

Die 8 assoziierten Schnittpunkte von 3 Flächen 2. Ordnung.

Von

HERMANN NEUMANN in München.

1. Drei Flächen 2. Ordnung schneiden sich im allgemeinen in 8 „assozierten“ Punkten, und 7 beliebige Punkte des Raumes bestimmen den 8. assoziierten Punkt eindeutig. Dieser 8. Punkt kann auf vielfache Art konstruiert werden; es seien hier besonders die linearen Konstruktionen von Hesse, Caspari, Schröter, Piquet, Sturm und Zeuthen, sämtlich in J. f. Math. 99, und vor allem die von Reye in J. f. Math. 100 (auch in Reye, Geometrie der Lage III, 3. Aufl., S. 22, 4. Aufl., S. 227) hervorgehoben. Diese letztere sowie eine aus einem Satz von Hesse sich ergebende Konstruktion (Reye Geometrie der Lage III, 3. Aufl., S. 201) zeichnen sich durch Symmetrie des Aufbaus und Kürze aus, diese erfordert 21, jene 25 Ebenen.

2. Veranlaßt durch Herrn Döhlemann, will ich im folgenden eine Konstruktion des 8. assoziierten Punktes mit 12 Ebenen entwickeln, unter Anwendung eines Satzes von Weddle (Cambr. and Dublin Math. Journal 5, S. 58) aus dem Jahre 1850 (s. Reye, Geom. der Lage III. Abt., S. 197 der 3., S. 229 der 4. Aufl.):

„Von einem einfachen räumlichen Achteck, $1\,2\,3\,\dots\,8$, dessen Eckpunkte assoziiert sind, schneiden sich die 4 Paar Gegenebenen in 4 Strahlen einer Regelschar 2. Ordnung.“

Also:

$$\begin{array}{c} 1\,2\,3 \\ 5\,6\,7 \end{array} \Big\} = a, \quad \begin{array}{c} 2\,3\,4 \\ 6\,7\,8 \end{array} \Big\} = b, \quad \begin{array}{c} 3\,4\,5 \\ 7\,8\,1 \end{array} \Big\} = c, \quad \begin{array}{c} 4\,5\,6 \\ 8\,1\,2 \end{array} \Big\} = d$$

liegen in einer Regelschar.

In jeder der 8 Ebenen liegt demnach eine Leitgerade der Regelschar, die von den vier Geraden a, b, c, d geschnitten wird und die bzw. mit p_{123}, p_{234}, \dots bezeichnet sei.

3. Der 8. (gesuchte) Punkt muß durch die Konstruktion eindeutig festgelegt sein, was am kürzesten und natürlichsten durch die 8 Ebenen $1\,2\,3, 2\,3\,4, \dots, 7\,8\,1, 8\,1\,2$ geschieht. Die Ebenen $6\,7\,8, 7\,8\,1$ und $8\,1\,2$ sind unbekannt und können unabhängig voneinander konstruiert werden. Einfacher ist es jedoch mit Hilfe von einer, z. B. $6\,7\,8$, eine andere, z. B.

781, zu suchen. Darum soll, da von der Ebene 678 nur bekannt ist, daß sie dem Ebenenbüschel 67 angehört, an ihrer Stelle eine beliebige Ebene dieses Büschels — sie sei mit 67[8] bezeichnet — verwendet werden.

Die Ebene 67[8] schneide 23 in B . Durch B und $C = \begin{Bmatrix} 12 \\ 456 \end{Bmatrix}$ wird in 123 eine Gerade bestimmt, die zum Unterschied von der aus der Ebene 678 sich ergebenden mit p'_{123} bezeichnet sei. p'_{123} wird von 345 in D geschnitten, und die Ebene 7D1 ist demnach als die zu 67[8] gehörige 7[8]1 zu betrachten.

Läßt man nun die Ebene 67[8] den Ebenenbüschel um 67 durchlaufen, so wird auf 23 eine zu ihm perspektive Punktreihe (B) ausgeschnitten, p'_{123} beschreibt einen zu (B) perspektiven Strahlenbüschel um C , und dieser endlich liefert eine ihm perspektive Punktreihe (D), so daß schließlich die Punktreihe (D), gelegen auf $\begin{Bmatrix} 123 \\ 345 \end{Bmatrix}$, zum Ebenenbüschel 67 projektiv ist.

