi(z+kx)}{\sqrt{x}}dx.$$

§. 4.

Wenn für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\varphi(0) + \frac{kx\,\varphi'(0)}{1} + \frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ \text{in inf.}$$

convergent ist, und $e^{-x}\varphi(kx)$, $\varphi(kx)$ sind endlich (die erste Grösse ist es, wenn es die letzte ist), so ist:

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx)dx = \int_0^\infty e^{-x}\left[\varphi(0) + \frac{k\varphi'(0)}{1}x + \frac{k^2\varphi''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots\ldots\ldots\right]dx.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-x}x^r\,dx = 1.2.3\ \ldots\ldots\ r,$$

also:

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx)dx = \varphi(0) + k\varphi'(0)\frac{1}{1} + k^2\varphi''(0).\frac{1.2}{1.2} + \ldots + k^r\varphi^{(r)}(0).\frac{1.2\ldots r}{1.2\ldots r} + \ldots$$

Demnach erhält man unter den obigen Voraussetzungen:

$$(17.)\quad \varphi(0) + k\varphi'(0) + \ldots\ldots + k^r\varphi^{(r)}(0) + \ldots\ldots = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx)\,dx,$$

woraus

$$(18.)\quad \varphi(0)+\varphi'(0)+\varphi''(0)+\ldots\ldots+\varphi^{(r)}(0)+\ldots\ldots=\int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,dx,$$

folgt, wenn für alle positiven reellen Werthe von x die Reihe

$$\varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots\ldots\ldots$$

convergirt und $\varphi(x)$ endlich ist. Integrirt man die Formel (17) nach k, so ergiebt sich daraus ein neuer Ausdruck.

Ist für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\psi(z) + \frac{kx\psi'(z)}{1} + \frac{k^2x^2\psi''(z)}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+kx)$ endlich, so folgt aus (17):

$$(19.)\quad \psi(z)+k\psi'(z)+k^2\psi''(z)+\ldots\ldots+k^r\psi^{(r)}(z)+\ldots\ldots=\int_0^\infty e^{-x}\psi(z+kx)\,dx,$$

und für $k=1$:

$$(20.)\quad \psi(z)+\psi'(z)+\psi''(z)+\ldots\ldots\ldots+\psi^{(r)}(z)+\ldots\ldots=\int_0^\infty e^{-x}\psi(z+x)\,dx.$$

§. 5.

Wenn für alle reellen positiven Werthe von x, von 0 bis 1 (eigentlich $1-\varepsilon$, wenn ε eine unendlich kleine Grösse ist) die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\varphi^{(4)}(0)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent ist, $\varphi(2kx)$ und $\dfrac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich sind und

$$\varphi'(0)=0\quad,\quad \varphi^{(3)}(0)=0\quad,\quad \varphi^{(5)}(0)=0,\ \text{u. s. f.},$$

ist, so ist:

$$\int_0^1\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\left[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots\ldots+\frac{(2k)^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots2r}x^{2r}+\ldots\ldots\right]dx.$$

Nun ist

$$\int_0^1\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2r}\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

also

$$\int_0^1\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\tfrac{1}{2}\pi\left[\varphi(0)+\left\{\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{(2k)^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots\ldots2r}\cdot\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots 2r}+\ldots\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\left[\varphi(0)+\frac{k^2\varphi(0)}{1^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots r^2}+\ldots\ldots\right].$$

Demnach ergiebt sich unter den obigen Bedingungen:

$$(21.)\quad \varphi(0)+\frac{k^2\varphi''(0)}{1^2}+\frac{k^4\varphi^{(4)}(0)}{1^2.2^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2\ldots\ldots r^2}+\ldots\ldots=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx.$$

Durch Integration nach k lässt sich daraus leicht eine neue Gleichung bilden.

Ist ferner für alle reellen Werthe von x, von 0 bis mit $1-\varepsilon$, die Reihe

$$\psi(z)+\frac{(2kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\psi^{(4)}(z)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent, sind $\psi(z+2kx)$ und $\dfrac{\psi(z+2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich, und ist

$$\psi'(z) = 0 \quad , \quad \psi^{(3)}(z) = 0 \quad , \quad \psi^{(5)}(z) = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots$$

so ist

$$(22.) \quad \psi(z) + \frac{k^2\psi''(z)}{1^2} + \ldots\ldots + \frac{k^{2r}\psi^{(2r)}(z)}{1^2.2^2\ldots r^2} + \ldots\ldots = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\psi(z+2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx.$$

§. 6.

Setzt man voraus, dass

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \varphi''(0) = 0 \quad , \quad \varphi^{(4)}(0) = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

sei, und dass für alle reellen Werthe von x, von 0 bis $1 - \varepsilon$, die Reihe

$$\frac{kx\varphi'(0)}{1} + \frac{(kx)^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3} + \frac{(kx)^5\varphi^{(5)}(0)}{1.2\ldots\ldots5} + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergire und $\varphi(kx)$, $\frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich seien, so ist:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\left[\frac{k\varphi'(0)}{1}x + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1.2\ldots(2r+1)}x^{2r+1} + \ldots\right]dx.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2r}{3.5.7\ldots\ldots(2r+1)},$$

also ist

$$\int_0^1 \frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \frac{k\varphi'(0)}{1} + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}\cdot\frac{2}{3} + \ldots\ldots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1.2\ldots(2r+1)}\cdot\frac{2.4\ \ldots\ldots\ 2r}{3.5\ldots\ldots(2r+1)} + \ldots\ldots$$

$$= k\varphi'(0) + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\ldots\ldots(2r+1)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

folglich unter den obigen Bedingungen:

$$(23.) \quad k\varphi'(0) + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{3^2} + \frac{k^5\varphi^{(5)}(0)}{3^2.5^2} + \ldots\ldots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\ldots\ldots(2r+1)^2} + \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx.$$

Ist $\psi(z) = 0$, $\psi''(z) = 0$, $\psi^{(4)}(z) = 0$, ... und für alle reellen Werthe von x, von 0 bis $1 - \varepsilon$, die Reihe

$$\frac{\psi'(z)kx}{1} + \frac{\psi^{(3)}(z)(kx)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

convergent, und sind $\psi(z+kx)$ und $\frac{\psi(z+kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich, so ist:

$$(24.) \quad k\psi'(z) + \frac{k^3\psi^{(3)}(z)}{3^2} + \frac{k^5\psi^{(5)}(z)}{3^2.5^2} + \ldots\ldots + \frac{k^{(2r+1)}\psi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\ldots(2r+1)^2} + \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{\psi(z+kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx.$$

§. 7.

