

SULLA DINAMICA DELL' ELETTRONE IN UN MEZZO ANISOTROPO

Memoria di MASSARDI FRANCESCO.

Introduzione.

La dinamica dell' elettrone rigido è stata sviluppata dall' Abraham nel caso in cui l' elettrone si muova nell' etere. Essa esige la preliminare integrazione delle equazioni che danno il campo elettromagnetico generato dall' elettrone stesso, ed il suo sviluppo conduce a risultati traducentesi in equazioni delle quali è importante notare l' identità della forma con quelle del moto di un corpo solido in un fluido perfetto.

Poichè la presenza di inomogeneità ed anisotropia nel mezzo modifica la distribuzione delle linee di forza del campo, essendo questo la sede dell' energia, della quantità di moto e dell' inerzia dell' elettrone, si comprende come i risultati conseguiti nel caso particolare dell' etere non si possano a priori considerar validi.

Avendo in una precedente nota ¹⁾ determinato il campo elettromagnetico in un mezzo non omogeneo ed anisotropo dovuto ad una distribuzione di correnti fatta al finito, ci proponiamo ora di perseguire, su basi puramente elettromagnetiche, la meccanica dell' elettrone moventesi in tale mezzo, deducendola dal principio dei lavori virtuali: giungeremo a stabilire le equazioni del moto dell' elettrone, ponendo in evidenza sotto quali condizioni esse presentino un' identità

¹⁾ Massardi Francesco. « Campo elettromagnetico in un mezzo non omogeneo ed anisotropo ». (*Nuovo Cimento*, Settembre-Ottobre 1920).

Poichè sovente avremo occasione di ricorrere ai risultati conseguiti in tale nota, questa verrà brevemente richiamata senza ulteriori speciali indicazioni.

formale con quelle che reggono il moto di un solido in un fluido perfetto.

Emergerà dai risultati che si otterranno, come quelli conseguiti in proposito dall' Abraham ¹⁾ nel caso del moto dell'elettrone nell' etere, si presentano come i primi termini degli sviluppi che ci danno la soluzione della questione nel caso generale, oggetto della presente nota.

Nel § 1.^o imposteremo il problema: le equazioni che all'uopo ricorrono, sono le seguenti:

(I). — Quelle che determinano il campo elettrico e magnetico suscitate dal moto dell' elettrone;

(II). — L' equazione che determina il grado di libertà dell' elettrone, postulando la sua rigidità;

(III). — L' equazione dinamica fondamentale, che si ottiene estendendo alla dinamica dell' elettrone il principio dei lavori virtuali.

Esporrò qualche considerazione onde porre opportunamente in luce taluno dei principi sui quali si fonda la meccanica dell' elettrone, principi che non ostante il loro carattere speculativo, (come quello della rigidità dell' elettrone), indirettamente non sfuggirono al cimento della prova, dalla nota esperienza di Michelson alle recenti del Righi sullo stesso argomento.

Nel § 2.^o, partendo dalla considerazione del lavoro compiuto dalle forze interne nell' unità di tempo, stabiliremo un risultato che nel mentre corrisponde al principio della conservazione dell' energia, nello stesso tempo conduce a stabilire l' esistenza di una energia elettromagnetica dell' elettrone distribuita nel mezzo con densità finita.

¹⁾ Max Abraham. *Annalen der Physik.*, t. X, 1903, p. 105.

» » *Elektromagnetische Theorie der Strahlung.*, 1905.

La presente nota muove dai principi accettati e svolti nei suaccennati lavori, dai quali essa parte nella trattazione del caso generale ora in oggetto.

Nel § 3.^o, partendo dall' integrale del lavoro virtuale delle forze interne, otterremo per questo, per la risultante delle forze interne e pel momento risultante delle medesime, espressioni le quali portano alla considerazione di tensioni analoghe a quelle di Maxwell, esercitantesi sulla superficie limite del campo.

I risultati ottenuti, nel mentre ci portano ad introdurre nelle equazioni una quantità di moto elettromagnetico distribuita nel mezzo con densità finita (e quindi a ritrovare il principio dell'eguaglianza dell'azione e reazione), ci mettono in evidenza quali sono i contributi supplementari dovuti all' influenza dell' inomogeneità ed anisotropia nel mezzo.