4. Durch die ursprünglich angenommene Ebene 67[8] wird aber auch in 456 eine p'_{456} bestimmt, nämlich durch die Punkte

$$\begin{Bmatrix} 56 \\ 123 \end{Bmatrix} = F \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} 234 \\ 67[8] \\ 456 \end{Bmatrix} = E.$$

Schneidet man p'_{456} mit 345, so erhält man einen Punkt G , und die Ebene 7G1 ist also die auf diesem Wege der angenommenen 67[8] zugeordnete 7[8]1. Läßt man 67[8] wieder den Büschel 67 durchlaufen, so erhält man auf 45 eine dazu projektive Punktreihe (G), die also auch zu (D) projektiv wird.

Daher sind die Ebenenbüschel 71D und 71G ebenfalls projektiv und haben zweimal entsprechende Ebenen gemeinsam. Das sind aber die Fälle — es wird gezeigt werden, daß einer dieser zwei Fälle auszuschließen ist —, wo die aus einer willkürlichen Annahme hervorgegangene Ebene 7[8]1 in die gesuchte 781 übergeht.

5. Wenn die Ebene 67[8] den Ebenenbüschel 67 durchläuft, geht sie einmal durch den Schnittpunkt J von 23 mit 456. In diesem Falle geht B in J , folglich p'_{123} in die Schnittgerade von 123 und 456 über; D fällt mit $\begin{Bmatrix} 45 \\ 123 \end{Bmatrix} = H$ zusammen. Zugleich tritt J an Stelle von E , also $\begin{Bmatrix} 123 \\ 456 \end{Bmatrix}$ an Stelle von p'_{456} und es fällt auch G mit H zusammen. Daraus ergibt sich, daß die Punktreihen (D) und (G) perspektiv sind.

Um das Zentrum S der Perspektivität zu erhalten, legt man zwei (beliebige) Ebenen durch 67, konstruiert die zugehörigen Punkte $D_1, G_1 - D_2, G_2$ und S als Schnitt von D_1G_1 mit D_2G_2 . Die Ebene 7S1 ist also die gesuchte Ebene 781.

6. Nun erhält man durch eine einzige Gerade, p_{123} , von der die Punkte $\left. \begin{matrix} 12 \\ 456 \end{matrix} \right\}$ und $\left. \begin{matrix} 345 \\ 781 \\ 123 \end{matrix} \right\}$ bekannt sind, einen Punkt von 678, nämlich den Schnittpunkt von p_{123} mit 234. Eine weitere Gerade, p_{234} , liefert 812, womit Punkt 8 gefunden ist.

Berücksichtigt man, daß p'_{123} mit $D_1 G_1$ und p'_{456} mit $D_2 G_2$ in je einer Ebene liegen, so findet man, daß die Konstruktion außer den Ebenen 123, 234, ..., 812 selbst noch vier Ebenen allein zur Ermittlung von 781, zwei Gerade zur Bestimmung von 678 und 812, in Summe 14 Ebenen erfordert; wobei eine in einer bereits gezählten Ebene gelegene Gerade für die Zählung einer (weiteren) Ebene gleichgesetzt wird.

7. Wir nehmen nun den speziellen Fall, wo 67[8] durch Punkt 5 geht, und erkennen, da die Ebene 675 (als 567) bereits gezählt ist, daß hierdurch eine Ebene erspart werden kann. S liegt dann auf der Ebene durch die drei Punkte $\left. \begin{matrix} 12 \\ 456 \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} 23 \\ 675 \end{matrix} \right\}$ und 5, die mit s_1 bezeichnet sei.

Ein weiterer spezieller Fall, durch den noch eine Ebene erspart werden könnte, ist nicht vorhanden, auf dem eingeschlagenen Weg kann die Konstruktion, die jetzt 13 Ebenen umfaßt, nicht weiter vereinfacht werden.

8. Wir beginnen die Konstruktion deshalb von vorn unter Vertauschung von 1 mit 7, 2 mit 6, 3 mit 5, indem wir diesmal [8]12 im Ebenenbüschel 12 beliebig annehmen und daraus in der Ebene 567 eine p'_{567} , in 234 eine p'_{234} bestimmen. Im weiteren Verlauf ergeben sich zwei den Punkten D_1 und G_1 analog gebildete Punkte, Δ_1 als Schnitt von p'_{567} mit 345 und Γ_1 als Schnitt von p'_{234} mit 34. Zuletzt findet man, wenn [8]12 den Ebenenbüschel 12 durchlaufen hat, in der Ebene 345 ein Perspektivitätszentrum der Punktreihen (Δ) auf $\left. \begin{matrix} 567 \\ 345 \end{matrix} \right\}$ und (Γ) auf 34, das mit Σ bezeichnet sei.

