

Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise.

Von

A. Cohn in Berlin.

Das Problem, die Anzahl der im Innern eines Kreises gelegenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen, wird durch die Cauchysche Index- oder Kroneckersche Charakteristikentheorie auf die Ermittlung der Anzahl der reellen Wurzeln einer anderen Gleichung zurückgeführt¹⁾. Für den einfachsten und wichtigsten Fall des Kreises $|x| < R$, auf den man sich offenbar beschränken darf, gibt es aber eine Reihe von Methoden, die unter gewissen Voraussetzungen die Anzahl der in dem Kreise enthaltenen Wurzeln auf einfachere Art aufzufinden gestatten.

Außer einer Regel für trinomische Gleichungen von Herrn P. Bohl²⁾ sind hier vor allem einige Noten von Herrn M. Petrovitsch³⁾ zu nennen, der von der Voraussetzung ausgeht, daß man schon einen wurzelfreien Kreisring $R < |x| < R_1$ kennt.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die absoluten Beträge der Wurzeln sämtlich unterhalb einer gegebenen Schranke liegen, hat Herr I. Schur⁴⁾ abgeleitet. Die im I. Kapitel dieser Arbeit mitgeteilte Regel, die mit verhältnismäßig geringer Mühe die Zahl der im

¹⁾ Nach Ausführung einer linearen Transformation könnte man auch die von Routh („Die Dynamik der Systeme starrer Körper“, deutsche Ausgabe, Leipzig 1898, 2, §§ 290–307) sowie von Chipart und Liénard (C. R. 157 (1913), S. 837–840) für die Halbebene entwickelten Methoden anwenden.

²⁾ Math. Ann. 65 (1908), S. 556–566.

³⁾ C. R. 129 (1899), S. 583 u. 878; Bull. de la Société Math. de France 36 (1908), S. 141–150.

⁴⁾ „Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind“, Journ. f. Math. 147 (1917), S. 205–232, vgl. auch S. 387 des Aufsatzes: „Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten“, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 377–402.

Innern und die Anzahl der auf dem Rande eines Kreises gelegenen Wurzeln zu ermitteln gestattet, ist nur als eine Erweiterung seines Kriteriums zu betrachten.

Das Hauptresultat des II. Kapitels ist, daß die Anzahl der Wurzeln der Gleichung

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

deren absolute Beträge kleiner als 1 sind, durch die Zahl der positiven Quadrate dargestellt wird, die die Hermitesche Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} = & \sum_{\lambda=1}^n |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_\lambda x_n|^2 \\ & - \sum_{\lambda=1}^n |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda} x_n|^2 \end{aligned}$$

in der Normalform besitzt. Für den Fall, daß sich alle Wurzeln im Innern des Einheitskreises befinden, hat Herr I. Schur dieses Ergebnis durch funktionentheoretische Überlegungen aufgefunden⁵⁾.

Im III. Kapitel gebe ich einen Beweis eines im wesentlichen schon von Herrn Grace⁶⁾ herrührenden Kompositionssatzes für Gleichungen, deren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen, und einen daraus unmittelbar folgenden Beweis eines Kompositionssatzes von Herrn J. Egerváry⁷⁾ für Gleichungen mit nur reellen Wurzeln.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Professor I. Schur für seine Anregungen und für seinen Rat bei der Abfassung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel: Regel zur Ermittlung der Wurzelanzahl im Einheitskreise.

- § 1. Die Regel.
- § 2. Beweise.
- § 3. Anwendungen.

II. Kapitel: Die zu einem Polynom gehörende Hermitesche Form \mathfrak{H} .

- § 4. Darstellung der Wurzelanzahl durch \mathfrak{H} .
- § 5. Hilfssätze über Hermitesche Formen und Determinanten.

⁵⁾ Vgl. die (im Journ. f. Math. 148 (1918), S. 122–145 erschienene) Fortsetzung der ersten in der vorigen Fußnote zitierten Abhandlung, besonders S. 134–137.

⁶⁾ Proc. Cambridge Phil. Society 11 (1902), S. 352–357. Einen anderen Beweis hat Herr G. Szegö gegeben (Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 28–55).

⁷⁾ Erscheint demnächst.

§ 6. Die Resultante von g und g^* .

§ 7. Sturmsche Kette für die absoluten Beträge der Wurzeln.

§ 8. Eine Anwendung des Satzes I.

III. Kapitel: Kompositionssätze.

§ 9. Satz von Grace.

§ 10. Satz von Egerváry.

I. Kapitel.

Regel zur Ermittlung der Wurzelanzahl im Einheitskreise.

§ 1.

Die Regel.

1. Vorgelegt sei die Gleichung

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

und man setze

$$f^*(x) = x^n \bar{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \bar{a}_0.$$

Ist nun

I. Fall:

$$|a_0| > |a_n|,$$

so bilde man

$$\bar{a}_0 f(x) - a_n f^*(x) = x f_1(x) = 0.$$

Die Gleichung (1) hat dann eine Wurzel mehr im Innern des Einheitskreises als die Gleichung $(n-1)$ -ten Grades

$$f_1(x) = 0.$$

Ist aber

II. Fall:

$$|a_0| < |a_n|,$$

so bilde man

$$\bar{a}_n f(x) - a_0 f^*(x) = f_1(x) = 0.$$

Diese Gleichung höchstens $(n-1)$ -ten Grades besitzt im Innern des Einheitskreises ebenso viele Wurzeln wie die Gleichung (1).

Ist endlich $|a_0| = |a_n|$, so müssen zwei Fälle unterschieden werden.

III. Fall:

$$a_0 = \varepsilon \bar{a}_n, \quad a_1 = \varepsilon \bar{a}_{n-1}, \dots, a_{k-1} = \varepsilon \bar{a}_{n-k+1} \quad \left(|\varepsilon| = 1; k \leq \left[\frac{n}{2} \right] \right),$$

aber

$$a_k \neq \varepsilon \bar{a}_{n-k}.$$

Man setze dann

$$\frac{a_k - \varepsilon \bar{a}_{n-k}}{a_0} = b$$

und wende auf die Gleichung

$$\left(x^k + 2 \frac{b}{|b|}\right) f(x) = 0$$

die unter II vorgeschriebene Operation an. Man erhält dann sofort eine Gleichung n -ten Grades, die unter I gehört und im Innern des Einheitskreises die gleiche Anzahl Wurzeln besitzt wie die Gleichung (1).

IV. Fall:

$$a_\nu = \varepsilon \bar{a}_{n-\nu}, \quad (\nu = 0, 1, \dots, n; |\varepsilon| = 1).^*)$$

In diesem Fall hat die Gleichung

$$f_1(x) = x^{n-1} f' \left(\frac{1}{x} \right) = a_{n-1} x^{n-1} + 2 a_{n-2} x^{n-2} + \dots + (n-1) a_1 x + n a_0 = 0$$

ebenso viele Wurzeln im Innern des Einheitskreises wie die Gleichung (1).

2. Wendet man dieselbe Regel auf $f_1(x) = 0$ an, so gelangt man zu einer Gleichung höchstens $(n-2)$ -ten Grades $f_2(x) = 0$ usw., bis man nach höchstens $n-1$ Schritten auf eine Gleichung stößt, von der man weiß, wie viele Wurzeln sie im Innern des Einheitskreises besitzt.

3. Die Anzahl der auf dem Rande des Einheitskreises liegenden Wurzeln erhält man folgendermaßen:

Ist die Gleichung s -ten Grades

$$f_s(x) = 0$$

die erste unter IV fallende Gleichung, auf die man bei Anwendung unserer Regel stößt, und hat

$$f_{s+1}(x) = x^{n-1} f'_s \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

l Wurzeln im Innern des Einheitskreises, so besitzt die Gleichung (1) — und auch $f_s(x) = 0$ —

$$t_1 = s - 2l$$

Wurzeln vom absoluten Betrage 1.

4. Stellt sich bei Anwendung unserer Regel heraus, daß die zweite unter IV fallende Gleichung, auf welche die Regel führt, t_2 Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzt, so hat die Gleichung (1) mindestens $t_1 - t_2$ voneinander verschiedene Wurzeln auf der Peripherie des Einheitskreises.

*) Bei reellen Koeffizienten: Reziproke Gleichung.

§ 2.

Beweise.

1. Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Regel beruht auf einem oft gebrauchten

Hilfssatz^{o)}. Ist auf dem Rande eines Kreises K beständig

$$(2) \quad |\varphi(x)| > |\psi(x)|,$$

so verschwinden die beiden Polynome

$$\varphi(x)$$

und

$$\varphi(x) + \psi(x)$$

im Innern von K gleich oft.

Dieser auch noch für allgemeinere Bereiche und beliebige analytische Funktionen gültige Satz pflegt mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen zu werden, er ergibt sich aber auch sehr leicht aus der Stetigkeit der Wurzeln.

Versteht man nämlich unter λ einen der Bedingung

$$|\lambda| \leq 1$$

unterworfenen Parameter, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_\lambda(x) = \varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0$$

stetige Funktionen des Parameters λ . Die Anzahl der in K gelegenen Wurzeln dieser Gleichung könnte sich infolgedessen nur dadurch ändern, daß mindestens eine Wurzel die Peripherie des Kreises K überschreitet. Das ist aber nicht möglich. Denn wäre für einen Randpunkt x_1 von K und für

$$|\lambda_1| \leq 1$$

$$\Phi_{\lambda_1}(x_1) = \varphi(x_1) + \lambda_1\psi(x_1) = 0,$$

so würde daraus folgen

$$|\varphi(x_1)| \leq |\psi(x_1)|,$$

im Widerspruch mit der dem Satze zugrunde liegenden Voraussetzung (2). Die Polynome

$$\Phi_0(x) = \varphi(x)$$

und

$$\Phi_1(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

haben daher im Innern von K die gleiche Anzahl von Nullstellen.

^{o)} Man vgl. Rouché, „Mémoire sur la série de Lagrange“, Journal de l'école polytechnique 22 (Heft 39), (1862), S. 217--218.

2. Die Gleichungen

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

und

$$f^*(x) = x^n \bar{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 = 0$$

besitzen dieselben Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ vom absoluten Betrage 1. Setzt man

$$\prod_{i=1}^r (x - \alpha_i) = \chi(x)$$

und

$$f(x) = \chi(x) \cdot F(x),$$

$$f^*(x) = \prod_{i=1}^r (-\bar{\alpha}_i) \cdot \chi(x) \cdot F^*(x),$$

so ist für $|x| = 1$

$$|F(x)| = \left| x^{n-r} F\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |F^*(x)| \neq 0.$$

Wenn daher $|\lambda| < 1$ ist, so hat man auf dem Rande des Einheitskreises

$$|F(x)| > |\lambda F^*(x)|,$$

daher verschwinden die Polynome

$$F(x), \\ F(x) + \lambda F^*(x)$$

nach dem eben bewiesenen Hilfssatz im Innern des Einheitskreises gleich oft. Die Zahl dieser Nullstellen ändert sich nicht, wenn man mit $\chi(x)$ multipliziert. Damit erhalten wir das Resultat:

Für $|\lambda| < 1$ haben die beiden Gleichungen

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(x) + \lambda f^*(x) = 0$$

die gleiche Anzahl Wurzeln im Innern des Einheitskreises.