Ist $\varphi'(0)$, $\varphi^{(3)}(0)$, $\varphi^{(5)}(0)$, ... Null, während für alle reellen Werthe von x, von 0 bis $1-\varepsilon$, die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\varphi^{(4)}(0)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent ist und $\varphi(2kx)$ (und auch $\sqrt{(1-x^2)}\varphi(2kx)$) endlich sind, so ist:

$$\int_0^1\varphi(2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx=\int_0^1\sqrt{(1-x^2)}\left[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\frac{(2k)^4\varphi^{(4)}(0)}{1.4}x^4+\ldots\ldots\right]dx.$$

Aber

$$\int_0^1 x^{2r}\sqrt{(1-x^2)}\,dx=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{4.6.8\ldots\ldots(2r+2)}\cdot\tfrac{1}{4}\pi,$$

also

$$\int_0^1\varphi(2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx=\tfrac{1}{4}\pi\left[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}\cdot\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{(2k)^{2r}.\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots\ldots2r}\cdot\frac{1.3\ldots(2r-1)}{4.6\ldots(2r+2)}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\left[\varphi(0)+\frac{k^2\varphi''(0)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2\ldots r^2}+\ldots\ldots\ldots\right].$$

Folglich erhält man unter den obigen Bedingungen:

$$(25.)\quad \varphi(0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2\varphi''(0)}{1^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{k^4\varphi^4(0)}{1^2.2^2}+\ldots+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2\ldots r^2}+\ldots\ldots=\frac{4}{\pi}\int_0^1\varphi(2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx.$$

Daraus folgt leicht

$$(26.)\quad \psi(z)+\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2\psi''(z)}{1^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{k^{2r}\psi^{(2r)}(z)}{(1.2\ldots r)^2}+\ldots\ldots=\frac{4}{\pi}\int_0^1\psi(z+2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx;$$

wenn $\psi'(z)=0$, $\psi^{(3)}(z)=0$, $\psi^{(4)}(z)=0$, und ferner von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$ die Reihe

$$\psi(z)+\frac{(2kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\psi^{(4)}(z)}{1\ldots\ldots4}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+2kx)$ endlich ist.

§. 8.

Es sei $\varphi(0)=0$, $\varphi^{(2)}(0)=0$, $\varphi^{(4)}(0)=0$, ... , von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$, die Reihe

$$\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\varphi(kx)$ endlich, so findet sich auf gleiche Weise, wie in (§. 7), wenn man erwägt, dass

$$\int_0^1 x^{2r+1}\sqrt{(1-x^2)}\,dx = \frac{2.4.6\ldots..2r}{3.5.7\ldots..(2r+3)},$$

ist:

$$(27.)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{k\varphi'(0)}{1^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{1^2.3^2}+\ldots..+\frac{1}{2r+3}\cdot\frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\ldots(2r+1)^2}+\ldots=\int_0^1\varphi(kx)\sqrt{(1-x^2)}dx.$$

Hieraus folgt

$$(28.)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{k\psi'(z)}{1^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{k^3\psi^{(3)}(z)}{1^2.3^2}+\ldots..+\frac{1}{2r+3}\cdot\frac{k^{2r+1}\psi^{(2r+1)}(z)}{3^2.5^2\ldots(2r+1)^2}+\ldots=\int_0^1\psi(z+kx)\sqrt{(1-x^2)}dx$$

wenn $\psi(z)=0$, $\psi^{(2)}(z)=0$, $\psi^{(4)}(z)=0$, ... und von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$ die Reihe

$$\frac{kx\psi'(z)}{1}+\frac{(kx)^3\psi^{(3)}(z)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+kx)$ endlich ist.

Durch Integration nach k ergeben sich aus allen diesen Formeln neue Ausdrücke.

§. 9.

Ist von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$ die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\varphi(kx)$, $\varphi(kx)\log x$ endlich, so ist

$$\int_0^1\varphi(kx)\log x\,dx=\int_0^1\log x\left[\varphi(0)+\frac{k\varphi'(0)}{1}x+\frac{k^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots..\right]dx.$$

Aber

$$\int_0^1 x^r\log x.dx=-\frac{1}{(r+1)^2};$$

woraus sich unter den obigen Bedingungen:

$$(29.)\ \varphi(0)+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\varphi'(0)}{1}\cdot k+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\varphi''(0)}{1.2}\cdot k^2+\ldots..+\frac{1}{(r+1)^2}\cdot\frac{\varphi^{(r)}(0)}{1.2..r}\cdot k^r+\ldots=-\int_0^1\varphi(kx)\log x.dx.$$

ergiebt. Vorausgesetzt, dass die zweite Seite dieser Gleichung endlich sei, gilt diese Formel auch noch, wenn $\varphi(kx).\log x$ nicht endlich ist, für $x=0$.

Ist von $x=0$ bis $1-\varepsilon$ die Reihe

$$\psi(z)+\frac{kx\psi'(z)}{1}+\frac{(kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+kx)$, $\psi(z+kx)\log x$ endlich, so ist:

$$(30.)\ \psi(z)+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\psi'(z)}{1}\cdot k+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\psi''(z)}{1.2}\cdot k^2+\dots+\frac{1}{(r+1)^2}\cdot\frac{\psi^{(r)}(z)}{1.2\dots r}k^r+\dots=-\int_0^1\psi(z+kx)\log x.dx.$$

§. 10.

Setzt man voraus, dass für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{kx\,\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(kx)^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}+\dots\dots\dots$$

convergent und $e^{-x}\varphi(kx)\sqrt{x}$, so wie $\varphi(kx)$ endlich sei, und erwägt, dass

$$\int_0^\infty e^{-x}x^r\sqrt{(x dx)}=\int_0^\infty\frac{e^{-x}x^{r+1}}{\sqrt{x}}dx=\frac{(2r+1)(2r-1)\dots\dots 3.1}{2^{r+1}}\sqrt{\pi},$$

ist, so erhält man, auf die zur Genüge bezeichnete Weise:

$$(31.)\ \varphi(0)+k\varphi'(0)\frac{3}{2}+k\varphi''(0).\frac{3.5}{2.4}+\dots+k^r\varphi^{(r)}(0).\frac{3.5\dots(2r+1)}{2.4\dots\dots 2r}+\dots=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx).\sqrt{x}.dx$$

woraus

$$(32.)\ \psi(z)+k\psi'(z).\frac{3}{2}+k^2\psi''(z).\frac{3.5}{2.4}+\dots+k^r\psi^{(r)}(z).\frac{3.5\dots(2r+1)}{2.4\dots\dots 2r}+\dots=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\psi(z+kx).\sqrt{x}.dx$$

folgt, wenn die Reihe

$$\psi(z)+\frac{kx\,\psi'(z)}{1}+\frac{(kx)^2\,\psi''(z)}{1.2}+\dots\dots$$

für alle reellen positiven Werthe von x convergent ist und $e^{-x}\psi(z+kx)\sqrt{x}$, $\psi(z+kx)$ für dieselben Werthe endlich sind.