Wenn wir bei der zweimal vorzunehmenden Wahl einer Ebene [8]12 (Nr. 5, Schluß), das eine Mal den speziellen Fall nehmen, wo sie durch Punkt 3 geht, so haben wir wieder eine Konstruktion mit 13 Ebenen vor uns, weil 312 als Ebene 123 bereits gezählt ist. Man findet, daß Σ in einer Ebene s_2 liegt, welche durch die Punkte $\left. \begin{matrix} 67 \\ 234 \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} 56 \\ 123 \end{matrix} \right\}$ und 3 geht.

9. Um die bisher nur getrennt verwendbaren speziellen Fälle in einer einzigen Konstruktion zu vereinigen, muß gezeigt werden, daß Σ mit S zusammenfällt.

Die Ebene 675 des Ebenenbüschels 67 ergab die durch S gehende Ebene s_1 (Nr. 7), die den Punkt 5 der Punktreihe (D) mit dem ent-

sprechenden Punkt — er heiße G_5 — der Reihe (G) verband. Nehmen wir nun im Ebenenbüschel 1 2 die Ebene 5 1 2, so erhalten wir, da dann p'_{567} durch $\left. \begin{smallmatrix} 5\ 6 \\ 5\ 1\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \equiv 5$ geht und von 3 4 5 in demselben Punkt 5 geschnitten wird, diesmal Punkt 5 als Punkt der Reihe (Γ) und finden den zugehörigen Punkt der Reihe (Δ), wenn wir p'_{234} konstruieren (d. i.

$\left. \begin{smallmatrix} 2\ 3 \\ 5\ 6\ 7 \end{smallmatrix} \right\}$ mit $\left. \begin{smallmatrix} 2\ 3\ 4 \\ 4\ 5\ 6 \\ 5\ 1\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ verbinden) und mit 3 4 schneiden. Dieser Schnittpunkt

$p'_{234} \equiv \Delta_5$ liegt aber ebenfalls in ε_1 . Denn von der Schnittgeraden $\left. \begin{smallmatrix} 4\ 5\ 6 \\ 5\ 1\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ gehören die Punkte 5 und $\left. \begin{smallmatrix} 1\ 2 \\ 4\ 5\ 6 \end{smallmatrix} \right\}$ (s. Nr. 7) der Ebene ε_1 an. Also liegt

$\left. \begin{smallmatrix} 4\ 5\ 6 \\ 5\ 1\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ selbst und damit auch $\left. \begin{smallmatrix} 2\ 3\ 4 \\ 4\ 5\ 6 \\ 5\ 1\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ in ε_1 , und da auch $\left. \begin{smallmatrix} 2\ 3 \\ 5\ 6\ 7 \end{smallmatrix} \right\}$ ein Punkt

von ε_1 ist, so liegt die durch die letzten zwei Punkte bestimmte Gerade p'_{234} , schließlich also p'_{234} in ε_1 .

Da ε_1 demnach zwei sich entsprechende Punkte der Reihen (Γ) und (Δ) enthält, geht es (nach Nr. 8) durch Σ . Ebenso läßt sich zeigen, daß

ε_2 außer Σ auch S enthält, woraus dann folgt, daß $\left. \begin{smallmatrix} \varepsilon_1 \\ 3\ 4\ 5 \end{smallmatrix} \right\} \equiv \Sigma \equiv S$ ist.

10. Die Konstruktion erfordert nunmehr 12 Ebenen.

Dieselben sind im nachfolgenden Schema unterstrichen und zwar nur das erste Mal, wenn sie zur Bestimmung mehrerer Punkte dienen.)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 123 \\ 5 \\ 12 \\ 456 \\ 23 \\ 567 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 123 \\ 5 \\ 12 \\ 456 \\ 23 \\ 567 \end{array}} \right\} \equiv \underline{\varepsilon_1} \\
 \begin{array}{c} \underline{234} \\ \underline{345} \\ \underline{456} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \underline{567} \\ 3 \\ 67 \\ 234 \\ 56 \\ 123 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 567 \\ 3 \\ 67 \\ 234 \\ 56 \\ 123 \end{array}} \right\} \equiv \underline{\varepsilon_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 23 \\ 567 \\ 84 \\ 781 \\ 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 23 \\ 567 \\ 84 \\ 781 \\ 7 \end{array}} \right\} \equiv \underline{\pi_1} \\
 \begin{array}{c} \underline{234} \\ \underline{456} \end{array} \equiv \underline{812} \\
 \begin{array}{c} \underline{678} \\ \underline{456} \\ \underline{234} \end{array} \equiv \underline{\pi_2} \equiv \left\{ \begin{array}{c} 56 \\ 123 \\ 45 \\ 781 \end{array} \right\} \equiv 1 \text{ (beliebiger Punkt).}
 \end{array}$$