Aus diesem Satze ergibt sich die Regel des vorigen Paragraphen für die Fälle

I. $|a_0| > |a_n|$ und

II. $|a_0| < |a_n|$

unmittelbar. Ist aber $|a_0| = |a_n|$, so liegt es nahe, die Gleichung (1) mit einem Faktor zu multiplizieren, dessen Wurzeln nicht im Einheitskreis liegen, durch den aber aus der Gleichung (1) eine unter I oder II fallende Gleichung entsteht.

3. Bestehen zwischen den Koeffizienten der Gl. (1) die Relationen

$$a_0 = \varepsilon \bar{a}_n, \quad a_1 = \varepsilon \bar{a}_{n-1}, \quad \dots, \quad a_{k-1} = \varepsilon \bar{a}_{n-k+1},$$

8*

aber

$$k \leq \left[\frac{n}{2} \right], \quad a_k \neq \varepsilon \bar{a}_{n-k} \quad (|\varepsilon| = 1) \quad (\text{Fall III}),$$

so wird

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^k + \gamma) f(x) && (|\gamma| > 1) \\ &= \varepsilon \bar{a}_n x^{n+k} + \varepsilon \bar{a}_{n-1} x^{n+k-1} + \dots + \varepsilon \bar{a}_{n-k+1} x^{n+1} \\ &\quad + (\gamma \varepsilon \bar{a}_n + a_k) x^n + \dots + (\gamma a_{n-k} + a_n) x^k \\ &\quad + \gamma a_{n-k+1} x^{k-1} + \dots + \gamma a_n = 0 \end{aligned}$$

eine zu II gehörige Gleichung, die im Innern des Einheitskreises (und auch auf seiner Peripherie) ebenso viele Wurzeln besitzt wie $f(x) = 0$. Nach II hat man zu bilden

$$\begin{aligned} g(x) &= \bar{\gamma} \bar{a}_n G(x) - \varepsilon \bar{a}_n G^*(x) \\ &= \bar{a}_n \{ (\gamma \bar{\gamma} - 1) \varepsilon \bar{a}_n + \bar{\gamma} (a_k - \varepsilon \bar{a}_{n-k}) \} x^n + \dots + (\gamma \bar{\gamma} - 1) a_n \}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$b = \frac{a_k - \varepsilon \bar{a}_{n-k}}{\varepsilon \bar{a}_n} \neq 0$$

und wählt

$$\gamma = \frac{2b}{|b|},$$

so erhält man

$$\frac{1}{\bar{a}_n} g(x) = (3 + 2|b|) a_0 x^n + \dots + 3a_n = 0,$$

und diese Gleichung n -ten Grades, die ebenso viele Wurzeln im Einheitskreis besitzt wie Gleichung (1), läßt sich nach dem I. Teil unserer Regel reduzieren.

Existiert kein Index k , für den $a_k \neq \varepsilon \bar{a}_{n-k}$ ist, so führt der eben benutzte Kunstgriff nicht zum Ziel, denn es ist dann

$$(3) \quad \bar{a}_n f(x) - a_n f^*(x) \equiv 0.$$

Wir kommen damit zu Fall IV.

4. Ich beweise zunächst den folgenden

Hilfssatz. Zu jedem Polynom $\varphi(x)$ gibt es eine (beliebig klein wählbare) reelle Zahl

$$\xi > 0,$$

so daß das Polynom

$$\varphi_\xi(x) = \varphi(x) - \xi x \varphi'(x)$$

im Innern des Einheitskreises genau ebensooft verschwindet wie $\varphi(x)$.

Liegt keine Nullstelle von $\varphi(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises, so ist dieser Hilfssatz trivial. Es kommt aber darauf an, zu zeigen, daß die auf der Peripherie gelegenen Nullstellen, solange ξ hinreichend klein bleibt, nicht in das Innere des Einheitskreises hineinrücken.

Sei α eine ν -fache Wurzel von $\varphi(x) = 0$, dann ist also

$$\varphi(x) = (x - \alpha)^\nu \psi(x) \quad (\psi(\alpha) \neq 0)$$

und

$$\varphi_\xi(x) = \varphi(x) - \xi x \varphi'(x) = (x - \alpha)^{\nu-1} h(x),$$

wobei

$$(4) \quad h(x) = [(1 - \nu \xi)x - \alpha] \psi(x) - \xi x(x - \alpha) \psi'(x)$$

gesetzt ist. $\varphi_\xi(x) = 0$ besitzt die Wurzel α $(\nu - 1)$ -fach. Ich werde zeigen, daß die ν -te α entsprechende Wurzel, dieser Gleichung für kleine Werte von ξ im Kreis K_ξ mit dem Mittelpunkt

$$(1 + \nu \xi) \alpha$$

und dem Radius

$$\frac{|\alpha|}{2} \xi$$

liegt, woraus folgt, daß sie von größerem absoluten Betrage als α ist.

Man wähle zunächst ξ so klein, daß $\psi(x)$ nur außerhalb von K_ξ verschwindet und die Wurzel

$$\frac{\alpha}{1 - \nu \xi} = (1 + \nu \xi) \alpha + \frac{\alpha \nu^2 \xi^2}{1 - \nu \xi}$$

der Gleichung

$$[(1 - \nu \xi)x - \alpha] \psi(x) = 0$$

innerhalb des Kreises K_ξ liegt. Diese Gleichung besitzt dann also genau eine Wurzel in K_ξ . Um nun nachzuweisen, daß das Polynom (4) in K_ξ genau einmal verschwindet, genügt es zu zeigen, daß für kleine Werte von ξ auf dem Rande von K_ξ , also für

$$x = (1 + \nu \xi) \alpha + \varepsilon \xi \quad \left(\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2} e^{i\varphi} \right),$$

$$|\{(1 - \nu \xi)x - \alpha\} \psi(x)| > |\xi x(x - \alpha) \psi'(x)|$$

ist. Danach müßte sein

$$|\{(1 - \nu \xi)[(1 + \nu \xi)\alpha + \varepsilon \xi] - \alpha\} \psi| > |\xi^2 [(1 + \nu \xi)\alpha + \varepsilon \xi] (\nu \alpha + \varepsilon) \psi'|$$

oder

$$|[\varepsilon - \nu(\nu \alpha + \varepsilon)\xi] \psi| > \xi |[(1 + \nu \xi)\alpha + \varepsilon \xi] (\nu \alpha + \varepsilon) \psi'|,$$

und das läßt sich durch genügend kleine Wahl von $\xi > 0$ tatsächlich erreichen.

5. Sei nun $f(x) = 0$ eine Gleichung, für die die Identität (3) gilt. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz gibt es eine positive Zahl $\xi < \frac{1}{n}$, so daß die Gleichung

$$(5) \quad f(x) - \xi x f'(x) = (1 - n\xi) a_0 x^n + \dots + a_n = 0$$

im Innern des Einheitskreises dieselbe Anzahl Wurzeln besitzt wie $f(x) = 0$. Die Gleichung (5) gehört, da

$$|a_0| = |a_n|, \quad \text{also} \quad (1 - n\xi)|a_0| < |a_n|$$

ist, unter II. Infolgedessen hat die Gleichung

$$(6) \quad \varphi(x) = \bar{a}_n [f(x) - \xi x f'(x)] - (1 - n\xi) a_0 [f(x) - \xi x f'(x)]^* = 0$$

innerhalb des Einheitskreises die nämliche Anzahl Wurzeln wie

$$f(x) = 0.$$

Man erhält nach einigen auf der Identität (3) beruhenden Umformungen¹⁰⁾

$$\varphi(x) = a_0 \xi (2 - n\xi) f'^*(x).$$

Damit ist also bewiesen:

Im Fall IV haben $f(x) = 0$ und $f'^(x) = 0$ im Innern des Einheitskreises die gleiche Anzahl Wurzeln.*

Da die Wurzeln der Gleichung

$$(7) \quad x^{n-1} f' \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

aus denen von

$$f'^*(x) = x^{n-1} \bar{f}' \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

durch Übergang zu den konjugiert komplexen Werten entstehen, kann auch die Gleichung (7) zur Ermittlung der Wurzelzahl der Gleichung (1) dienen.

6. Wir wenden uns jetzt zur Rechtfertigung der Regel für die Zahl der Nullstellen auf dem Rande des Einheitskreises.

Aus den Überlegungen in 2 geht hervor, daß in den Fällen I bis III $f(x) = 0$ und $f'_1(x) = 0$ für $|x| = 1$ dieselben Wurzeln besitzen. Solange sich daher die Reduktion der vorgelegten Gleichung nach den Vorschriften I bis III vollzieht, kann man die neu entstehenden Gleichungen statt der ursprünglichen der Rechnung zugrunde legen.

¹⁰⁾ Die Rechnung soll hier vollständig durchgeführt werden. Zunächst ist $[f(x) - \xi x f'(x)]^* = \bar{a}_n x^n + (1 - \xi) \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + (1 - n\xi) \bar{a}_0 = f'^*(x) - \xi f'^*(x)$, so daß man für (6) erhält

$$\begin{aligned} & \bar{a}_n [f(x) - \xi x f'(x)] - (1 - n\xi) a_0 [f'^*(x) - \xi f'^*(x)] \\ &= \bar{a}_n f(x) - a_0 f'^*(x) + \xi [n a_0 f'^*(x) - \bar{a}_n x f'(x)] + \xi a_0 f'^*(x) - \xi^2 n a_0 f'^*(x). \end{aligned}$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} n a_0 f'^*(x) - \bar{a}_n x f'(x) &= a_0 (\bar{a}_{n-1} x^{n-1} + 2 \bar{a}_{n-2} x^{n-2} + \dots + n \bar{a}_0) \\ &= a_0 f'^*(x). \end{aligned}$$

Gleichung (6) nimmt daher die Form an:

$$\varphi(x) = a_0 \xi (2 - n\xi) f'^*(x).$$

Sei nun die Gleichung s -ten Grades

$$(8) \quad f_\sigma(x) = 0$$

die erste unter IV gehörende Gleichung, zu der man gelangt. Besitzt sie die Wurzel α , so ist auch $\frac{1}{\alpha}$ eine Wurzel. Die Gleichung (8) hat daher ebenso viele Wurzeln im Innern des Einheitskreises wie außerhalb desselben. Ist l die nach Vorschrift IV usw. berechnete Anzahl der im Innern gelegenen Wurzeln, so müssen, da die Gleichung (8) im ganzen s Wurzeln hat,

$$t_1 = s - 2l$$

von ihnen auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Zur Bestimmung von l wird nach IV die Gleichung

$$f_{\sigma+1} = x^{s-1} f'_\sigma \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

benutzt, an deren Stelle auch

$$(9) \quad f_\sigma^{**}(x) = x^{s-1} f'_\sigma \left(\frac{1}{x} \right) = f_{\sigma+1} = 0$$

treten kann. Die Gleichung (9) hat dieselben Wurzeln vom absoluten Betrage 1 wie

$$f'_\sigma(x) = 0.$$

Die mehrfachen auf dem Rande gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$(1) \quad f(x) = 0$$

kommen daher — in einer um eine Einheit verminderten Vielfachheit — unter denen der Gleichung (9) vor. Besitzt also die Gleichung (9) t_2 Wurzeln vom absoluten Betrage 1, so beträgt die Anzahl N der verschiedenen, auf dem Rande liegenden Wurzeln von (1) mindestens $t_1 - t_2$. Soll

$$N = t_1 - t_2$$

sein, so muß jede auf der Peripherie gelegene Wurzel von (9) auch die Gleichung (1) befriedigen.