Nel successivo § 4.^o, limitandoci alla supposizione che l' elettrone sia in riposo fino all' origine del tempo, istante in cui cominciano ad agire le forze esterne, saremo condotti a studiare il comportamento all' infinito delle tensioni, ed a concludere che all' infinito si annullano gli integrali di superficie che entrano nelle espressioni trovate nel precedente §, sia pel lavoro virtuale delle forze interne, sia per la risultante ed il momento risultante delle medesime.

La combinazione dei risultati così ottenuti, colle espressioni della risultante della forza esterna e del momento risultante della medesima date al § 1.^o, ci porterà ad un principio analogo a quello di Alembert nella meccanica dei solidi, e quindi a stabilire le equazioni del movimento dell'elettrone, equazioni le quali presentano un'importante identità nei riguardi della forma con quelle che, nella meccanica dei corpi rigidi, esprimono il teorema della quantità di moto e del momento della quantità di moto.

Nel successivo § 5.^o, riferendoci ad un sistema di assi che partecipa del moto di traslazione e di rotazione dell'elettrone, passeremo alla trasformazione delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico interno e delle equazioni del movimento. Le trasformazioni ottenute ci condurranno a prendere in considerazione una importante classe di movi-

menti che chiameremo notevoli, caratterizzati dalla stazionarietà del campo elettrico e magnetico rispetto agli assi mobili.

Nel § 6.^o infine, porremo in evidenza in quali condizioni la traslazione uniforme di un elettrone in un mezzo soddisfacente a determinate condizioni nei riguardi della distribuzione dell'anisotropia, susciti un campo stazionario.

I risultati che si ottengono in proposito, ci porteranno a concludere che anche nel caso ora considerato, (in cui l'elettrone si muove nel mezzo anisotropo dato con velocità costante e minore di quella della luce dal tempo $t = -\infty$ sino al tempo $t = 0$ in cui cominciano ad agire le forze esterne), valgono le equazioni del movimento dell'elettrone, al pari del caso in cui l'elettrone stesso era stato considerato in riposo fino al tempo $t = 0$.

Infine vedremo in quali condizioni, ammesse le equazioni del movimento, non è necessaria nè una forza esterna, nè una coppia esterna, per mantenere l'elettrone in moto uniforme, dalle quali considerazioni segue che nelle stabilite condizioni è ancora accettabile il principio d'inerzia.

Interesserebbe far precedere un riassunto delle origini del problema e del suo sviluppo. Si sarebbe così condotti a perseguire lo svolgimento che ha avuto il concetto di massa dell'elettrone, dal primo pensiero di Maxwell che paragonava l'energia elettrocinetica della corrente elettrica all'energia cinetica delle masse materiali, sino alle ultime conclusioni del Kaufmann e dell'Abraham ¹⁾, che permisero di affermare definitivamente che la massa dell'elettrone è puramente elettromagnetica: ma tale esposizione, non intimamente necessaria ai delimitati scopi di ricerca della presente nota, ci porterebbe troppo lungi dall'obbiettivo propostoci.

¹⁾ Kaufmann - Abraham. *Phys. Zeitschr.* 4, (p. 54, 57), 1902.

§ 1.^o**Le equazioni fondamentali.**

Il problema generale della dinamica dell' elettrone si propone di determinare le leggi del moto di una carica elettrica in un campo elettromagnetico dato.

La carica dell' elettrone, (carica che noi consideriamo come elementare), viene anzitutto supposta distribuita con densità finita ρ sopra una piccola porzione di spazio, che insieme alla carica stessa viene chiamata elettrone.

Data la velocità V colla quale l' elettrone si muove, il campo elettrico e magnetico generato dal moto dell' elettrone stesso risulta dalla integrazione del seguente sistema di equazioni.

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & -\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + 4\pi \frac{\rho V}{c} \\ (b) & \operatorname{rot} E = \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \\ (c) & \operatorname{div} D = \rho \\ (d) & \operatorname{div} H = 0 \end{array} \right.$$

Noi supponiamo sinistrorso il sistema di assi coordinati fissi al quale ci riferiamo, e per tutto quanto riguarda i simboli vettoriali, ci atteniamo in generale alle notazioni del Prof. Marcolongo e Burali Forti ¹⁾.