§. 11.

Die obigen Resultate würden sich leicht noch vervielfältigen lassen; es mögen aber die vorstehenden genügen. Hinsichtlich der Gültigkeit der Formeln (1) bis (32) ist indessen Folgendes zu bemerken.

Zunächst sind sie nur gültig unter den jedesmal am Anfange der Paragraphen ausgesprochenen Bedingungen; und dann auch nur, wenn die vorkommende unendliche Reihe convergent ist.

Denn es sei

$$Z_0+Z_1+Z_2+\dots\dots\dots\dots\dots+Z_r+\dots\dots$$

eine unendliche convergente Reihe, deren Summe $=Z$ ist, so ist die Summe

$$\int_a^b Z_0\,dz+\int_a^b Z_1\,dz+\int_a^b Z_2\,dz+\dots\dots+\int_a^b Z_r\,dz+\dots\dots\dots$$

$$=\int_a^b(Z_0+Z_1+Z_2+\dots\dots+Z_r+\dots\dots)dz=\int_a^b Z\,dz$$

offenbar nur insofern convergent als es

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \int_a^b Z_2 dz + \dots + \int_a^b Z_r dz + \dots +$$

ist. Denn wäre diese letztere Reihe nicht convergent, so könnte von ihrer Summe nicht die Rede sein; ist sie dagegen convergent, so folgt daraus, dass

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \dots + \int_a^b Z_n dz = \int_a^b (Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n) dz,$$

für jedes endliche n gilt; auch dass

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \dots \text{ in inf.} = \int_a^b (Z_0 + Z_1 + \dots \text{ in inf.}) dz = \int_a^b Z dz$$

sein muss. Umgekehrt also ist nur insofern

$$\int_a^b Z dz = \int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \dots + \int_a^b Z_n dz + \dots \text{ in inf.}$$

als die Reihen:

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \text{ in inf.}$$
$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \int_a^b Z_2 dz + \dots \text{ in inf.}$$

convergent sind.

Ferner ist jedesmal vorausgesetzt, dass die in den Formeln (**1** bis **32**) vorkommende Grösse unter dem Integralzeichen endlich sei, im ganzen Umfange der Integration. Diese Voraussetzung ist unerlässlich, wenn das bestimmte Integral Geltung haben soll. Jedoch ist sie für die untere Gränze selbst nicht unbedingt unerlässlich. Ist nämlich das bestimmte Integral endlich, so kann die Grösse unter dem Integralzeichen für die untere Gränze selbst, möglicher Weise nicht endlich sein, ohne dass die Gleichung aufhörte, gültig zu sein.

Im Folgenden sollen nun einige Anwendungen der Resultate gemacht werden.

§. 12.

Man setze in (7) $\varphi(x) = \cos x$, so ist

$$\varphi(0) = 1 \quad , \quad \varphi''(0) = -1 \quad , \quad \varphi^{(4)}(0) = 1 \,, \dots \varphi^{(2r)}(0) = (-1)^r,$$

also

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots \dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\, dy\, dx \,,$$

weil diese Reihe convergirt und bekanntlich $= -(e^{-1} - 1) = \dfrac{e-1}{e}$ ist.

Setzt man $y = z$, so erhält man

$$\int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\,dy = 2\int_0^1 z\cos(2xz)\,dz\,.$$

Es ist aber $\int z\cos(2xz)\,dz = \frac{z\sin(2xz)}{2x} - \int \frac{\sin(2xz)}{2x}dz$

$$= \frac{z\sin(2xz)}{2x} + \frac{\cos(2xz)}{4x^2}$$

$$\int_0^1 z\cos(2xz)\,dz = \frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos 2x}{4x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

$$\int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\,dy = \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\cos 2x}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}\sin 2x}{x}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)-1}{2x^2}e^{-x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}\sin 2x}{x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin^2 x}{x^2}e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\frac{(x\sin 2x - \sin^2 x)}{x}\,dx$$

also ist

$$\text{(33.)}\qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}.\frac{x\sin 2x - \sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}\,,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}(2x\cos x - \sin x)\sin x\,dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}\,.$$

Man setze in (5), $\varphi(x) = \cos x$, so ist

$$1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \cos(2xy)\,dy\,dx\,.$$

Aber

$$\int_0^1 \cos(2xy)\,dy = \frac{\sin(2x)}{2x}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \cos(2xy)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin 2x}{2x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx\,.$$

Ferner ist

$$1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} - \dots = \int_0^1 \left[1 - \frac{k^2}{1} + \frac{k^4}{1\cdot 2} - \dots\right]dk - \int_0^1 e^{-k^2}dk$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}\,.$$

Demnach ist

$$\text{(34.)}\qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}\,,$$

wodurch das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} \sin 2x\,dx$ auf ein anderes reducirt ist. Uebrigens ist auch

$$(35.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} \sin 2x\,dx = \sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-x^2}dx\ ,$$

d. h. der Werth des Integrals $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} \sin 2x\,dx$ liegt zwischen $\sqrt{\pi}$ und $\frac{\sqrt{\pi}}{e}$. Führt man diesen Werth in (33) ein, so ergiebt sich:

$$\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-x^2}dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\sin^2 x\,dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}\ .$$

$$(36.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\sin^2 x\,dx = \sqrt{\pi}\Big[\int_0^1 e^{-x^2}dx - \frac{e-1}{2e}\Big].$$

Man setze in (7) $\varphi(x) = e^x$, so ist

$$\int_0^1 \varphi(2x\sqrt{y})\,dy = \int_0^1 e^{2x\sqrt{y}}dy = 2\int_0^1 e^{2xz} z\,dz = \frac{1}{x}\Big[e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2x} + \frac{1}{2x}\Big].$$

Ferner ist $\varphi(0) = 1 = \varphi''(0) = \varphi^{(4)}(0) =$ u. s. f., und dann