§ 3.

Anwendungen.

1. Jede Gleichung, deren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen, möge kurz als Gleichung der Klasse K („ K -Gleichung“) bezeichnet werden.

Aus dem I. Teil unserer Regel aus § 1 ergibt sich unmittelbar ein von Herrn I. Schur herrührender Satz:

Dann und nur dann gehört die Gleichung

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

zur Klasse K , wenn die Gleichung

$$(10) \quad f_1(x) = \frac{1}{x} \left(\bar{a}_0 f(x) - a_n x^n \bar{f}\left(\frac{1}{x}\right) \right) = a_0^{(1)} x^{n-1} + a_1^{(1)} x^{n-2} + \dots + a_{n-1}^{(1)} = 0$$

dieselbe Eigenschaft besitzt und

$$(11) \quad |a_0| > |a_n|$$

ist.

Um diesen Satz auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten der Gleichung (1) eine monoton abnehmende Folge reeller, positiver Zahlen bilden:

$$(12) \quad a_0 > a_1 > \dots > a_{n-1} > a_n > 0.$$

Die Bedingung (11) ist dann erfüllt. Da aus (12) folgt

$$-a_n > -a_{n-1} > \dots > -a_1 > -a_0,$$

so werden die Koeffizienten

$$a_\nu^{(1)} = a_0 a_\nu - a_n a_{n-\nu}, \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

der Gleichung (10) wieder eine Folge positiver, monoton abnehmender Zahlen bilden:

$$a_0^{(1)} > a_1^{(1)} > \dots > a_{n-2}^{(1)} > a_{n-1}^{(1)} > 0.$$

Damit ist aber gezeigt:

Genügen die Koeffizienten den Ungleichungen (12), so ist (1) eine K -Gleichung.

Es ist das der durch eine funktionentheoretische Anwendung bekannt gewordene Satz von *Takeya*¹¹⁾.

2. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzt.

Zunächst kann die Gleichung nicht zu den unter I bis III behandelten Gleichungen gehören, da sonst mindestens eine Wurzel im Innern oder außerhalb des Einheitskreises liegen würde. Es muß also Fall IV vorliegen, d. h. es müssen zwischen den Koeffizienten die Relationen bestehen:

$$(13) \quad a_\nu = \varepsilon \bar{a}_{n-\nu} \quad (|\varepsilon| = 1, \nu = 0, 1, \dots, n).$$

Ferner darf keine Wurzel von

$$x^{n-1} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

¹¹⁾ Vgl. E. Landau, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie“, Berlin 1916, S. 20.

absolut genommen kleiner als 1 sein, da sonst nach IV eine Wurzel im Innern vorhanden wäre. Zu den Bedingungen (13) tritt also hinzu, daß die Wurzeln

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

der derivierten Gleichung

$$f'(x) = 0$$

der Bedingung

$$(14) \quad |x_i| \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

genügen müssen. Andererseits übersieht man auf Grund der zur Bestimmung der Wurzelanzahl auf der Peripherie des Einheitskreises entwickelten Regel, daß die Gleichung (1) unter den Bedingungen (13) und (14) wirklich nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzt.

Nach einem bekannten Satz von Gauß¹²⁾ liegen die Nullstellen x_i der Ableitung $f'(x)$ in dem kleinsten konvexen Polygon, das die Wurzeln der Gleichung (1) umspannt. Es wird daher nur

$$|x_i| = 1$$

sein können, wenn zugleich

$$f(x_i) = 0$$

ist. Wird angenommen, daß die Gleichung (1) keine mehrfachen Wurzeln besitzt, so kann daher in (14) das Gleichheitszeichen nicht auftreten. Wir erhalten damit ein von Herrn I. Schur auf funktionentheoretischem Wege abgeleitetes Resultat¹³⁾:

Dann und nur dann hat

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

lauter (voneinander verschiedene) Wurzeln vom absoluten Betrage 1, wenn die Koeffizienten den Bedingungen genügen

$$a_0 \bar{a}_r = \bar{a}_n a_{n-r} \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

und wenn die Ableitung

$$f'(x) = 0$$

zur Klasse K gehört.

3. Die in § 1 entwickelte Regel soll noch auf einige numerische Beispiele angewandt werden.

Man merke sich für die Rechnung, daß $f(x)$ mit dem (absolut genommen) größeren der beiden äußeren Koeffizienten multipliziert und hierauf $f^(x)$, mit dem kleineren multipliziert, davon abgezogen werden muß.*

Gemeinschaftliche Faktoren von a_0 und a_n können bei der Multiplikation natürlich von vornherein unterdrückt werden.

¹²⁾ Werke 3, S. 112; vgl. etwa Osgood, Funktionentheorie. 2. Aufl., S. 210.

¹³⁾ Auf S. 136 der in Fußnote ⁵⁾ zitierten Abhandlung.

Beginnen wir mit der trinomischen Gleichung 10. Grades

$$2x^{10} + 3x^3 + 4 = 0.$$

	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
$f:$	2	0	0	0	0	0	0	3	0	0	4
	4							6			8
	-4			-3							-2
$f_1:$				-1				2			2
				-2				4			4
				2			2				-1
$f_2:$							2	4			3
							6	12			9
							-6			-3	-4
$f_3:$							12			-3	5
							144			-9	60
							-25	40			-60
$f_4:$							119	40		-9	*
							119^2	119×40	119×-9		
							-96^2	96×40	119×96		
$f_5:$							23	40		*	*
$f_6:$								1		*	*

Die Gleichung besitzt also zwei Wurzeln im Einheitskreis, keine auf seinem Rande. Zu demselben Ergebnis für die Anzahl der im Innern

des Einheitskreises liegenden Wurzeln unserer trinomischen Gleichung führt auch die in der Einleitung erwähnte Regel von Herrn Bohl.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$f(x) = x^8 - 2x^7 - 4x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Man erhält nacheinander

	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
f :	1	-2	-4	6	2	-6	5	4	-2
$f_1: (s=6)$			1	-2	-2	2	-2	-2	1
$f_2 = x^5 f_1' \left(\frac{1}{x}\right)$				-1	-2	3	-4	-5	3
f_3 :					-11	5	-9	-17	8
f_4 :						19	27	57	*
f_5 :							2	19	*
f_6 :								1	*

Die Gleichung hat also eine einzige Wurzel, deren absoluter Betrag < 1 ist. $f_1 = 0$ ist die erste Gleichung vom Typus IV. (reziproke Gleichung); ihr Grad ist $s=6$, die Anzahl ihrer Wurzeln im Einheitskreis $l=1$. $f(x)$ besitzt also

$$s - 2l = 4$$

Nullstellen vom absoluten Betrage 1, darunter die Wurzel

$$x = -1$$

zweifach, da dieser Wert außer $f_6 = 0$ auch $f_1 = 0$ befriedigt. In der Tat ist

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 1)(x^3 + 1)(x + 1).$$

Die Rechnung kann mitunter durch ein einfaches Kriterium erheblich abgekürzt werden, das aus dem Hilfssatz in § 2, I unmittelbar hervorgeht¹⁴⁾:

Ist in der Gleichung

$$g(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0$$

$$|c_\nu| > |c_0| + |c_1| + \dots + |c_{\nu-1}| + |c_{\nu+1}| + |c_{\nu+2}| + \dots + |c_n|,$$

¹⁴⁾ Einen anderen Beweis gab D. E. Mayer, Nouv. Ann. math. (13) X (1891), S. 111-118.

so besitzt die Gleichung ν Wurzeln im Innern des Einheitskreises (und keine auf seinem Rande).

Betrachten wir z. B. die Gleichung

$$\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0,$$

die nach III behandelt werden muß. Man findet aus

$$(x+2)\varphi(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$$

durch Reduktion

$$\psi(x) = -x^3 + \underline{12}x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung $\varphi(x) = 0$ liegen daher innerhalb des Einheitskreises, die dritte außerhalb.

4. Schließlich soll noch eine Gleichung behandelt werden, deren Koeffizienten von einem Parameter abhängen:

$$\left. \begin{aligned} \mu\left(x - \frac{1}{x^2}\right) - (1 - \mu)\left(y - \frac{1}{y^2}\right) &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

oder

$$(15) \quad x^6 + (-3 + \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 + 2\mu x - \mu = 0.$$

Es ist das die erste Librationsgleichung im Dreikörperproblem. Ihre (einzige) zwischen 0 und 1 gelegene reelle Wurzel liefert den Sonnenabstand des zwischen Sonne und Planeten gelegenen Librationspunktes. Dabei ist die Entfernung Sonne-Planet = 1, die Masse des Planeten = μ , die Sonnenmasse = $1 - \mu$ gesetzt. Dementsprechend ist μ in Gleichung (15) als ein reeller, auf das Intervall

$$(16) \quad 0 < \mu < 1$$

beschränkter Parameter anzusehen. Die Durchführung der in § 1 entwickelten Regel liefert die Folge von Gleichungen (allen Koeffizienten gemeinsame Faktoren sind weggehoben):

x^6	x^4	x^3	x^2	x	1
1	$-3 + \mu$	$3 - 2\mu$	$-\mu$	2μ	$-\mu$
$1 + \mu$	$-3 - 2\mu$	$3 + \mu$	2μ	$-\mu$	*
$1 + 2\mu$	$-3 - 5\mu$	$3 + 7\mu + 2\mu^2$	$-\mu$	*	*
$1 + 3\mu$	$-3 - 5\mu + 2\mu^2$	$3 + 7\mu + 4\mu^2$	*	*	*
*	$-3 - 5\mu + 2\mu^2$	$4 + 10\mu + 4\mu^2$	*	*	*
*	*	1	*	*	*

und damit das Resultat:

Die erste Librationsgleichung (15) besitzt für alle Werte des auf das Intervall (16) beschränkten Parameters eine reelle und ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln im Innern des Einheitskreises und keine auf dem Rande.

II. Kapitel.

Die zu einem Polynom gehörende Hermitesche Form §.

§ 4.

Darstellung der Wurzelanzahl durch §.