Generalmente additeremo le lettere maiuscole per indicare vettori, e le altre per le quantità scalari; talvolta però useremo le lettere minuscole sottolineate da un tratto per indicare vettori unitari.

¹⁾ Marcolongo e Burali Forti. « Elementi di calcolo vettoriale ». (Bologna Zanichelli, 909).

Per quanto concerne poi i significati specifici delle lettere usate nelle equazioni precedenti, indichiamo con

H la forza magnetica,

E la forza elettrica

D lo spostamento elettrico

ρ la densità di elettricità

c la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche nel vuoto.

Nel caso di un mezzo anisotropo non omogeneo

$$(1) \quad D_x = \frac{\epsilon_1(x, y, z)}{4\pi} E_x, \quad D_y = \frac{\epsilon_2(x, y, z)}{4\pi} E_y, \quad D_z = \frac{\epsilon_3(x, y, z)}{4\pi} E_z,$$

essendo $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ funzioni note dei punti dello spazio, continue e finite, presentanti al più delle discontinuità superficiali.

Nelle soprascritte equazioni, ρV è la densità della corrente di conduzione che compare nell'espressione delle equazioni di Hertz - Heavside.

L'integrazione di tale sistema di equazioni è stata l'oggetto di una nota precedentemente citata.

Richiamiamo sommariamente i principali risultati ottenuti, ai quali dovremo spesso ricorrere in seguito.

Sostituendo alle correnti di conduzione le correnti di convezione, abbiamo ottenuto pei vettori del campo elettromagnetico le espressioni seguenti

$$(1 \ a) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = - \operatorname{rot} A \\ E = - \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \end{array} \right.$$

φ ed A rappresentando rispettivamente uno scalare ed un vettore che rispondono alla nozione di potenziale scalare e

vettor potenziale elettromagnetico : tali potenziali sono soluzioni delle seguenti equazioni :

$$(1 a') \quad \left\{ \begin{array}{l} \square(\varphi) = -4\pi\rho - \operatorname{div} U(\varphi A) \\ \square(A) = -4\pi\frac{\rho V}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} U(\varphi A), \\ U_x(\varphi A) = -(1-\epsilon_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \\ U_y(\varphi A) = -(1-\epsilon_2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) \\ U_z(\varphi A) = -(1-\epsilon_3)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right), \end{array} \right.$$

ove con $\square(\quad)$ indichiamo il seguente simbolo operatore

$$\square(\quad) = \Delta(\quad) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\quad).$$

I potenziali φ ed A risultano allora dati dalle seguenti serie

$$(1 a'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n \\ A = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n. \end{array} \right.$$

Pei primi termini φ_0 ed A_0 si ha

$$(1 b) \quad \square\varphi_0 = -4\pi\rho, \quad \square A_0 = -4\pi\frac{\rho V}{c},$$

epperò conseguono per φ_0 ed A_0 le espressioni dei potenziali ritardati ¹⁾

$$(1 b') \quad \varphi_0 = \int \frac{dr}{r} \bar{\rho}, \quad A_0 = \int \frac{dr}{r} \frac{\bar{\rho V}}{c},$$

ove, quando non vi sia pericolo di equivoco, si è inteso di

¹⁾ Tullio Levi-Civita. « Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma Hertziana ». (*Nuovo Cimento*, Agosto 1897).

indicare con $\bar{\rho}, \frac{\bar{\rho} \bar{V}}{c}$, i valori che le funzioni stesse assumono sostituendo in esse $t - \frac{r}{c}$ in luogo di t .