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots = e - 1,\ \text{also:}$$

$$\sqrt{\pi}(e-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\Big[e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2x} + \frac{1}{2x}\Big]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2+2x}}{x}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x^2}(e^{2x}-1)\,dx.$$

Hieraus folgt

$$(37.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2+2x}}{x}\Big(1 - \frac{1}{2x}\Big)dx = \sqrt{\pi}(e-1) - \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx\ .$$

Bekanntlich ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.\,e^{2kx}\,dx = e^{k^2}\sqrt{\pi},$$

folglich, wenn man nach k integrirt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\Big(\frac{e^{2x}-1}{2x}\Big)dx = \sqrt{\pi}\int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Da nun $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}dx = 0$, so ist

$$(38.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}.\frac{dx}{x} = 2\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Integrirt man zweimal nach k, so ergiebt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2+2x}}{2x^2}dx - \int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx = 2\sqrt{\pi}\int_0^1\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)dx.$$

Substituirt man diese Werthe in (37), so erhält man

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx - \int_0^1\int_0^x e^{x^2}dx.dx = \tfrac{1}{2}(e-1),$$

welche Beziehung auch leicht direct bewiesen werden kann, indem

$$\int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1\int_0^x e^{x^2}dx.dx = \int_0^1 [e^{x^2} - \int_0^x e^{x^2}dx]\,dx$$

ist.

Die Integrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_0^1 e^{x^2}dx$ lassen sich leicht in stark convergirende Reihen entwickeln. Es ist nemlich:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1.2.3.4} - \ldots\ldots = 0{,}7468241337.,$$

$$\int_0^1 e^{+x^2}dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1{,}4626517447.,$$

$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dx.dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{6.5}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{1}{8.7}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots = 0{,}6035108316.,$$

so dass

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}\sin 2x}{x}.dx = 0{,}7468241337\ldots\ldots\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}\sin^2 x}{x}.dx = \sqrt{\pi}\left[0{,}7468241337 + \frac{e-1}{2e}\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2x}.\frac{dx}{x} = 2\sqrt{\pi}.1{,}462651744,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}.\frac{dx}{2x^2} = \int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}\cdot dx = 2\sqrt{\pi}.0{,}603518316.$$

§. 13.

Man setze in (9) $\varphi x = \sin x$, so erhält man:

$$1 - \frac{k^2}{1} + \frac{k^4}{1.2} - \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x\sin(2kx)\,dx,$$
$$= e^{-k^2}$$

also

$$(39.)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}x\sin(2kx)\,dx = ke^{-k^2}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Integrirt man nach k zwischen den Gränzen **1** und **0**, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin^2 x\,.\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 xe^{-x^2}.\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{e-1}{e}\right);$$

wie bekannt

Durch Differentiation nach k folgt aus (39):

$$(40.)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^{n+1}\sin(2kx+\tfrac{1}{2}n\pi)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\cdot\frac{d^n(ke^{-k^2})}{dk^n},$$

also für $n=1$:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^2\cos(2kx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-2k^2)e^{-k^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^2\sin(2x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^2\cos(2x)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4e}.$$

u. s. f.

Setzt man in derselben Formel $\varphi(x) = e^x$, so erhält man:

$$(41.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2kx}.\,x\,dx = ke^{k^2}.\sqrt{\pi}.$$

Durch Differentation nach k findet sich

$$(42.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.\,e^{2kx}.\,x^{n+1}.\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\cdot\frac{d^n}{dk^n}(ke^{k^2}),$$

also für $n=1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.\,e^{2kx}.\,x^2.\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(1+2k^2)e^{k^2}.$$

Aus (12) folgt für $\varphi(x) = \sin x$:

$$(43.)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\sin^2(x\sqrt{k})\,dx = \frac{(1-e^{-k})\sqrt{\pi}}{4};$$

welche Formel auch aus (39) durch Integration hervorgeht.

Setzt man in diesen Formeln $x = z\sqrt{a}$ und transformirt die Resultate, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty e^{-az^2}.\,z\sin(2bz)\,dz = \frac{b}{a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{a}}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;\ \int_0^\infty e^{-az^2}.\,z^{n+1}\sin(2bz+\tfrac{1}{2}n\pi)dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}a\sqrt{a}}\cdot\frac{d^n}{db^n}\left(e^{-\frac{b^2}{a}}b\right).$$

$$(44.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}.\,e^{2bz}.\,z\,dz = \frac{b}{a\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{a}}.\sqrt{\pi}\,;\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}.\,e^{2bz}.\,z^{n+1}.\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n a\sqrt{a}}\cdot\frac{d^n}{db^n}\left(be^{\frac{b^2}{a}}\right),$$

für $a>o$. Durch Differentation nach a würde man hieraus neue Formeln erlangen. Nach dem, was sich in (§. 2) zeigte, gelten die aufgestellten Formeln ohne alle Einschränkung in Bezug auf k (oder b in (44)). Man setze daher in (44) ib statt b, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-az^2}.z(e^{2bz}-e^{-2bz})\,dz=\frac{b\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{a}},$$

$$\int_0^\infty e^{-az^2}.z\sin(2bz)\,dz=\frac{b\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Die letzte Formel ist die erste (44); die erste fällt mit der dritten (44) zusammen. Man setze aber $b=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ und beachte, dass

$$\sin(2bz)=\sin[2rz(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=\sin[2rz\cos\varphi+i.2rz\sin\varphi]$$
$$\tfrac{1}{2}(e^{-2rz\sin\varphi}+e^{2rz\sin\varphi})+\tfrac{1}{2}i.(e^{2rz\sin\varphi}-e^{-2rz\sin\varphi})\text{ und}$$

$$be^{-\frac{b^2}{a}}=re^{-\frac{r^2}{a}\cos2\varphi}\left[\cos\left\{\varphi-\frac{r^2}{a}\sin2\varphi\right\}+i\sin\left(\varphi-\frac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)\right]$$

ist, so erhält man:

$$(45.)\begin{cases}\int_0^\infty e^{-az^2}.z(e^{-2rz\sin\varphi}+e^{2rz\sin\varphi})\sin(2rz\cos\varphi)\,dz=\dfrac{re^{-\frac{r^2}{a}\cos2\varphi}\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}\cos\left(\varphi-\dfrac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)\\ \int_0^\infty e^{-az^2}.z(e^{+2rz\sin\varphi}-e^{-2rz\sin\varphi})\cos(2rz\cos\varphi)\,dz=\dfrac{re^{-\frac{r^2}{a}\cos2\varphi}\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}\sin\left(\varphi-\dfrac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)\end{cases}$$