1. In der schon in der Einleitung erwähnten Abhandlung „Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind“, erhält Herr I. Schur aus seiner auf einem kettenbruchartigem Algorithmus beruhenden Theorie nebenbei den folgenden algebraischen Satz¹⁵⁾:

I. „Die Nullstellen des Polynoms n -ten Grades

$$(17) \quad g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

sind dann und nur dann sämtlich im Innern des Einheitskreises gelegen, wenn die Hermitesche Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} = & \sum_{\lambda=1}^n |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_\lambda x_n|^2 \\ & - \sum_{\lambda=1}^n |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda} x_n|^2 \end{aligned}$$

positiv definit ist, oder was dasselbe ist, wenn die n Determinanten

$$\delta_\nu = \begin{vmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\nu-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\nu+1} & a_{n-\nu+2} & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \dots & \bar{a}_{n-\nu+1} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 & 0 & \bar{a}_n & \dots & \bar{a}_{n-\nu+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{\nu-1} & \bar{a}_{\nu-2} & \dots & \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_n \end{vmatrix}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n)$$

positive (von Null verschiedene) Werte haben.“

¹⁵⁾ A. a. O. Satz XVII.

Die in § 1 aufgestellte Regel gestattet es uns nicht bloß, diesen Satz auf rein algebraischem Wege zu beweisen, sondern auch den viel allgemeineren Satz auszusprechen:

II. Besitzt \mathfrak{H} in der Normalform π positive und ν negative Quadrate und ist

$$\pi + \nu = n,$$

so hat das Polynom $g(x)$ π Nullstellen im Innern und ν Nullstellen außerhalb des Einheitskreises.

2. Betrachten wir zuerst Fall I unserer Regel:

$$|a_0| < |a_n|.$$

Das Polynom (17) hat dann eine Nullstelle mehr im Einheitskreis als das Polynom $(n-1)$ -ten Grades

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{x} (\bar{a}_n g(x) - a_0 g^*(x)) \\ &= (\bar{a}_n a_1 - a_0 \bar{a}_{n-1}) + (\bar{a}_n a_2 - a_0 \bar{a}_{n-2}) x + \dots + (\bar{a}_n a_n - a_0 \bar{a}_0) x^{n-1} \\ &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x + \dots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}, \end{aligned}$$

dem die Hermitesche Form

$$\mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} |\bar{a}_{n-1}^{(1)} x_\lambda + \bar{a}_{n-2}^{(1)} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_\lambda^{(1)} x_{n-1}|^2 - \sum_{\lambda=1}^{n-1} |a_0^{(1)} x_\lambda + a_1^{(1)} x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda}^{(1)} x_{n-1}|^2$$

zugeordnet ist.

Wie sich mit Hilfe der Identität

$$(|a_n|^2 - |a_0|^2)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) = |a_n \alpha - \bar{a}_0 \beta|^2 - |\bar{a}_n \beta - a_0 \alpha|^2,$$

(in der man

$$\alpha = \bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_\lambda x_n,$$

$$\beta = a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda} x_n$$

zu setzen hat), leicht ergibt, besteht zwischen \mathfrak{H} und $\mathfrak{H}^{(1)}$ die Relation¹⁶⁾

$$\begin{aligned} & (a_n \bar{a}_n - a_0 \bar{a}_0) \mathfrak{H}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= |a_n (\bar{a}_n x_1 + \dots + \bar{a}_1 x_n) - \bar{a}_0 (a_0 x_1 + \dots + a_{n-1} x_n)|^2 \\ & \quad + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$(18_1) \quad \begin{aligned} & a_{n-1}^{(1)} \mathfrak{H}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= |\bar{a}_{n-1}^{(1)} x_1 + \bar{a}_{n-2}^{(1)} x_2 + \dots + \bar{a}_0^{(1)} x_n|^2 + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

¹⁶⁾ Vgl. Journ. f. Math. 147 (1917), S. 217, Formel (14).

Hier ist

$$a_{n-1}^{(1)} = |a_n|^2 - |a_0|^2 > 0.$$

Die Hermitesche Form \mathfrak{H} besitzt also ein positives Quadrat mehr als $\mathfrak{H}^{(1)}$.

Soll $g(x)$ zur Klasse K gehören, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß $|a_0| < |a_n|$ ist, und daß

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \dots, \quad g_{n-1}(x) = 0$$

ebenfalls K -Gleichungen sind. Dann ist also \mathfrak{H} als Summe von n positiven Quadraten darstellbar, d. h. positiv definit.

3. Wenden wir uns jetzt zu Fall II der Regel:

$$|a_0| > |a_n|.$$

Das Polynom (17) verschwindet im Innern des Einheitskreises ebensooft wie

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \bar{a}_0 g(x) - a_n g^*(x) \\ &= (\bar{a}_0 a_0 - a_n \bar{a}_n) + (\bar{a}_0 a_1 - a_n \bar{a}_{n-1})x + \dots + (\bar{a}_0 a_{n-1} - a_n \bar{a}_1)x^{n-1} \\ &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \dots + a_{n-1}^{(1)}x^{n-1}. \end{aligned}$$

Außerhalb des Einheitskreises besitzt $g(x)$ eine Nullstelle mehr als $g_1(x)$. Dem Polynom $g_1(x)$ ist wieder die Hermitesche Form $\mathfrak{H}^{(1)}$ zugeordnet; dabei ist aber zu beachten, daß jetzt

$$a_r^{(1)} = \bar{a}_0 a_r - a_n \bar{a}_{n-r}$$

gesetzt worden ist.

Vermöge der Identität

$$(|a_0|^2 - |a_n|^2)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) = |a_0\alpha - \bar{a}_n\beta|^2 - |\bar{a}_0\beta - a_n\alpha|^2$$

erhält man zwischen den Hermiteschen Formen \mathfrak{H} und $\mathfrak{H}^{(1)}$ leicht die Beziehung

$$\begin{aligned} & (a_0 \bar{a}_0 - a_n \bar{a}_n) \mathfrak{H}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -|\bar{a}_0(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n) - a_n(\bar{a}_n x_1 + \bar{a}_{n-1} x_2 + \dots + \bar{a}_1 x_n)|^2 \\ & \quad + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (18_{II}) \quad & a_0^{(1)} \mathfrak{H}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -|a_0^{(1)} x_1 + a_1^{(1)} x_2 + \dots + a_{n-1}^{(1)} x_n|^2 + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

In dieser Formel ist $a_0^{(1)} = |a_0|^2 - |a_n|^2 > 0$. \mathfrak{H} besitzt also jetzt ein negatives Quadrat mehr als $\mathfrak{H}^{(1)}$.

Indem man $\mathfrak{H}^{(1)}$ in derselben Weise auf Grund der Formeln (18_I) oder (18_{II}) darstellt usw., gelangt man zu der Darstellung der Form \mathfrak{H} in der Normalform

$$\mathfrak{H} = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_r|^2 - |y_{r+1}|^2 - \dots - |y_n|^2.$$

Die Anzahl π der positiven Quadrate stimmt mit der Anzahl der Nullstellen überein, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist; die Anzahl ν der negativen Quadrate in der Normalform liefert die Zahl der Wurzeln, die sich außerhalb des Einheitskreises befinden.

4. Dieses Resultat haben wir aber bisher nur unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Ungleichungen

$$(19) \quad \begin{aligned} |a_0| &\neq |a_n|, \\ |a_0^{(\nu)}| &\neq |a_{n-\nu}^{(\nu)}| \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

sämtlich erfüllt sind. Trifft das nicht zu (Fall III und IV der Regel), so liegt es nahe, an Stelle von $g(x)$

$$g_r(x) = a_0 + a_1 r x + \dots + a_n r^n x^n \quad (r < 1)$$

zu benutzen. Für hinreichend nahe an 1 gewählte Werte von r besitzt $g_r(x)$ ebenso viele Nullstellen im Innern des Einheitskreises. Die den Ungleichungen (19) entsprechenden Ungleichungen für die Koeffizienten des Polynoms $g_r(x)$ sind nur für endlich viele reelle Werte von r nicht erfüllt¹⁷⁾; r kann also wirklich so gewählt werden, daß sich die zu $g_r(x)$ gehörende Hermitesche Form \mathfrak{H}_r durch wiederholte Anwendung der Formeln (18_I) oder (18_{II}) in die Normalform überführen läßt. Die sich auf diese Weise ergebenden charakteristischen Zahlen der Form \mathfrak{H}_r seien π_r, ν_r, ϱ_r .

Wir wissen, daß π_r die Anzahl der Nullstellen angibt, die das Polynom (17) innerhalb des Einheitskreises besitzt. Es fragt sich aber noch, ob π_r mit π übereinstimmt.

Die Voraussetzung $\pi + \nu = n$ ($\varrho = 0$) besagt mit anderen Worten, daß die Form $\mathfrak{H}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vom Range n sein, d. h. daß ihre Determinante H von Null verschieden sein soll. Infolgedessen wird für hinreichend nahe bei 1 gewählte Werte von r auch die Determinante H_r der für $r = 1$ in \mathfrak{H} übergehenden Hermiteschen Form \mathfrak{H}_r nicht verschwinden.

Daß unter dieser Voraussetzung tatsächlich $\pi_r = \pi$ ist, ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz I des folgenden Paragraphen.

Eine ganz ähnliche Überlegung, bei der man nur $r > 1$ zu wählen hat, lehrt, daß ν mit der Zahl der außerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen des Polynoms (17) übereinstimmt.

¹⁷⁾ Keine der Relationen $|a_0^{(\nu)}| = |a_{n-\nu}^{(\nu)}|$ kann für alle r identisch erfüllt sein, da $g_r(x) = 0$ für große Werte von r eine K -Gleichung ist.

§ 5.

Hilfssätze über Hermitesche Formen und Determinanten.**1. Die Koeffizienten $c_{ik}(\tau)$ der Hermiteschen Form**

$$\mathfrak{H}(\tau) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} x_i x_k \quad (c_{ki} = \bar{c}_{ik})$$

seien ganze rationale Funktionen eines reellen Parameters τ :

$$c_{ik}(\tau) = \gamma_{ik}^{(0)} + \gamma_{ik}^{(1)}\tau + \dots + \gamma_{ik}^{(m)}\tau^m.$$

Unter $\pi(\tau)$ verstehen wir die Anzahl der positiven Quadrate, die die Form $\mathfrak{H}(\tau)$ aufweist, wenn man sie in die Normalform

$$|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_{\pi(\tau)}|^2 - |y_{\pi(\tau)+1}|^2 - \dots - |y_{\pi(\tau)+\nu(\tau)}|^2$$

transformiert. Schließlich sei

$$H(\tau) = |c_{ik}(\tau)|$$

die Determinante der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}(\tau)$. Es gilt dann der folgende, einfache

Hilfssatz I. *In einem Intervall*

$$a \leq \tau \leq b,$$

in dem die Determinante $H(\tau)$ der Form $\mathfrak{H}(\tau)$ von Null verschieden ist, hat $\pi(\tau)$ überall denselben Wert.

Die Zahl $\pi(\tau)$ können wir nämlich charakterisieren als die Anzahl der positiven Wurzeln der Säkulargleichung

$$S(u) = |C - uE| = (-1)^n (u^n + \dots + (-1)^n H(\tau)) = 0,$$

wo $C = (c_{ik})$ die Matrix der Form $\mathfrak{H}(\tau)$ bedeutet. Da $S(u)$ nur reelle Wurzeln besitzt, kann sich die Anzahl der positiven Wurzeln dieser Gleichung nicht ändern, solange $H(\tau) \neq 0$ ist.