Gli altri termini della serie sono dati dalle seguenti equazioni,

$$(1\ c) \quad \square \varphi_n = -\operatorname{div} U_{n-1} \quad , \quad \square A_n = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} U_{n-1} \quad ,$$

ove

$$U_{n-1} = U(\varphi_{n-1} \ A_{n-1}) \quad ,$$

epperò

$$(1\ c') \quad \varphi_n = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \left\{ \operatorname{div} U_{n-1} \right\}_{t-\frac{r}{c}} \quad , \quad A_n = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial t} \right\}_{t-\frac{r}{c}} .$$

Osserviamo che a φ_n ed A_n si possono anche attribuire le seguenti compendiose espressioni

$$(1\ c'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n = -\operatorname{div} G_{n-1} \\ A_n = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} G_{n-1} \end{array} \right. ,$$

ove

$$G_{n-1} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \bar{U}_{n-1} .$$

E ed H risultano essi pure dati dalle serie seguenti

$$(1\ d) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = E_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} E_n \\ H = H_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n \end{array} \right. .$$

E_0 ed H_0 indicano il campo elettrico e magnetico spettante all' elettrone supposto moventesi nell' etere anzichè nel mezzo anisotropo dato.

E_n ed H_n rappresentano i corrispondenti contributi dovuti all' influenza dell' anisotropia e dell' inomogeneità del mezzo: le espressioni dei singoli termini di H ed E risul-

tano applicando ai corrispondenti termini di A ed φ le relazioni (1 a), epperò

$$(1\ d') \left\{ \begin{array}{l} H_m = - \operatorname{rot} A_m \\ E_m = - \operatorname{grad} \varphi_m - \frac{1}{c} \frac{\partial A_m}{\partial t} \end{array} \right. \quad m = 0\ 1\ 2\ \dots\ \infty.$$

Le serie ottenute, con opportune e plausibili limitazioni riguardanti i valori iniziali, risultano convergenti, tanto nel caso in cui l'origine dei tempi sia prossima, come nel caso in cui l'origine dei tempi sia infinitamente remota.

Il campo nel quale l'elettrone si muove, può essere considerato come risultante dalla sovrapposizione di due campi, l'uno interno nel quale con E ed H indicheremo rispettivamente i valori del campo elettrico e magnetico dovuto all'elettrone stesso, e l'altro esterno nel quale con E_e ed H_e indicheremo rispettivamente il campo elettrico e magnetico dovuto a qualsiasi altra carica elettrica che non sia l'elettrone considerato.

Segue che agli elementi di volume dell'elettrone, nel quale l'elettricità è distribuita con densità ρ , sono applicate forze elettromagnetiche di origine interna ed esterna, che riferite all'unità di carica indicheremo rispettivamente con F ed F_e . Il Lorentz ed il Wiechert dimostrarono che si può ritrovare le forze elettromagnetiche, che agiscono sull'elettricità in riposo ed in movimento nel campo elettrico e magnetico, attribuendo loro le seguenti espressioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = E - \frac{1}{c} (V \wedge H) \\ F_e = E_e - \frac{1}{c} (V \wedge H_e) . \end{array} \right.$$

Tenendo presente che si tende a sviluppare la meccanica dell'elettrone su basi puramente elettromagnetiche, dobbiamo conseguentemente escludere qualsiasi forza che non sia di natura elettromagnetica, e poichè pel principio dell'unità delle forze elettriche e magnetiche, posto da Maxwell ed

Hertz, dobbiamo considerare come artificiale la distribuzione fra campo magnetico interno ed esterno all' elettrone, segue, che sopra ogni elemento $d r$ dell' elettrone stesso agisce in totale una forza elettromagnetica

$$(2 a) \quad \varphi d r (F + F_e) .$$

Prima di passare a stabilire l' equazione dinamica fondamentale, bisogna stabilire quella che limita il grado di libertà del movimento dell' elettrone.

Anzitutto l' aver attribuito all' elettrone dimensioni finite per quanto piccole, permette di affermare che le intensità del campo generato dall' elettrone non diventeranno infinite nei riguardi del valore, nè indeterminate nei riguardi della direzione, nei punti occupati dalle cariche stesse.

La più semplice ipotesi che si può fare sul grado di libertà dell' elettrone, non considerato come carica puntuale, è che esso possa compiere solo moti di traslazione e di rotazione, cosicchè il più generale movimento dell' elettrone risulta rappresentato dalla seguente equazione fondamentale cinematica

$$(II) \quad V = V_0 + (\omega \wedge R_0) ,$$

ove

V_0 è la velocità di traslazione di un punto di riferimento, scelto nell' interno dell' elettrone,

ω è la velocità angolare dell' elettrone attorno ad un'asse passante per quel punto di riferimento,

R_0 è il raggio vettore che va dal punto di riferimento al punto generico dell' elettrone stesso.