für r und $a>0$. Da ferner

$$e^{2bz}=e^{2rz(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=e^{2rz\cos\varphi}[\cos(2rz\sin\varphi)+i\sin(2rz\sin\varphi)],\text{ und}$$

$$be^{\frac{b^2}{a}}=re^{\frac{r^2}{a}\cos2\varphi}\left\{\cos\left(\varphi+\frac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)\right\},$$

so findet sich:

$$(46.)\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-az^2}.e^{2rz\cos\varphi}\cos(2rz\sin\varphi).zdz=\dfrac{\sqrt{\pi}.re^{\frac{r^2}{a}\cos2\varphi}}{a\sqrt{a}}\cos\left(\varphi+\dfrac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-az^2}.e^{2rz\cos\varphi}\sin(2rz\sin\varphi).zdz=\dfrac{\sqrt{\pi}.re^{\frac{r^2}{a}\cos2\varphi}}{a\sqrt{a}}\sin\left(\varphi+\dfrac{r^2}{a}\sin2\varphi\right)\end{cases}$$

für r und $a>0$.

Die Differentialquotienten in (40) und (42) können nach den Formeln im (32. Bande d. J. Abhandlung 1) leicht entwickelt werden; da z. B.

$$\frac{d^n}{dk^n}(ke^{k^2})=k\frac{d^n}{dk^n}(e^{k^2})+n\frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}}(e^{k^2})\text{ ist.}$$

§. 14.

Setzt man in (14) $\varphi(x) = e^x$, so ist die Reihe convergent, so lange der Modul von k kleiner ist als 1. Unter dieser Voraussetzung ist also:

$$1 + \frac{1}{2}k + \frac{1.3}{2.4}k^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^3 + \dots\dots\dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-x}.e^{kx}.dx}{\sqrt{x}},$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(1-k)}}.$$

Demnach ist unter der eben genannten Annahme:

$$(47.) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}.e^{kx}.dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1-k)}} = \sqrt{\frac{\pi}{1-k}}.$$

Hieraus folgt

$$(48.) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}.x^n.e^{kx}.dx}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}\,\frac{d^n}{dk^n}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-k)}}\right):$$

welcher Differentialquotient nach bekannten Formeln berechnet werden kann.

Setzt man in (47) az statt x und $a > 0$, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{akz}.dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-k}}$$

oder

$$(49.) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{bz}.dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{a-b}},$$

wenn der Modul von b kleiner als a ist. Aus (49) folgt

$$(50.) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-az}.z^n.e^{bz}.dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\pi}\,\frac{d^n}{db^n}\left(\frac{1}{\sqrt{(a-b)}}\right).$$

Setzt man in (49) $b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und nimmt $r \genfrac{}{}{0pt}{}{>o}{<a}$, so ergiebt sich

$$(51.) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{rz\cos\varphi}}{\sqrt{z}}\cos(rz\sin\varphi)\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varrho}}\cos\tfrac{1}{2}\psi, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{rz\cos\varphi}}{\sqrt{z}}\sin(rz\sin\varphi)\,dz = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varrho}}\sin\tfrac{1}{2}\psi, \end{cases}$$

wenn $\varrho = \sqrt{[(a - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2]}$, $\cos\psi = \frac{a - r\cos\varphi}{\varrho}$, $\sin\psi = -\frac{r\sin\varphi}{\varrho}$ ist.

Setzt man in derselben Formel $\varphi(x) = e^x$, aber y^2 statt k, und integrirt in Bezug auf y, zwischen den Grenzen o und k, wo $k \gtreqless 1$, so ergiebt sich:

$$(52.)\quad \int_0^\infty\int_0^k \frac{e^{-x}.e^{xy^2}.dy.dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty\int_0^k \frac{e^{-x(1-y^2)}.dy.dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.\operatorname{arc}(\sin = k).$$

und für $k = 1$:

$$\int_0^\infty\int_0^1 \frac{e^{-x(1-y^2)}.dy.dx}{\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}.$$

§. 15.

Man setze in (17) $\varphi(x) = e^x$ und nehme den Modul von k kleiner als 1 an, so ist

$$1 + k + k^2 + \dots\dots\dots = \frac{1}{1-k} = \int_0^\infty e^{-x}.e^{kx}.dx;$$

wie bekannt. Daraus folgt $\int_0^\infty e^{-x}.x^n.e^{kx}.dx = \frac{d^n}{dk^n}\cdot\left(\frac{1}{1-k}\right)$.

Integrirt man nach k, so erhält man

$$(53.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{kx}).dx}{x} = -\lg(1-k),$$

wenn der Modul von k kleiner ist als 1.

Unter den nämlichen Bedingungen erhält man für k:

$$1 - k^2 + k^4 - k^6 + \dots\dots\dots = \frac{1}{1+k^2} = \int_0^\infty e^{-x}.\cos(kx)\,dx,$$

das heisst:

$$(54.)\quad \int_0^\infty e^{-x}.\cos(kx)\,dx = \frac{1}{1+k^2},$$

woraus

$$\int_0^\infty e^{-x}.x^n.\cos(kx + \tfrac{1}{2}n\pi)\,dx = \frac{d^n}{dk^n}\cdot\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$$

folgt. Aus (54) ergiebt sich:

$$(55.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}.\sin(kx).dx}{x} = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = k).$$

Eben so erhält man:

$$(56.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-x}.\sin(kx)\,dx = \frac{k}{1+k^2}, \text{ und} \\ \int_0^\infty e^{-x}.x^n.\sin(kx + \tfrac{1}{2}n\pi) = \frac{d^n}{dk^n}\cdot\frac{k}{1+k^2}, \end{cases}$$

und hieraus:

$$(57.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(1-\cos kx)\,dx = \frac{1}{2}\log(1+k^2), \\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\sin^2(kx)\,dx = \frac{1}{4}\log(1+4k^2), \end{cases}$$

wenn der Modul von k kleiner ist als $\frac{1}{2}$.

Die hier gefundenen Formeln sind grösstentheils bekannt; sie wurden nur aufgenommen, weil die obige Herleitung völlig direct ist. Auch sind die Formeln nun für ein imaginäres k eben sowohl erwiesen. Für ein positives k gelten die Ausdrücke (54 und 56) und die aus ihnen abgeleiteten Formeln auch über die Grenze $k=1$ hinaus, da die beiden Seiten der Gleichungen in diesem Falle über $k=1$ hinaus continuirlich bleiben. Die Differentialquotienten in (54 und 56) finden sich, wie in (§. 13), aus den Formeln in der Abhandlung 1. im 32. Bande d. J., wenn man zunächst die dortige Formel (10) anwendet.