2. Die Zahl $\pi(\tau)$ wird auch durch die Anzahl der Vorzeichenfolgen dargestellt, welche die Kette der Abschnittsdeterminanten

$$H(\tau) = H_n(\tau), H_{n-1}(\tau), \dots, H_1(\tau), 1$$

der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}(\tau)$ aufweist. Unser Hilfssatz besagt also, daß sich diese Anzahl nur beim Durchgange durch die Stellen τ , ändern kann, für die $H(\tau) = 0$ ist. Setzen wir nun voraus, daß $H(\tau)$, $H_{n-1}(\tau)$ in dem betrachteten Intervall *nicht gleichzeitig* verschwinden, so wird beim Passieren einer Nullstelle von $H(\tau)$ *höchstens eine* Vorzeichenfolge gewonnen oder verloren. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur zu bedenken, daß man die Determinanten

$$H_{n-1}(\tau), H_{n-2}(\tau), \dots, H_1(\tau), 1$$

als Kette der Abschnittsdeterminanten einer Hermiteschen Form mit der Determinante $H_{n-1}(r)$ ansehen kann, die — da $H_{n-1}(r)$ an der betreffenden Stelle von Null verschieden ist — nach Hilfssatz I keine Vorzeichenfolge gewinnen oder verlieren kann.

Setzen wir weiter voraus, daß die Kette für $r = a$ nur Vorzeichenwechsel, für $r = b$ nur Vorzeichenfolgen aufweist und daß $H(r)$ im Intervall $a \dots b$ genau n -mal verschwindet, so muß offenbar beim Passieren jeder Nullstelle r , genau eine Vorzeichenfolge gewonnen werden. Wir erhalten damit den folgenden Satz, der uns in § 7 gute Dienste leisten wird:

Hilfssatz II. Die Determinante $H(r)$ der Hermiteschen Form $\mathfrak{S}(r)$ besitze im Intervall

$$(J) \quad a < r < b$$

die n verschiedenen (einfachen) Nullstellen: $r_1 < r_2 < \dots < r_n$. Weist die Kette der Abschnittsdeterminanten

$$H(r) = H_n(r), H_{n-1}(r), \dots, H_1(r), 1$$

für $r = a$ nur Vorzeichenwechsel, hingegen für $r = b$ nur Vorzeichenfolgen auf, und verschwinden $H(r)$, $H_{n-1}(r)$ in J nie gleichzeitig, so stimmt die Anzahl der in einem Teilintervall von J verloren gehenden Vorzeichenwechsel der Kette mit der Anzahl der reellen, in demselben Teilintervall gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$H(r) = 0$$

überein.

3. Es soll hier noch ein Satz über Determinanten bewiesen werden.

Hilfssatz III. Sind P, Q, R, S vier Matrizen desselben Grades und ist sowohl P mit R wie auch Q mit S vertauschbar, so ist

$$(20) \quad \begin{vmatrix} P, Q \\ R, S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P', Q' \\ R', S' \end{vmatrix} = |P'S' - R'Q'|.$$

Dabei bedeutet P' , wie üblich, die zu P transponierte Matrix.

Den Beweis führe ich mit Hilfe eines auf der Relation

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, 0 \\ C, E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E, A^{-1}B \\ 0, D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

beruhenden Satzes von Herrn I. Schur¹⁸⁾:

Sind A, B, C, D vier Matrizen desselben Grades und ist A mit C vertauschbar, so ist

$$\begin{vmatrix} A, B \\ C, D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

¹⁸⁾ Vgl. S. 216–217 der in Fußnote ¹⁶⁾ zitierten Arbeit.

Aus diesem Satze ergibt sich unser Hilfssatz folgendermaßen.

Zunächst ist

$$\begin{vmatrix} P, Q \\ R, S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S, R \\ Q, P \end{vmatrix} = |SP - QR|,$$

da S mit Q vertauschbar sein soll, und, da der Übergang zur transponierten Matrix den Wert ihrer Determinante nicht ändert,

$$\begin{vmatrix} P, Q \\ R, S \end{vmatrix} = |P'S' - R'Q'| = \begin{vmatrix} P', Q' \\ R', S' \end{vmatrix},$$

weil P, R und infolgedessen auch P', R' vertauschbare Matrizen sind.

§ 6.

Die Resultante von g und g^* .

1. Dem Polynom n -ten Grades

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

ordnen wir die Dreiecksmatrix n -ten Grades

$$A = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \dots, & a_{n-1} \\ 0, & a_0, & a_1, & \dots, & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & a_0 \end{pmatrix}$$

zu¹⁹⁾. Ihr ν -ter Abschnitt

$$A_\nu = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \dots, & a_{\nu-1} \\ 0, & a_0, & a_1, & \dots, & a_{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & a_0 \end{pmatrix}$$

kann dann als die dem Polynom

$$g_\nu(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_\nu x^\nu$$

zugeordnete Matrix aufgefaßt werden. Zu dem Polynom

$$g^*(x) = x^n \bar{g}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \dots + \bar{a}_0 x^n$$

¹⁹⁾ Man vgl. O. Toeplitz, „Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.“ I. Teil. Math. Ann. 70 (1910), S. 356.

gehört die Matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & \bar{a}_1 \\ 0 & \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \dots & \bar{a}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_n \end{pmatrix},$$

deren ν -ten Abschnitt $(A^*)_\nu$ wir mit A_ν^* bezeichnen wollen.

Einem anderen Polynom

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

ordnen wir die in derselben Weise definierten Matrizen B und B^* zu.

Die Matrizen A_ν , B_ν (und infolgedessen auch A'_ν , B'_ν) sind miteinander vertauschbar; denn bezeichnet man die zu dem Produkt

$$g(x)h(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \dots + a_n b_n x^{2n}$$

gehörige Matrix $2n$ -ten Grades mit C , so ist $A_\nu B_\nu$ nichts anderes als der ν -te Abschnitt dieser Matrix.

Die Resultante der Polynome $g(x)$ und $h(x)$

$$R(g, h) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ \hline b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

können wir auffassen als die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^* & A' \\ \bar{B}^* & B' \end{pmatrix},$$

in der die übereinander stehenden Teilmatrizen miteinander vertauschbar sind. Wir erhalten daher auf Grund des Hilfssatzes III des vorigen Paragraphen (Formel (20)) die folgende Darstellung der *Resultante irgend zweier Polynome desselben Grades*:

$$(21) \quad R(g, h) = \begin{vmatrix} \bar{A}^* & A \\ \bar{B}^* & B \end{vmatrix} = |\bar{A}^* B - \bar{B}^* A|.$$

2. Wir setzen nun speziell

$$h(x) = g^*(x),$$

dann wird

$$h^*(x) = x^n \bar{h}\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \bar{g}^*\left(\frac{1}{x}\right) = g(x),$$

also $B = A^*$ und $B^* = A$, und wir erhalten für die Resultante von $g(x)$ und $g^*(x)$ nach (21) die Gleichung

$$(22) \quad R(g, g^*) = \begin{vmatrix} \bar{A}'^*, A \\ \bar{A}', A^* \end{vmatrix} = |\bar{A}'^* A^* - \bar{A}' A|.$$

Bekanntlich ist $\bar{A}' A$ die Koeffizientenmatrix der Hermiteschen Form

$$\mathfrak{U} = \sum_{\lambda=1}^n |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda} x_n|^2;$$

man kann daher die Resultante (22) auffassen als die Determinante der Form

$$(23) \quad \mathfrak{S}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathfrak{U}^* - \mathfrak{U} = \sum_{\lambda=1}^n |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_\lambda x_n|^2 \\ - \sum_{\lambda=1}^n |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda} x_n|^2.$$

Das ist dieselbe Hermitesche Form, mit der wir uns schon in § 4 beschäftigt haben. Die in Satz I definierten Determinanten

$$(24) \quad \delta_\nu = \begin{vmatrix} \bar{A}_\nu'^*, A_\nu \\ \bar{A}_\nu', A_\nu^* \end{vmatrix} = |\bar{A}_\nu'^* A_\nu^* - \bar{A}_\nu' A_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \\ (\delta_0 = 1)$$

bilden eine Kette von Hauptunterdeterminanten der Form (23), und zwar ist speziell für $\nu = n$ wegen (22)

$$(25) \quad \delta_n = R(g, g^*) = H.$$

3. Besitzt das Polynom

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

nur reelle Koeffizienten, so zerfällt die Resultante $R(g, g^*)$. Hierauf hat E. B. Elliott²⁰⁾ zuerst aufmerksam gemacht, die Zerlegung ist aber erst von W. W. Taylor²¹⁾ wirklich durchgeführt worden.

²⁰⁾ „On the Existence of a Root of a Rational Integral Equation“. Proc. Lond. Math. Society 25 (1894), S. 173–184.

²¹⁾ „Evolution of a certain Dialytic Determinant“. Proc. Lond. Math. Society 27 (1896), S. 60–66.

Man vgl. besonders den Aufsatz: „On the Eliminant of $f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ “ von Thomas Muir, Proc. of Royal Society of Edinburgh 21 (1895–1897), S. 360.

Setzt man

$$\hat{A}_\nu = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & a_0 \\ 0, & 0, & \dots, & a_0, & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_0, & \dots, & a_{\nu-3}, & a_{\nu-2} \\ a_0, & a_1, & \dots, & a_{\nu-2}, & a_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$(24a) \quad \delta_\nu = |A_\nu^* + \hat{A}_\nu| \cdot |A_\nu^* - \hat{A}_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

und speziell für die Resultante $R(g, g^*)$

$$(25a) \quad \delta_n = (-1)^n g(1) g(-1) |A_{n-1}^* - \hat{A}_{n-1}|^2.$$

§ 7.

Sturmsche Kette für die absoluten Beträge der Wurzeln.

1. Aus der Resultanteneigenschaft der Determinante von \mathfrak{S} ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes II und eine Verschärfung des Satzes I.

Das Polynom

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

besitze die Nullstellen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n;$$

dann verschwindet

$$g^*(x) = x^n \bar{g}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \dots + \bar{a}_0 x^n$$

an den Stellen

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$$

und die Resultante $\delta_n(r)$ der beiden Gleichungen

$$G(x) = g(rx) = a_0 + a_1 r x + \dots + a_n r^n x^n = a_n r^n \prod_{\mu=1}^n \left(x - \frac{\alpha_\mu}{r}\right) =$$

und

$$G_{(x)}^* = x^n \bar{g}\left(\frac{r}{x}\right) = \bar{a}_n r^n + \bar{a}_{n-1} r^{n-1} x + \dots + \bar{a}_0 x^n = \bar{a}_0 \prod_{\mu=1}^n \left(x - \frac{r}{\alpha_\mu}\right) = 0$$

lautet, dargestellt durch die Gleichungswurzeln:

$$\begin{aligned} \delta_n(r) &= (a_n r^n)^n \bar{a}_0^n \prod_{\mu, \nu} \left(\frac{\alpha_\mu}{r} - \frac{r}{\alpha_\nu}\right) = (a_n \bar{a}_0)^n \prod_{\mu, \nu} \left(\alpha_\mu - \frac{r^2}{\alpha_\nu}\right) \\ &= \left(\frac{a_n \bar{a}_0}{\prod_{\nu=1}^n \alpha_\nu}\right)^n \prod_{\mu, \nu} (\alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu - r^2). \end{aligned}$$

Nun ist $\prod_{\nu=1}^n \bar{a}_\nu = (-1)^n \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n}$, also

$$\delta_n(r) = (-1)^{n^2} (a_n \bar{a}_n)^n \prod_{\mu, \nu} (a_\mu \bar{a}_\nu - r^2) = |a_n|^{2n} \prod_{\mu \neq \nu} (r^2 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu) \cdot \prod_{\mu=1}^n (r^2 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\mu)$$

oder schließlich

$$(26) \quad \delta_n(r) = |a_n|^{2n} \prod_{\mu > \nu} |r^2 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu|^2 \prod_{\mu=1}^n (r + |\alpha_\mu|) \prod_{\mu=1}^n (r - |\alpha_\mu|).$$

2. Die Wurzeln α_μ seien nun vorläufig so gewählt, daß

1. die n^2 Zahlen $\alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu$ sämtlich voneinander verschieden sind, und daß
2. $\delta_n(r)$, $\delta_{n-1}(r)$ für reelles, positives r nicht gleichzeitig verschwinden.