Tale equazione cinematica esprime che l' elettricità è supposta legata agli elementi di volume dell' elettrone indeformabile, come la materia è supposta legata agli elementi di volume di un corpo rigido.

Anche nei riguardi della forma dell' elettrone, faremo l' ipotesi più semplice attribuendogli la forma sferica, nel

cui volume (o sulla cui superficie), vi sia una distribuzione uniforme di elettricità, con densità finita ρ in unità C G S.

Nel caso del moto dell'elettrone nell'etere, ambedue queste ipotesi hanno condotto, nei riguardi del calcolo della massa elettromagnetica, a risultati concordanti colle esperienze di Kaufmann, epperò ogni altra più complicata ipotesi sulla forma e sulla distribuzione, risulta senz'altro inopportuna, almeno finchè ulteriori esperienze non la dimostrino incompatibile coi loro risultati.

Risultando la cinematica dei sistemi rigidi applicabile al moto dell'elettrone e delle sue parti, possiamo ottenere per la meccanica dell'elettrone tutti i vantaggi conseguiti colla considerazione dei vincoli di rigidità nella meccanica analitica.

Tornando quindi alla considerazione del sistema di forze (2 a) che sole agiscono sull'elettrone, noi otterremo infine per l'elettrone la cercata equazione dinamica fondamentale, postulando, anche nella dinamica dell'elettrone, il principio dei lavori virtuali:

« Per ogni spostamento virtuale dell'elettrone è nulla la somma dei lavori delle forze risultanti dalla sovrapposizione delle forze interne ed esterne ».

Indicando con δs , lo spostamento virtuale di un elemento di volume $d v$ dell'elettrone, posto

$$\delta L = \int \rho \left\{ (F + F_e) \times \delta s \right\} d v ,$$

e chiamando col nome di lavoro virtuale della risultante totale delle forze interne ed esterne, l'integrale stesso esteso a tutti gli elementi di volume $d v$ dell'elettrone, dovrà dunque essere,

$$(III) \quad \delta L = \int \rho \left\{ (F + F_e) \times \delta s \right\} d v = 0 .$$

Tale è l'equazione dinamica fondamentale cercata.

Posto

$$\begin{aligned}\delta L_i &= \int \rho (F \times \delta s) dv \\ \delta L_e &= \int \rho (F_e \times \delta s) dv ,\end{aligned}$$

chiamando rispettivamente,

δL_i lavoro virtuale delle forze interne,

δL_e lavoro virtuale delle forze esterne,

potremo anche scrivere

$$(III') \quad \delta L = \delta L_i + \delta L_e = 0 .$$

Applicando questa equazione successivamente ad una traslazione ed ad una rotazione virtuale, essa dà luogo alle seguenti due equazioni vettoriali

$$(III'') \quad \left\{ \begin{aligned} \int \rho (F + F_e) dv &= 0 \\ \int \rho \left\{ R_0 \wedge (F + F_e) \right\} dv &= 0 . \end{aligned} \right.$$

Posto

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} R_e &= \int \rho F_e dv \\ \Gamma_e &= \int \rho (R_0 \wedge F_e) dv , \end{aligned} \right.$$

chiameremo R_e forza risultante esterna e Γ_e momento risultante esterno, mentre chiameremo gli integrali seguenti

$$(3 a) \quad \int \rho F dv \quad , \quad \int \rho (R_0 \wedge F) dv ,$$

rispettivamente coi nomi di forza risultante interna e momento risultante interno.

Risultano allora per le due equazioni (III'), che conseguono dall'equazione dinamica fondamentale, le forme seguenti

$$(III''') \quad \left\{ \begin{aligned} R_e + \int \rho F dv &= 0 \\ \Gamma_e + \int \rho (R_0 \wedge F) dv &= 0 . \end{aligned} \right.$$

L'equazione dinamica stabilita esprime dunque, che le risultanti delle forze interne ed esterne applicate all'elettrone si fanno equilibrio, nel significato comunemente inteso nella meccanica dei corpi rigidi.