§. 16.

Man setze in (21) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^{2n})}}$, so ist

$\varphi(0)=1, \varphi^{(2n)}(0)=1^2.3.4\ldots 2n, \ldots\ldots \varphi^{(2rn)}(0)=(1.3.5\ldots(2r-1))^2.(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn.$

und für $n=1$:

$$\varphi(0)=1,\ \varphi^{(2)}(0)=1^2,\ \ldots\ldots \varphi^{(2r)}(0)=(1.3\ldots\ldots(2r-1))^2\ldots\ldots;$$

alle übrigen von diesen Functionen sind Null. Unter der Bedingung, dass der Modul von k nicht grösser sei als $\frac{1}{2}$, findet sich:

$$1+\frac{k^{2n}.1^2.3.4\ldots 2n}{1^2.2^2\ldots n^2}+\frac{k^{4n}.1^2.3^2.5.6\ldots\ldots 4n}{1^2.2^2\ldots\ldots(2n^2)}+\ldots\ldots+\frac{k^{2rn}.1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2.(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots(rn)^2}+\ldots$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1-(2kx)^{2n}]}}.$$

Setzt man $\frac{1}{2}k$ statt k, so ergiebt sich:

$$(58'.)\quad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^{2n}x^{2n})]}}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi}}=$$

$$\tfrac{1}{2}\pi\Big[1+(\tfrac{1}{2}k)^{2n}.\frac{1^2.3.4\ldots 2n}{1^2.2^2\ldots n^2}+(\tfrac{1}{2}k)^{4n}.\frac{1^2.3^2.5.6\ldots 4n}{1^2.2^2\ldots\ldots(2n)^2}+\ldots+(\tfrac{1}{2}k)^{2rn}.\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots(rn)^2}+\ldots\Big]$$

Setzt man $n=1$, so erhält man:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}=\tfrac{1}{2}\pi\left[1+(\tfrac{1}{2}k)\cdot\frac{1^2}{1^2}+(\tfrac{1}{2}k)^4\cdot\frac{1^2.3^2}{1^2.2^2}+\dots+(\tfrac{1}{2}k)^{2r}\cdot\frac{1^2.3^2\dots(2r-1)^2}{1^2.2^2\dots r^2}+\dots\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\left[1+\frac{k^2\cdot1^2}{2^2}+\frac{k^4\cdot1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}+\dots+\frac{k^{2r}\cdot1^2\cdot3^2\dots(2r-1)^2}{2^2\cdot4^2\dots(2r)^2}+\dots\right];$$

wie bekannt. (Man sehe z. B. d. J. Bd. 19 S. 51, Formel (1)). Die Formel (58′) lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$(58.)\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi)}}=\tfrac{1}{2}\pi\left[1+\frac{k^{2n}\cdot1^2\cdot3\cdot4\dots2n}{2^2\cdot4^2\dots(2n)^2}+\dots+\frac{k^{2rn}\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\dots(2r-1)^2(2r+1)(2r+2)\dots2rn}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\dots\dots(2rn)^2}+\dots\right];$$

und sie gilt, wenn der Modul von k nicht grösser ist als 1.

Man setze in derselben Formel $\varphi(x)=\sqrt{(1-x^{2n})}$, so sind die Functionen $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... alle Null, bis auf die folgenden:

$$\varphi(0)=1,\varphi^{(2n)}(0)=-\frac{1\cdot2\dots2n}{2},\dots\varphi^{(2rn)}(0)=(2r-1)[1.3.5\dots(2r-3)]^2(2r+1)(2r+2)\dots2rn,\dots$$

Demnach ist

$$(59.)\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi)}\,d\varphi=\tfrac{1}{2}\pi\left[1-\frac{k^{2n}\cdot1\cdot3\cdot4\dots2n}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\dots(2n)^2}-\dots-\frac{k^{2rn}(2r-1)\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\dots(2r-3)^2(2r+1)(2r+2)\dots2rn}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\dots\dots(2rn)^4}-\dots\right]$$

so lange der Modul von k nicht >1 ist. Für $n=1$ erhält man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\tfrac{1}{2}\pi\left[1-\frac{k^2\cdot1}{2^2}-\frac{k^4\cdot1^2\cdot3}{2^2\cdot4^2}-\dots-\frac{k^{2r}\cdot1^2\cdot3^2\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\dots(2r)^2}-\dots\right];$$

wie bekannt. (Man sehe die angeführte Stelle, Formel (2)).

§. 17.

In der Formel (23) setze man $\varphi(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^{2n})}}$, so erhält man:

$\varphi'(0)=1,\dots\varphi^{(2rn+1)}(0)=1^2.3^2.5^2\dots(2r-1)^2.(2r+1)(2r+2)\dots(2rn+1)$, also:

$$(60.)\quad\frac{k}{1}+\frac{k^{2n+1}}{3}\cdot\frac{4\cdot6\dots2n}{5\cdot7\dots(2n+1)}+\dots+\frac{k^{2rn+1}}{2r+1}\cdot\frac{(2r+2)(2r+4)\dots(2rn)}{(2r+3)(2r+5)\dots(2rn+1)}+\dots$$

$$=\int_0^1\frac{kx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^{2n})x^{2n})}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi)}}.$$

Für $n=1$ ist

$$(61.)\quad\frac{k}{1}+\frac{k^3}{3}+\frac{k^5}{5}+\frac{k^7}{7}+\dots=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^1\varphi}}=\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}.$$

Die Gleichung (61) gilt, wenn der Modul von k kleiner ist als 1, und auch für $k=\pm i$.

Für $n=2$ ist

$$\frac{k}{1}+\frac{k^5}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{k^9}{5}\cdot\frac{6.8}{7.9}+\ldots\ldots+\frac{k^{4r+1}}{2r+1}\cdot\frac{(2r+2)(2r+4)\ldots.4r}{(2r+3)(2r+5)\ldots.(4r+1)}+\ldots.=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^4\sin^4\varphi)}}.$$

Diese Formel, so wie die (60), gilt unter den gleichen Bedingungen, wie (61).

Setzt man in (61) ik statt k, so ist die Formel gültig, wenn der Modul von k kleiner ist als 1, und auch noch für ± 1, und es ist:

$$\frac{k}{1}-\frac{k^3}{3}+\frac{k^5}{5}-\ldots\ldots=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\varphi)}},\quad \text{d. h.}$$

$$(62.)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\varphi)}}=\frac{1}{k}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)$$

Für ein reelles k gilt (62) auch über $k=\pm 1$ hinaus. Für $k=0$ gilt (62) ebenfalls noch.