Wie man aus (26) unmittelbar ersieht, hat dann die Determinante $\delta_n(r)$ genau n reelle, positive, einfache Nullstellen: $|\alpha_1| < |\alpha_2| < \dots < |\alpha_n|$. Ferner ist die Hermitesche Form

$$(27) \quad \mathfrak{S}(r) = \sum_{\lambda=1}^n |\bar{a}_n r^n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} r^{n-1} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_\lambda r^\lambda x_n|^2 - \sum_{\lambda=1}^n |a_0 x_\lambda + a_1 r x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-\lambda} r^{n-\lambda} x_n|^2$$

für $r=0$ negativ, für genügend groß gewählte Werte von r positiv definit, erfüllt also alle Voraussetzungen des Hilfssatzes II in § 5, 2. Wir haben damit Satz II in etwas anderer Formulierung wiedergefunden:

II'. Die Anzahl der beim Übergang von r_1 zu r_2 verloren gehenden Vorzeichenwechsel der Kette der Abschnittsdeterminanten

$$\delta_\nu(r) = \begin{vmatrix} a_n r^n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 r & \dots & a_{\nu-1} r^{\nu-1} \\ a_{n-1} r^{n-1} & a_n r^n & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-2} r^{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\nu+1} r^{n-\nu+1} & a_{n-\nu+2} r^{n-\nu+2} & \dots & a_n r^n & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_n r^n & \bar{a}_{n-1} r^{n-1} & \dots & \bar{a}_{n-\nu+1} r^{n-\nu+1} \\ \bar{a}_1 r & \bar{a}_0 & \dots & 0 & 0 & \bar{a}_1 r^n & \dots & \bar{a}_{n-\nu+2} r^{n-\nu+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{\nu-1} r^{\nu-1} & \bar{a}_{\nu-2} r^{\nu-2} & \dots & \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_n r^n \end{vmatrix}$$

($\nu = 0, 1, 2, \dots, n; \delta_0 = 1$)

der Hermiteschen Form (27) liefert, falls $\delta_n(r_1)$ und $\delta_n(r_2)$ von Null verschieden sind, die Zahl der Wurzeln der Gleichung

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0,$$

deren absolute Beträge zwischen den Grenzen $r_1 < r_2$ gelegen sind. Die Gleichung besitzt dann keine Wurzel vom absoluten Betrage r_1 oder r_2 .

3. Der letzte Teil dieses Satzes folgt unmittelbar aus Formel (26). Wir haben den ganzen Satz aber noch für den Fall zu beweisen, daß die Wurzeln den Voraussetzungen 1. oder 2. nicht genügen.

Bedeutet d die kleinste Entfernung der Wurzelpunkte α_μ von den Peripherieen der den betrachteten Kreisring begrenzenden Kreise, so besitzt das Polynom

$$I'(x) = a_n \prod_{\mu=1}^n (x - \alpha_\mu - u_\mu - i v_\mu) \quad (u_\mu^2 + v_\mu^2 \leq \varepsilon < d^2)$$

ebenso viele Nullstellen in dem Kreisring wie $g(x)$. Für genügend klein gewähltes ε sind die zu $I'(x)$ gehörigen (für $\varepsilon = 0$ in $\delta_n(r_1) \neq 0$, bzw. $\delta_n(r_2) \neq 0$ übergehenden) Determinanten $\Delta_n(r_1)$ und $\Delta_n(r_2)$ von Null verschieden. Wählen wir jetzt die $2n$ Parameter u_μ, v_μ so, daß die n^2 Zahlen $(\alpha_\mu + u_\mu + i v_\mu)$ ($\bar{\alpha}_\nu + u_\nu - i v_\nu$) sämtlich voneinander verschieden ausfallen und $\Delta_n(r), \Delta_{n-1}(r)$ für $r > 0$ nicht zugleich verschwinden, so gilt unser Satz für das Polynom $I'(x)$. Auf Grund des Hilfssatzes I (§ 5, 1.), den wir der Reihe nach für die Parameter $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ anwenden dürfen, ergibt sich dann Satz II' auch für das Polynom $g(x)$.

4. Ist $\delta_n(1) = \delta_n = |a_n|^{2n} \prod_{\mu, \nu} (1 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu) = 0$, so können nicht alle

Wurzeln im Innern des Einheitskreises liegen. Satz II' liefert daher als spezielles Resultat den Satz I. Wir sind aber jetzt in der Lage, diesen Satz noch etwas zu verschärfen.

Ia. Besitzen die n Determinanten

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$$

positive Werte, so sind die Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ dem absoluten Betrage nach sogar

$$< 1 - \frac{\delta_n}{2^{n^2-n+1} |a_n|^{2n}}.$$

Es sei nämlich

$$I > r = |\alpha_1| \geq |\alpha_\mu| \quad (\mu = 2, 3, \dots, n).$$

Dann ist nach (26)

$$\delta_n = |a_n|^{2n} \prod_{\mu > \nu} |1 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu|^2 \prod_{\mu=1}^n (1 - |\alpha_\mu|^2) < |a_n|^{2n} 2^{n(n-1)} (1 - r^2),$$

also

$$r^2 < 1 - \frac{\delta_n}{2^{n(n-1)} |a_n|^{2n}} < \left(1 - \frac{\delta_n}{2^{n^2-n+1} |a_n|^{2n}}\right)^2, \quad r < 1 - \frac{\delta_n}{2^{n^2-n+1} |a_n|^{2n}},$$

wie zu beweisen war.

5. Besitzt die Gleichung $g(x) = 0$ nur *reelle* Koeffizienten, so zerfallen die Determinanten δ_r . Die Ungleichungen des Satzes I lassen sich dann durch die doppelte Anzahl einfacher gebauter Ungleichungen ersetzen.

Ib. Die Nullstellen des Polynoms mit reellen Koeffizienten

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (a_n > 0)$$

liegen dann und nur dann sämtlich im Innern des Einheitskreises, wenn folgende $2n$ Ungleichungen erfüllt sind:

$$g(1) > 0, \quad (-1)^n g(-1) > 0,$$

$$d_r = \begin{vmatrix} a_n, & a_{n-1}, & \dots, & a_{n-r+2}, & a_{n-r+1} + a_0 \\ 0, & a_n, & \dots, & a_{n-r+3} + a_0, & a_{n-r+2} + a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_0, & \dots, & a_n + a_{v-3}, & a_{n-1} + a_{v-2} \\ a_0, & a_1, & \dots, & a_{v-2}, & a_n + a_{v-1} \end{vmatrix} > 0,$$

$$d'_r = \begin{vmatrix} a_n, & a_{n-1}, & \dots, & a_{n-r+2}, & a_{n-r+1} - a_0 \\ 0, & a_n, & \dots, & a_{n-r+3} - a_0, & a_{n-r+2} - a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & -a_0, & \dots, & a_n - a_{v-3}, & a_{n-1} - a_{v-2} \\ -a_0, & -a_1, & \dots, & -a_{v-2}, & a_n - a_{v-1} \end{vmatrix} > 0$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Die absoluten Beträge der Wurzeln sind dann sogar sämtlich

$$< 1 - \frac{g(1)|g(-1)|d_n'^2}{2^{n^2-n+1}a_n^{2n}}.$$

Auf Grund der Relation (24a) ist nämlich

$$\delta_r = d_r d'_r \quad (\nu = 1, 2, \dots, n - 1)$$

und nach (25a)

$$\delta_n = (-1)^n g(1)g(-1)d_n'^2.$$

Sind also die $2n$ Ungleichungen des Satzes erfüllt, so erweist sich $g(x)$ nach Satz I sofort als ein Polynom der Klasse K .

Es bleibt noch zu zeigen, daß umgekehrt die Ungleichungen sämtlich erfüllt sein müssen, wenn $g(x) = 0$ eine K -Gleichung ist. Aus dem Satz I folgt, daß dann für $r \geq 1$ die Determinanten $\delta_r(r)$ positive, von Null verschiedene Werte haben. Setzt man entsprechend Formel (24a)

$$\delta_r(r) = d_r(r) d'_r(r),$$

so können daher die Determinanten $d_r(r)$, $d'_r(r)$ für $r \geq 1$ nicht verschwinden. Ihr Anblick lehrt aber sofort, daß sie (infolge der Annahme $a_n > 0$) für großes r positive Werte haben. In derselben Weise kann man

schließen, daß die für $r \geq 1$ von Null verschiedenen, für große Werte von r offenbar positiven Polynome

$$g(r) = a_0 + a_1 r + \dots + a_n r^n,$$

$$(-1)^n g(-r) = (-1)^n a_0 + (-1)^{n-1} a_1 r + \dots + a_n r^n$$

auch für $r = 1$ positive Werte besitzen müssen.

§ 8.

Eine Anwendung des Satzes I.

1. R. Jentzsch²²⁾ hat folgenden Satz aufgestellt:

Die Gesamtheit der Werte w , für welche die Wurzeln der Gleichung

$$g(x) - w = 0$$

sämtlich in einem konvexen Bereiche \mathfrak{B}_1 liegen, bildet ebenfalls einen konvexen Bereich \mathfrak{B}_2 .

Man kann das auch so ausdrücken:

Ein Polynom nimmt außerhalb eines konvexen Bereiches \mathfrak{B}_1 jeden Wert an, höchstens mit Ausnahme der Punkte eines konvexen Bereiches \mathfrak{B}_2 .

Für rationale Funktionen kann dieser Satz nicht mehr ohne Einschränkungen gelten, wie schon die durch $\frac{1}{x}$ vermittelte Abbildung zeigt²³⁾. Es gilt aber folgender, den Satz von Jentzsch als speziellen Fall enthaltender Satz:

III. Eine rationale Funktion

$$R(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

nimmt außerhalb irgendeines Kreises, in dem (und auf dessen Rande) sie keinen Pol besitzt, jeden Wert an, höchstens mit Ausnahme der Punkte eines konvexen Bereiches.