Può parere arbitrario attribuire all'elettrone condizioni di rigidità assoluta, soprattutto quando si pensi all'altissima intensità del campo elettromagnetico che deve regnare alla sua superficie ed al fatto che tutti i corpi solidi posseggono proprietà elastiche, ma d'altra parte una deformazione dell'elettrone condurrebbe alla considerazione di una energia potenziale diversa dall'energia elettromagnetica, rendendo così impossibile una dinamica dell'elettrone su basi puramente elettromagnetiche, in quanto che si sarebbero bensì eliminate le forze d'inerzia, ma si sarebbero introdotte le non meglio conosciute forze elastiche.

L'Hertz proponendosi di ricondurre ogni forma di energia potenziale all'energia cinetica di masse legate solo dai vincoli di rigidità, all'obiezione della impossibilità di realizzare vincoli assolutamente invariabili, risponde, « noi non abbiamo assai probabilmente che a discendere agli atomi per trovare dei legami veramente invariabili ».

Nella meccanica elettromagnetica si discende più in basso ancora, in quanto si attribuisce agli elettroni dimensioni dell'ordine di 10^{-13} centimetri.

La nostra dinamica dell'elettrone evita quindi di parlare di forze che tendono a deformare l'elettrone, facendo solo intervenire le forze interne ed esterne delle quali abbiamo tenuto parola.

L'ipotesi della deformabilità dell'elettrone in moto, trae la sua origine dal fatto che la nota esperienza di Michelson non aveva permesso di rilevare, contrariamente alle previsioni fatte, un corrispondente spostamento delle frangie d'interferenza.

La contrazione dell'elettrone in moto invocata da Lorentz, mentre conciliava i risultati delle esperienze, che dimostra-

vano da una parte l'immobilità dell'etere e dall'altra la impossibilità di scoprire il moto assoluto della terra, apriva la via al principio della relatività, secondo il quale solo il movimento relativo di un corpo rispetto ad un'altro è suscettibile di essere osservato e misurato.

Il Righi, ¹⁾ in uno dei suoi ultimi lavori, applicando la costruzione di Huygens alla determinazione dell'onda piana riflessa da uno specchio piano dotato di un moto rettilineo (del quale sieno trascurabili le potenze d'ordine superiore al secondo del rapporto fra la velocità di traslazione dello specchio e quella della luce), addita un metodo col quale si dovrebbe giungere a dimostrare, che la celebre esperienza di Michelson, contrariamente alla enunciata previsione, non dovrebbe mostrare, come in accordo coll'esperienza non ha mai mostrato, nessun spostamento delle frangie d'interferenza.

Verrebbe quindi meno in tal caso, la più grave obbiezione di carattere sperimentale, all'ipotesi della rigidità dell'elettrone, a beneficio della quale milita tutto intero il vantaggio, che le equazioni fondamentali alle quali essa conduce, permettono di sviluppare la dinamica dell'elettrone su basi puramente elettromagnetiche.

È ovvio notare come ai sei gradi di libertà, concessi dai legami di rigidità espressi dall'equazione cinematica fondamentale, corrispondono sei equazioni di condizione come nella meccanica dei corpi rigidi e cioè, le quattro equazioni del campo elettromagnetico interno (I), l'equazione cinematica (II), e l'equazione dinamica (III).

§ 2.º

L' Energia elettromagnetica.

I risultati che riguardano il principio della conservazione dell'energia conseguiti dal Maxwell Poynting ed Hertz, ed estesi dal Lorentz alla teoria degli elettroni moventesi nel-

¹⁾ Righi Augusto. — *Memoria Accademia Bologna*, 12 giugno 1919.

l'etere, rimangono vevoli anche nel caso in cui l'elettrone si muova in un mezzo che presenti anisotropia ed inomogeneità.