Aus (62) erhält man

$$(63.)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^3\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\varphi)^3}}=\frac{1}{k^3}\left[\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)-\frac{k}{1+k^2}\right].$$

wenn k reell und >0, oder wenn k imaginär und sein Modul <1 ist.

Setzt man in derselben Formel $\varphi(x)=x\sqrt{(1-x^{2n})}$, so erhält man

$$\varphi(0)=1\,,\ \varphi^{(2n+1)}(0)=-3.4\ldots..(2n+1)\,,\ \ldots..$$

$$\varphi^{(2rn+1)}(0)=-[3.5\ldots..(2r-3)]^2(2r+1)(2r+2)\ldots..(2rn+1)(2r-1),\ldots$$

also

$$(64.)\qquad k-\frac{k^{2n+1}}{1.3}\cdot\frac{4.6\ldots..2n}{5.7\ldots(2n+1)}-\ldots-\frac{k^{2rn+1}}{(2r-1)(2r+1)}\cdot\frac{(2r+2)(2r+4)\ldots..2rn}{(2r+3)(2r+5)\ldots(2rn+1)}-\ldots..$$

$$=\int_0^1\frac{kx\sqrt{(1-k^{2n}x^{2n})}}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}k\sin\varphi\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi}\,d\varphi\,,$$

wenn der Modul von k nicht grösser ist als 1.

Für $n=1$ erhält man:

$$k-\frac{k^3}{1.3}-\frac{k^5}{3.5}-\frac{k^7}{5.7}-\ldots\ldots=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}k\sin\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Nun ist

$$\int\sin\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi=-\tfrac{1}{2}\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}-\frac{1-k^2}{2k}\log(k\cos\varphi+(1-k^2\sin^2\varphi))$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{1-k^2}{2k}\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}+\frac{1}{2}\,;$$

demnach ist

$$(65.)\quad \frac{k^3}{1\cdot3}+\frac{k^5}{3\cdot5}+\frac{k^7}{5\cdot7}+\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}(1-k^2)\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}\,.$$

wenn der Modul von k nicht >1 ist. Für $k=1$ ergiebt sich

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}\,.$$

Setzt man in (65) ki statt k und erwägt dass

$$\log\sqrt{\left(\frac{1+ki}{1-ki}\right)}=i\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)\,,$$

ist, so erhält man:

$$(66.)\quad \frac{k^3}{1\cdot3}-\frac{k^5}{3\cdot5}+\frac{k^7}{5\cdot7}-\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}(1+k^2)\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)-\tfrac{1}{2}k\,.$$

wenn der Modul von k nicht >1 ist. Für $k=1$ findet sich

$$\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\tfrac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\,.$$

Aus (65 und 66) ergiebt sich leicht:

$$\frac{k^3}{1\cdot3}+\frac{k^7}{5\cdot7}+\frac{k^{11}}{9\cdot11}+\ldots=\tfrac{1}{4}(1+k^2)\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)-\tfrac{1}{4}(1-k^2)\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}\,,$$

$$(67.)\quad \frac{k^5}{3\cdot5}+\frac{k^9}{7\cdot9}+\frac{k^{13}}{11\cdot13}+\ldots=\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{4}(1-k^2)\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}-\tfrac{1}{4}(1+k^2)\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)\,,$$

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+\ldots\ldots=\tfrac{1}{8}\pi$$

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{11\cdot13}+\ldots\ldots=\frac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\pi\,.$$

Einige dieser Ausdrücke können auch auf eine von der vorigen verschiedene Art gefunden werden; was jedoch hier übergangen werden darf. Setzt man $k=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so erhält man neue Formeln aus den gegebenen, die sich leicht aufstellen lassen, wesshalb sie hier nicht herzusetzen nöthig sind.

§. 18.

Aehnliche Substitutionen sind noch in der Formel (25) zu machen. Setzt man in derselben $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, so erhält man:

$$1+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2}+\frac{k^4}{3}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}}{r+1}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots2r^2}+\ldots\ldots=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-k^2x^2)}}dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,.$$

Ist $K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}$, $E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi.d\varphi)}$, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}=K-\frac{K-E}{k^2},$$

also

$$(68.)\quad 1+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2}+\frac{k^4}{3}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\dots+\frac{k^{2r}}{r+1}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2\dots(2r-1)^2}{2^2.4^2.6^2\dots(2r)^2}+\dots=\frac{4}{\pi}\left[K-\frac{K-E}{k^2}\right].$$

Die Werthe von K und E sind aus den Tafeln in *Légendre's* „Traité des fonctions elliptiques" als bekannt zu betrachten.

Für $k=1$ ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\varphi.d\varphi=1,$$

also

$$(69.)\quad 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3^2}{2^2.4^2}+\dots+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{1^2.3^2\dots(2r-1)^2}{2^2.4^2\dots 2r^2}+\dots=\frac{4}{\pi}.$$

In der Formel (68) darf der Modul von k nicht >1 sein.

In die nämliche Formel setze man $\varphi(x)=\sqrt{(1-x)^2}$, so erhält man:

$$1-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{k^4}{3}\cdot\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\dots-\frac{k^{2r}}{(r+1)}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2.6^2\dots\dots(2r)^2}-\dots=\frac{4}{\pi}\int_0^1\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\varphi\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\varphi\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2\varphi.\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi$$

$$=E-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi}}+k^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}.d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}=\frac{K-E}{k^2},\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}d\varphi=\frac{2(1+k^2)}{3k^4}\cdot(K-E)-\frac{K}{3k^2};$$

demnach ist:

$$(70.)\quad 1-\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{k^4}{3}\cdot\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\dots-\frac{k^{2r}}{r+1}\cdot\frac{1^2.3^2\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2\dots\dots(2r)^2}-\dots=\left[\frac{(E-K)(1-k^2)}{3k^2}+\frac{2E}{3}\right]\frac{4}{\pi}$$

und für $k=1$:

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\dots-\frac{1}{r+1}\cdot\frac{1^2.3^2\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2\dots\dots(2r)^2}-\dots=\frac{8}{3\pi}.$$

§. 19.