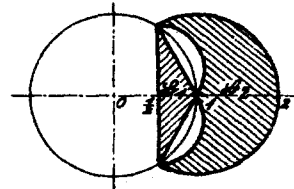
Es genügt offenbar, diesen Satz für den Einheitskreis zu beweisen. Die beiden Polynome

$$(28) \quad \begin{aligned} g(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \\ h(x) &= b_0 + b_1 x + \dots + b_l x^l \end{aligned}$$

mögen teilerfremd sein; dann verschwindet $h(x)$ nur außerhalb des Einheitskreises. Es kommt also nur darauf an, folgendes zu zeigen:

²²⁾ Archiv d. Math., 3. Reihe, 25 (1917), S. 196, Aufg. Nr. 526.

²³⁾ Z. B. geht der Dreiecksbereich \mathfrak{B}_1 durch Spiegelung am EK. in den nicht konvexen Kreisbogenbereich \mathfrak{B}_2 über (s. nebenstehende Figur)



III'. Sind

$$F(w_1 | x) = g(x) - w_1 h(x) = 0$$

und

$$F(w_2 | x) = g(x) - w_2 h(x) = 0$$

Gleichungen der Klasse K und ist $h(x)$ für $|x| \leq 1$ von Null verschieden, so liegen die Wurzeln der Gleichung

$$(29) \quad F\left(\frac{w_1 + w_2}{2} | x\right) = g(x) - \frac{w_1 + w_2}{2} h(x) = 0$$

nicht außerhalb des Einheitskreises.

2. Wir wollen zunächst annehmen, daß $g(x)$ und $h(x)$ Polynome desselben Grades n sind. Bedeuten A, A^* bzw. B, B^* die ihnen zugeordneten Matrizen, so gehören zu $F(w | x)$ die Matrizen

$$A - wB \quad \text{und} \quad A^* - \bar{w}B^*.$$

Es ist also zugeordnet dem Polynom

$$g(x)$$

die Hermitesche Form mit der Koeffizientenmatrix

$$\bar{A}^{*'} A^* - \bar{A}' A,$$

ferner

$$h(x)$$

die Form

$$\mathfrak{R} = \bar{B}^{*'} B^* - \bar{B}' B,$$

schließlich gehört zu

$$F(w | x) = g(x) - w h(x)$$

die Hermitesche Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(w) &= (\bar{A}^{*'} - w \bar{B}^{*'}) (A^* - \bar{w} B^*) - (\bar{A}' - \bar{w} \bar{B}') (A - wB) \\ &= \bar{A}^{*'} A^* - \bar{A}' A + |w|^2 (\bar{B}^{*'} B^* - \bar{B}' B) \\ &\quad - w (\bar{B}^{*'} A^* + \bar{A}' B) - \bar{w} (\bar{A}^{*'} B^* + \bar{B}' A). \end{aligned}$$

Man erhält nun

$$\begin{aligned} (29a) \quad 2 \mathfrak{S}\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) &= \mathfrak{S}(w_1) + \mathfrak{S}(w_2) + \left\{ 2 \left| \frac{w_1 + w_2}{2} \right|^2 - (|w_1|^2 + |w_2|^2) \right\} \mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{S}(w_1) + \mathfrak{S}(w_2) - \frac{1}{2} |w_1 - w_2|^2 \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Hier sind die Hermiteschen Formen $\mathfrak{S}(w_1)$ und $\mathfrak{S}(w_2)$ nach Satz I positiv definit, hingegen ist \mathfrak{R} als die dem nur für $|x| > 1$ verschwindenden Polynom $h(x)$ zugeordnete Hermitesche Form negativ definit. Daher ist $\mathfrak{S}\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right)$ positiv definit, d. h. die Wurzeln der Gleichung (29)

liegen sämtlich im Innern des Einheitskreises.

3. Der Fall, daß die Polynome (28) nicht denselben Grad besitzen, läßt sich leicht auf den eben behandelten zurückführen. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g(x) + \varepsilon x^n, \\ h_1(x) &= h(x) + \varepsilon x^n, \end{aligned} \quad (|\varepsilon| < \text{Min}(|h(x)|)_{|x|=1}), \quad (n = k + l + 1)$$

so liegen auch die Nullstellen des Polynoms $h_1(x)$ sämtlich außerhalb des Einheitskreises²⁴⁾, und es ist infolgedessen

$$g_1(x) - \frac{w_1 + w_2}{2} h_1(x) = g(x) - \frac{w_1 + w_2}{2} h(x) + \varepsilon \left(1 - \frac{w_1 + w_2}{2}\right) x^n = 0$$

eine K -Gleichung. Durch den Grenzübergang $|\varepsilon| \rightarrow 0$ überzeugt man sich nun sofort davon, daß die Wurzeln der Gleichung (29) nicht außerhalb des Einheitskreises liegen können.

4. Satz III gilt auch noch, wenn $h(x)$ nur in Punkten verschwindet, die zu dem Kreise spiegelbildlich liegen und wenn der Grad von $g(x)$ den Grad des Polynoms $h(x)$ nicht übersteigt.

Eine lineare Transformation des gegebenen Kreises in den Einheitskreis führt spiegelbildliche Punkte in ebensolche über, wir dürfen uns daher wieder auf den Einheitskreis beschränken. Es soll dann also

$$h^*(x) = x^l \bar{h}\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon h(x) \quad (|\varepsilon| = 1)$$

sein. In diesem Falle ist aber

$$B^* = \varepsilon B, \quad \bar{B}^{*'} B^* - \bar{B}' B = 0;$$

d. h. die Hermitesche Form \mathfrak{R} verschwindet identisch. Wir können daher wieder aus Formel (29a) schließen, daß

$$F\left(\frac{w_1 + w_2}{2} \mid x\right) = 0$$

eine Gleichung der Klasse K ist.

Besitzt z. B. $h(x)$ nur reelle Koeffizienten, so liegen die Nullstellen dieses Polynoms zur reellen Achse spiegelbildlich; daher bildet

$$R(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

die Halbebene $J(x) > 0$ auf die ganze Ebene oder das Äußere eines konvexen Bereiches ab.

²⁴⁾ Vgl. § 2, 1.

III. Kapitel.

Kompositionssätze.

§ 9.

Satz von Grace.

1. Als \bar{K} -Gleichung soll im folgenden jede Gleichung bezeichnet werden, deren Wurzeln sämtlich im Einheitskreise mit *Einschluß seiner Peripherie* liegen²⁵⁾.

Der Gracesche Kompositionssatz, für den hier ein neuer Beweis gegeben werden soll, läßt sich dann folgendermaßen aussprechen:

IV. Ist

$$A(x) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \dots + \binom{n}{\nu} a_\nu x^\nu + \dots + a_n x^n = 0$$

eine K -Gleichung und

$$B(x) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \dots + \binom{n}{\nu} b_\nu x^\nu + \dots + b_n x^n = 0$$

eine \bar{K} -Gleichung, so ist

$$C(x) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \dots + \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu + \dots + a_n b_n x^n = 0$$

eine K -Gleichung.

Dieser Satz ist völlig äquivalent mit der Behauptung:

Für irgend zwei den Voraussetzungen des Satzes IV genügende Gleichungen ist

$$C(1) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu \neq 0.$$

Denn ist

$$C(\gamma) = 0 \quad (|\gamma| \geq 1)$$

und setzt man $x = \sqrt[\gamma]{z}$, so ist

$$\tilde{A}(z) = A(\sqrt[\gamma]{z}) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a_\nu \sqrt[\gamma]{z}^\nu = 0$$

wieder eine K -Gleichung und

$$\tilde{B}(z) = B(\sqrt[\gamma]{z}) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} b_\nu \sqrt[\gamma]{z}^\nu = 0$$

wieder eine \bar{K} -Gleichung, und für diese beiden Gleichungen wird

$$\tilde{C}(z) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu \gamma^\nu z^\nu = C(\gamma z),$$

²⁵⁾ Jede Gleichung der Klasse K ist also eine \bar{K} -Gleichung.

also $\bar{C}(1) = C(\gamma) = 0$. Ist andererseits $C(x) = 0$ eine Gleichung der Klasse K , so ist natürlich $C(1) \neq 0$.

2. Ich führe den Beweis durch Induktion. Für lineare Gleichungen ist der Satz trivial; er sei bereits für Gleichungen $(n-1)$ -ten Grades vollständig bewiesen.

Sei zunächst

$$a_0 = 0,$$

d. h.

$$\frac{1}{x} A(x) = \binom{n}{1} a_1 + \dots + \binom{n}{\nu+1} a_{\nu+1} x^\nu + \dots + a_n x^{n-1} = 0.$$

$$\frac{1}{n} B'(x) = b_1 + \dots + \binom{n-1}{\nu} b_{\nu+1} x^\nu + \dots + b_n x^{n-1} = 0$$

ist als derivierte Gleichung einer \bar{K} -Gleichung ebenfalls eine \bar{K} -Gleichung. Wenden wir auf diese beiden Gleichungen $(n-1)$ -ten Grades unseren Kompositionssatz an, so ergibt sich

$$\frac{1}{x} C(x) = \binom{n}{1} a_1 b_1 + \dots + \binom{n}{\nu+1} a_{\nu+1} b_{\nu+1} x^\nu + \dots + a_n b_n x^{n-1} = 0.$$

Damit ist dieser Fall erledigt.

3. Sei jetzt

$$a_0 \neq 0.$$

Setzt man

$$B_1(x) = x^n B\left(-\frac{1}{x}\right) = b_n - \binom{n}{1} b_{n-1} x + \binom{n}{2} b_{n-2} x^2 - \dots + (-1)^n b_0 x^n,$$

so kann

$$C(1) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 + \binom{n}{2} a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (A, B_1)^n$$

als bilineare *Invariante* der beiden Polynome $A(x)$ und $B_1(x)$ aufgefaßt werden.

Ist nun α irgendeine Wurzel der Gleichung $A(x) = 0$, so führt die lineare Transformation des Einheitskreises in sich

$$x = \frac{\alpha + z}{1 + \bar{\alpha}z}$$

mit der Determinante $\Delta = 1 - \bar{\alpha}\alpha > 0$ den Punkt α der x -Ebene in den Nullpunkt der z -Ebene über und es wird

$$A(x) = A\left(\frac{\alpha + z}{1 + \bar{\alpha}z}\right) = \frac{1}{(1 + \bar{\alpha}z)^n} \tilde{A}(z) = 0,$$

$$B(x) = B\left(\frac{\alpha + z}{1 + \bar{\alpha}z}\right) = \frac{1}{(1 + \bar{\alpha}z)^n} \tilde{B}(z) = 0,$$

wobei

$$\tilde{A}(z) = \binom{n}{1} \tilde{a}_1 z + \binom{n}{2} \tilde{a}_2 z^2 + \dots + \tilde{a}_n z^n = 0$$

eine K -Gleichung,

$$\tilde{B}(z) = b_0 + \binom{n}{1} \tilde{b}_1 z + \binom{n}{2} \tilde{b}_2 z^2 + \dots + \tilde{b}_n z^n = 0$$

eine \bar{K} -Gleichung ist.