Infatti, pel lavoro $\frac{dL_i}{dt}$ compiuto dalle forze interne nell'unità di tempo, si ha l'espressione

$$(4) \quad \frac{dL_i}{dt} = \int (\mathbf{E} \times \mathbf{V}) \rho \, dv,$$

e per l'espressione (2) di \mathbf{F}

$$\frac{dL_i}{dt} = \int (\mathbf{E} \times \mathbf{V}) \rho \, dv,$$

d'onde pel valore di $\rho \mathbf{V}$ dato dalla (I a)

$$(4') \quad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{H}) \, dv - \int \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv.$$

Poichè

$$\text{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{H},$$

integrando a tutto lo spazio ed applicando il teorema della divergenza segue

$$-\frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{H}) \, dv = -\frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{E}) \, dv + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_n \, d\sigma,$$

n indicando la normale esterna alla superficie σ che limita il campo: tenendo presente poi la (I b) si ha

$$(4'') \quad -\frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{H}) \, dv = \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} \, dv + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_n \, d\sigma.$$

Per essere in conseguenza della (1)

$$\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

risulta

$$(4''') \quad -\int \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv = -\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{D}}{2} \right) dv.$$

Sostituendo (4'') e (4''') in (4'), si ha per $\frac{\partial L_i}{\partial t}$

$$\frac{\partial L_i}{\partial t} = -\frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial H^2}{\partial t} dv - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{D}}{2} \right) dv + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_n d\sigma.$$

Ammettendo per l'energia magnetica W_m , ed elettrica W_e , le espressioni

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dv, \quad W_e = \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{D}}{2} dv,$$

ed indicando con W l'energia totale

$$W = W_m + W_e,$$

risulta

$$(IV) \quad \frac{dL_i}{dt} + \int P_n d\sigma = -\frac{dW}{dt},$$

ove P indica il vettore di Poynting

$$(5) \quad \mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}),$$

cosicchè l'integrale

$$(6) \quad \int P_n d\sigma$$

misura l'energia irradiata verso l'esterno attraverso alla superficie che limita il campo.

L'equazione (IV) ci dice, che il lavoro fornito dalle forze interne e l'irradiazione dell'energia attraverso alla superficie esterna del campo, hanno luogo a spese dell'energia elettromagnetica del campo.

Tale è il risultato cercato che corrisponde precisamente al principio della conservazione dell'energia: esso ci conferma, che il campo dell'elettrone è soprattutto la sede della sua energia elettromagnetica, energia che risulta distribuita nel mezzo con densità determinata e finita.

Consideriamo il valore dell'integrale che da l'energia elettromagnetica

$$W = \int \left(\frac{H^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{D}}{2} \right) dv.$$

Tale integrale è esteso a tutto il campo dell'elettrone ed il suo valore in un istante dato, anzichè essere, come nel caso della meccanica dei solidi, funzione della velocità attuale, dipende da tutti gli stati di moto che competono ai tempi anteriori a quello preso in considerazione. Per renderci conto di questo, basta riportarci alle espressioni (Ia', \dots, d') che ci definiscono i vettori E ed H mediante il potenziale scalare φ ed il potenzial vettore A .

Dalle citate espressioni segue, che il campo risulta dalla sovrapposizione di onde che si propagano tutte colla velocità della luce: tali onde sono emesse, sia direttamente dall'elettrone negli istanti di tempo anteriori a quello considerato, sia dai singoli elementi di volume del mezzo, per polarizzazioni ivi suscitate da onde precedentemente partite dall'elettrone, o da altre partite da altri elementi di volume del mezzo, che in egual modo erano stati polarizzati.

Le difficoltà matematiche che si incontrano nel calcolo dell'integrale in oggetto, dipendono quindi, oltre che dal moto precedente dell'elettrone, anche dalla distribuzione della inomogeneità e dell'anisotropia del mezzo nel quale l'elettrone si muove.

§ 3.^o

Quantità di moto elettromagnetico.

Vediamo ora sotto quale aspetto ed in qual modo si possa parlare di quantità di moto elettromagnetico.

Riprendiamo in considerazione l'espressione del lavoro virtuale delle forze interne e notiamo anzitutto come si possa estendere la nozione di spostamento virtuale anche ai punti esterni all'elettrone, qualora si consideri un sistema di assi solidale a questo e partecipante a tutti i suoi movimenti, reali e virtuali: chiameremo spostamento virtuale di un punto qualunque, interno od esterno all'elettrone, quello subito dal punto stesso considerato legato a tale sistema di assi.