Man setze in der Formel (27) $x\sqrt{(1-x^2)} = \varphi(x)$, so ergiebt sich:
$\varphi'(0) = 1, \varphi^3(0) = -3, \ldots\ldots \varphi^{(2r+1)}(0) = -1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2r-3)^2(2r-1)(2r+1)$, also:

$$\frac{k}{3} - \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} - \ldots\ldots - \frac{k^{2r+1}}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} - \ldots\ldots = \int_0^1 kx\sqrt{(1-k^2x^2)}\sqrt{(1-x^2)}dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} k \sin\varphi \cos^2\varphi . \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} . d\varphi.$$

Nun ist

$$\int \sin\varphi \cos^2\varphi \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} . d\varphi = -\left(\frac{\cos^3\varphi}{4} + \frac{1-k^2}{8k^2}\cos\varphi\right)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$$
$$+ \frac{(1-k^2)^2}{8k^3}\log[k\cos\varphi + \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi} . d\varphi = \frac{1}{4} + \frac{1-k^2}{8k^2} + \frac{(1-k^2)^2}{8k^3}\log\sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k}\right)},$$

also

$$(71.)\ \frac{k}{3} - \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} - \ldots\ldots - \frac{k^{2r+1}}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} - \ldots\ldots = \frac{k}{4} + \frac{1-k^2}{8k} + \frac{(1-k^2)^2}{8k^2}\log\sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k}\right)}$$

und für $k = 1$:

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots\ldots = \frac{1}{12}.$$

Die Formel (71) gilt, wenn der Modul von k nicht > 1 ist. Setzt man ki statt k, so ergiebt sich:

$$\frac{k}{3} + \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} + \frac{k^7}{5.7.9} - \frac{k^9}{7.9.11} + \ldots\ldots = \frac{k}{4} - \frac{1+k^2}{8k} + \frac{(1+k^2)^2}{8k^2}\text{arc.}(\text{tang} = k),$$

$$(72.)\quad \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} + \frac{k^7}{5.7.9} - \frac{k^9}{7.9.11} + \ldots\ldots = \frac{(1+k^2)^2}{8k^2}\text{arc.}(\text{tg} = k) - \frac{k}{12} - \frac{1+k^2}{8k},$$

$$\frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} - \frac{1}{7.9.11} + \ldots\ldots = \tfrac{1}{8}\pi - \frac{1}{3}.$$

Durch Addition und Subtraction von (71 u. 72) erhält man leicht neue Formeln.

Man setze in derselben Formel $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, so ist:
$\varphi'(0) = 1$, $\varphi^{(3)}(0) = +3$, ... $\varphi^{(2r+1)}(0) = [1.3.5\ldots(2r-1)]^2(2r+1)$, und demnach:

$$\frac{k^1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{k^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{k^{2r+1}}{(2r+1)(2r+3)} + \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{kx.\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-k^2x^2)}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\cos^2\varphi . d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

Aber $\int \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}} = -\frac{\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{2k^2} + \frac{1-k^2}{2k^3}\log(k\cos\varphi+\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}),$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1-k^2}{2k^3}\log\sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k}\right)},$$

also

$$\frac{k}{1.3}+\frac{k^3}{3.5}+\frac{k^5}{5.7}+\dots+\frac{k^{2r+1}}{(2r+1)(2r+3)}+\dots = \frac{1}{2k}-\frac{1-k^2}{2k^2}.\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)};$$

was nichts anderes ist als die Formel (65).

§. 20.

Man setze in der Formel (31) k^2 statt k und integrire nach k, so erhält man

$$\varphi(0)\frac{k}{1}+k^3\varphi'(0).\frac{1}{2}+k^5\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\dots\dots+k^{2r+1}.\frac{1.3.5\dots\dots(2r-1)}{2.4.6\dots\dots\dots 2r}+\dots\dots$$

$$(73.)\qquad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\int_0^k\varphi(k^2x)\,dk.dx.$$

$$\varphi(0)+k^2\varphi'(0).\frac{1}{2}+\dots\dots+k^{2r}\frac{1.3.5\dots\dots(2r-1)}{2.4\dots\dots\dots 2r}+\dots\dots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\sqrt{x}}{k}\int_0\varphi(k^2x)\,dk.dx,$$

und, wenn man abermals integrirt:

$$(74.)\ \varphi(0).\frac{k}{1}+\frac{k^3}{3}\varphi'(0).\frac{1}{2}+\dots+\frac{k^{2r+1}}{2r+1}.\frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots\dots 2r}+\dots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\int_0^k\left[\frac{1}{k}\int_0^k\varphi(k^2x)\,dk\right]dk.dx.$$

Die Formel (73) gilt, wenn der Modul von $k<1$, die (74) wenn er nicht >1 ist.

Man setze in (73) $\varphi(x)=e^x$, so ist $\varphi(0)=1$, $\varphi(0)'=1$, u. s. f., also

$$\frac{k}{1}+k^3.\frac{1}{2}+k^5.\frac{1.3}{2.4}+\dots\dots = \frac{k}{\sqrt{(1-k^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\int_0^k e^{k^2x}\,dk.dx,$$

d. h.

$$(75.)\qquad \int_0^\infty\int_0^k e^{-x}.e^{k^2x}.\sqrt{x}.dk.dx = \frac{k}{\sqrt{(1-k^2)}}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

wenn der Modul von k kleiner als 1 ist.

Durch Differentiation findet sich hieraus:

$$(76.)\qquad \int_0^\infty e^{-x}.e^{k^2x}.\sqrt{x}.dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(1-k^2)^3}},$$

unter denselben Bedingungen. Setzt man ki statt k, so erhält man eine neue Formel.

Setzte man in (74) $\varphi(x) = e^x$, so wäre der Werth des dreifachen Integrals der Seite rechts gleich arc(sin $= k$). So ist z. B.

$$\int_0^\infty \int_0^1 \frac{1}{y} \int_0^y e^{-x} . \sqrt{x} . e^{k^2 x} . dz . dy . dx = \tfrac{1}{4}\pi^{\frac{3}{2}}.$$

Aus (76) erhält man

$$(77.)\quad \int_0^\infty e^{-x} . x^n . e^{\pm kx} . \sqrt{x} . dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} . \frac{d^n}{dk^n} . \left(\frac{1}{\sqrt{(1 \mp k)^3}}\right),$$

wenn der Modul von k kleiner als 1 ist. Für ein reelles $k > 0$ und wenn die unteren Zeichen gelten, findet diese Formel auch Statt, wenn $k > 1$. Der hier vorkommende Differentialquotient findet sich leicht nach bekannten Formeln.

Die vorstehenden Resultate, die sich leicht noch vermehren liessen, werden dienen, die Anwendbarkeit der allgemeinen Entwicklungen zu zeigen.

Sinsheim, im Februar 1847.