Da $\tilde{a}_0 = 0$ ist, so wissen wir schon, daß das durch Komposition der beiden letzten Gleichungen entstehende Polynom

$$\tilde{C}(z) = \binom{n}{1} \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 z + \binom{n}{2} \tilde{a}_2 \tilde{b}_2 z^2 + \dots + \tilde{a}_n \tilde{b}_n z^n$$

zur Klasse K gehört. Daher ist

$$\tilde{C}(1) \neq 0.$$

Setzen wir wieder

$$\tilde{B}_1(z) = z^n \tilde{B}\left(-\frac{1}{z}\right),$$

so wird

$$C(1) = (A, B_1)^n = \Delta^{-n}(\tilde{A}, \tilde{B}_1)^n = \Delta^{-n} \tilde{C}(1) \neq 0,$$

und damit ist Satz IV vollständig bewiesen.

4. Genügen die reellen Zahlen

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$$

den Ungleichungen

$$(30) \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n,$$

so ist nach dem Satz von Kakeya²⁶⁾

$$\frac{\alpha_0}{n!} + \frac{\alpha_1}{(n-1)!} x + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \alpha_n x^n = 0$$

eine Gleichung der Klasse K . Indem wir sie mit der \bar{K} -Gleichung

$$(31) \quad g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

nach Satz IV komponieren, entsteht die K -Gleichung

$$h(x) = \alpha_0 a_0 + 1! \alpha_1 a_1 x + 2! \alpha_2 a_2 x^2 + \dots + n! \alpha_n a_n x^n = 0.$$

Die absoluten Beträge der Wurzeln dieser Gleichung sind daher, wenn die Ungleichungen (30) erfüllt sind, sämtlich kleiner als der Betrag der absolut größten Wurzel der Gleichung (31).

5. Bedeutet G die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$(32) \quad \varphi(x) = |a_0| + |a_1| x + \dots + |a_{n-1}| x^{n-1} - |a_n| x^n = 0,$$

²⁶⁾ Vgl. § 3, 1.

so liegt mindestens eine Wurzel der Gleichung (31) im Kreisring

$$(\sqrt[n]{2} - 1)G \leq |x| \leq G$$

und keine Wurzel außerhalb des Kreises

$$|x| \leq G.$$

Der zweite Teil dieses Satzes ist trivial. Bedeutet R den Betrag der absolut größten Wurzel(n) der Gleichung (31), so ist zu zeigen, daß

$$R \geq (\sqrt[n]{2} - 1)G$$

ist.

Die Gleichung (32) entsteht durch Komposition von $g(x) = 0$ mit

$$\frac{\bar{a}_0}{|a_0|} + \binom{n}{1} \frac{\bar{a}_1}{|a_1|} x + \dots + \binom{n}{1} \frac{\bar{a}_{n-1}}{|a_{n-1}|} x^{n-1} - \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} x^n = 0,$$

wo für $a_r = 0$ $\frac{\bar{a}_r}{|a_r|}$ durch Null zu ersetzen ist. Die absoluten Beträge der Wurzeln dieser Gleichung sind nicht größer als die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{1} x^{n-1} - x^n = (1+x)^n - 2x^n = 0,$$

d. h. nicht größer als $\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{2}-1}$. Infolgedessen muß

$$G \leq \frac{R}{\sqrt[n]{2}-1},$$

also

$$R \geq (\sqrt[n]{2} - 1)G$$

sein.

Daß hier das Gleichheitszeichen wirklich auftreten kann, lehrt das Beispiel $g(x) = (1+x)^n$, $R = 1$, $G = \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

§ 10.

Satz von Egerváry.

1. Bei dem Beweise des Graceschen Kompositionssatzes hatte sich folgendes ergeben:

Liegen die Wurzeln der Gleichung

$$A(x) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

sämtlich im Innern, hingegen die Wurzeln der Gleichung

$$B_1(x) = x^n B\left(-\frac{1}{x}\right) = b_n - \binom{n}{1} b_{n-1} x + \dots + (-1)^n b_0 x^n = 0$$

sämtlich außerhalb oder auf dem Rande des Einheitskreises, so ist die bilineare Invariante

$$(33) \quad (A, B_1)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a_{\nu} b_{\nu}$$

von Null verschieden.

Führt man durch eine lineare Substitution den Kreis $|x| < 1$ in die Halbebene $J(x) > 0$ über, so erhält man wegen der Invarianteneigenschaft des Ausdrucks (33) das Resultat:

Liegen die Nullstellen des Polynoms $A(x)$ sämtlich in der Halbebene $J(x) > 0$ und die des Polynoms $B(x)$ sämtlich in der Halbebene $J(x) \geq 0$, so ist

$$a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 + \binom{n}{2} a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \neq 0.$$

Sei nun γ eine Zahl mit negativem imaginären Bestandteil. Besitzt die Gleichung

$$\bar{A}(x) = \bar{a}_0 + \binom{n}{1} \bar{a}_1 x + \binom{n}{2} \bar{a}_2 x^2 + \dots + \bar{a}_n x^n$$

lauter reelle, negative Wurzeln, so liegen die Wurzeln der Gleichung

$$A(x) = \bar{A}(\gamma x) = a_0 + \binom{n}{1} \bar{a}_1 \gamma x + \binom{n}{2} \bar{a}_2 \gamma^2 x^2 + \dots + \bar{a}_n \gamma^n x^n = 0$$

sämtlich in der Halbebene $J(x) > 0$; infolgedessen ist

$$\bar{a}_0 b_0 + \binom{n}{1} \bar{a}_1 b_1 \gamma + \binom{n}{2} \bar{a}_2 b_2 \gamma^2 + \dots + \bar{a}_n b_n \gamma^n \neq 0.$$

Wir haben damit folgenden Satz gefunden:

V. Besitzt die Gleichung

$$(34) \quad A(x) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

nur reelle, negative²⁷⁾ Wurzeln und liegen die Wurzeln der Gleichung-

$$(35) \quad B(x) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \dots + b_n x^n = 0$$

sämtlich in der Halbebene

$$J(x) \geq 0,$$

so befinden sich auch alle Wurzeln der Gleichung

$$(36) \quad C(x) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \dots + a_n b_n x^n = 0$$

in derselben Halbebene.

²⁷⁾ Allgemeiner: nichtpositive.

2. Sind die Wurzeln der Gleichung $B(x) = 0$ sämtlich reell, so kann das Polynom $C(x)$ offenbar keine imaginäre Nullstelle haben. Indem wir dieses Ergebnis mit Satz IV kombinieren, erhalten wir einen Satz des Herrn Egerváry:

V'. Sind die Wurzeln der Gleichung (34) sämtlich reell, nichtnegativ und kleiner als 1, die der Gleichung (35) sämtlich reell und im Intervall

$$-a < x < +a$$

gelegen, so sind alle Wurzeln der Gleichung (36) ebenfalls reell und liegen in demselben Intervall.

3. Sei

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

ein Polynom mit lauter reellen, nichtpositiven Nullstellen;

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_l x^l$$

ein Polynom, dessen Nullstellen sämtlich in der Halbebene $J(x) \geq 0$ liegen. Komponiert man dann die Gleichungen n -ten Grades

$$x^n g\left(\frac{1}{x}\right) = a_k x^{n-k} + a_{k-1} x^{n-k+1} + \dots + a_0 x^n = 0,$$

$$x^n h\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{b}_l x^{n-l} + \bar{b}_{l-1} x^{n-l+1} + \dots + \bar{b}_0 x^n = 0$$

und ersetzt man x durch $\frac{x}{n}$, so entsteht, wenn m die kleinere der beiden Zahlen k, l bedeutet,

$$\begin{aligned} n^n \varphi_n(x) = & a_0 \bar{b}_0 x^n + 1! a_1 \bar{b}_1 x^{n-1} + \frac{n}{n-1} 2! a_2 \bar{b}_2 x^{n-2} + \dots \\ & + \frac{n}{n-1} \frac{n}{n-2} \dots \frac{n}{n-m+1} m! a_m \bar{b}_m x^{n-m}, \end{aligned}$$

und die Nullstellen dieses Polynoms liegen in der Halbebene $J(x) \geq 0$.

Dieselbe Eigenschaft besitzen daher auch die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = & a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 x + \frac{n}{n-1} 2! a_2 b_2 x^2 + \dots \\ & + \frac{n}{n-1} \frac{n}{n-2} \dots \frac{n}{n-m+1} m! a_m b_m x^m = 0. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert uns so den Satz ²⁸⁾

²⁸⁾ Vgl. I. Schur, „Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln“, Journ. f. Math. 144, S. 75–88.

VI. Besitzt die Gleichung mit lauter reellen Wurzeln

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k = 0$$

keine negativen Koeffizienten und liegen die Wurzeln der Gleichung

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_l x^l = 0$$

sämtlich in der Halbebene

$$J(x) \geq 0,$$

so liegen, wenn m die kleinere der beiden Zahlen k, l ist, auch die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 x + 2! a_2 b_2 x^2 + \dots + m! a_m b_m x^m = 0$$

sämtlich in dieser Halbebene.

4. Komponiert man auf diese Weise

$$x^n g\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \dots + a_0 x^n$$

mit

$$(1+x)^n,$$

so wird

$$\varphi_1(x) = a_n + 1! \binom{n}{1} a_{n-1} x + 2! \binom{n}{2} a_{n-2} x^2 + \dots + n! a_0 x^n$$

ein Polynom mit lauter reellen, nichtpositiven Nullstellen. Komponieren wir zweitens

$$(1+x)^n$$

mit

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n,$$

so ist

$$\varphi_2(x) = b_0 + 1! \binom{n}{1} b_1 x + 2! \binom{n}{2} b_2 x^2 + \dots + n! b_n x^n$$

ein für $J(x) < 0$ nicht verschwindendes Polynom. Durch Komposition von $\varphi_1^*(x)$, $\varphi_2(x)$ auf Grund des Satzes V finden wir

$$\begin{aligned} \psi(x) &= n! a_0 b_0 + (n-1)! 1! \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \dots \\ &\quad + (n-\nu)! \nu! \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu + \dots + n! a_n b_n x^n \\ &= n! \{a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \dots + a_n b_n x^n\} \end{aligned}$$

und damit eine Erweiterung eines von Herrn E. Malo²⁹⁾ herrührenden Satzes:

²⁹⁾ „Note sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles“, Journ. de Math. spéc. (4) 4 (1895), S. 7.

VII. Sind die Wurzeln der Gleichung

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

sämtlich reell und nicht positiv und liegen die Wurzeln der Gleichung

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n = 0$$

sämtlich in der Halbebene

$$J(x) \geq 0,$$

so liegen auch die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \dots + a_n b_n x^n = 0$$

sämtlich in dieser Halbebene.

Anmerkung bei der Korrektur (29. III. 1921).

Mein Satz V findet sich auch in einer inzwischen (Nov. 1921) veröffentlichten Note des Herrn T. Takagi³⁰⁾.

³⁰⁾ „Note on the algebraic equations“, Proc. of the Phys. — Math. Society of Japan (3) 3 (1921), S. 175–179.

(Eingegangen am 15. August 1921).