In conseguenza di questa estensione, noi possiamo considerare l'integrale che da il lavoro virtuale delle forze interne

$$(7) \quad \delta L_i = \int \rho (F \times \delta s) dv,$$

come esteso a tutto il volume del campo elettromagnetico limitato dalla superficie σ , in quanto che gli elementi di volume esterni all'elettrone forniscono contributi nulli, essendo ivi nulla la densità ρ .

Ricordiamo l'espressione di ρF

$$(8) \quad \rho F = \rho E - \frac{\rho}{c} (V \wedge H).$$

Dalla (I c) e (I a), segue per la componente di ρF sull'asse delle x .

$$(8') \quad \rho F_x = E_x \operatorname{div} D - \frac{1}{4\pi} (H \wedge \operatorname{rot} H)_x - \frac{1}{c} \left(H \wedge \frac{\partial D}{\partial t} \right)_x.$$

Dalle seguenti identità

$$\begin{aligned} E_x \operatorname{div} D - (D \wedge \operatorname{rot} E)_x &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (E_x D_x - E_y D_y - E_z D_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E \times D}{2} \right) - \\ &- D \times \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x D_z), \\ \frac{1}{4\pi} H_x \operatorname{div} H - \frac{1}{4\pi} (H \wedge \operatorname{rot} H)_x &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} (H_x H_y) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} (H_x H_z). \end{aligned}$$

Sommando membro a membro, ricordando (Ic) ed (Id), si ha

$$\begin{aligned} (8'') \quad E_x \operatorname{div} D - \frac{1}{4\pi} (H \wedge \operatorname{rot} H)_x &= \operatorname{div} (X_1 + X_2) - \\ &- D \times \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \wedge D \right), \end{aligned}$$

ove

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{1x} = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{8\pi} (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) \\ X_{1y} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y) \\ X_{1z} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_z + H_x H_z), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2x} = -\frac{1}{4\pi} E_x E'_x + \frac{1}{8\pi} E^2 \\ X_{2y} = -\frac{1}{4\pi} E_x E'_y \\ X_{2z} = -\frac{1}{4\pi} E_x E'_z, \end{array} \right.$$

ed in particolare

$$(9) \quad -\frac{1}{4\pi} E' = D - \frac{1}{4\pi} E.$$

Sostituendo (8'') in (8') si ottiene

$$\rho F_x = \text{div} (X_1 + X_2) - D \times \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H \wedge D);$$

tenendo presente la (5) e ponendo

$$(9') \quad P' = \frac{c}{4\pi} (H \wedge E'),$$

risulta infine

$$(10) \quad \rho F_x = \text{div} (X_1 + X_2) - D \times \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_x}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_x}{\partial t}.$$

Analogamente si hanno per sostituzione circolare le altre componenti di ρF e possiamo scrivere

$$(10') \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho F_x = \text{div} (X_1 + X_2) - \left(D \times \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_x}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_x}{\partial t} \\ \rho F_y = \text{div} (Y_1 + Y_2) - \left(D \times \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_y}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_y}{\partial t} \\ \rho F_z = \text{div} (Z_1 + Z_2) - \left(D \times \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_z}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P'_z}{\partial t}. \end{array} \right.$$

ove, ordinatamente esponendo le posizioni necessarie, è

$$\begin{aligned}
 X_{1x} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 \right\} + \frac{1}{8\pi} \left\{ H_x^2 - H_y^2 - H_z^2 \right\} \\
 X_{1y} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_x E_y + H_x H_y \right\} \\
 X_{1z} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_x E_z + H_x H_z \right\}, \\
 X_{2x} &= -\frac{1}{4\pi} E_x E_x' + \frac{1}{8\pi} E^2 \\
 X_{2y} &= -\frac{1}{4\pi} E_x E_y' \\
 X_{2z} &= -\frac{1}{4\pi} E_x E_z', \\
 Y_{1x} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_y E_x + H_y H_z \right\} \\
 Y_{1y} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ E_y^2 - E_x^2 - E_z^2 \right\} + \frac{1}{8\pi} \left\{ H_y^2 - H_x^2 - H_z^2 \right\} \\
 Y_{1z} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_y E_z + H_y H_z \right\}, \\
 Y_{2x} &= -\frac{1}{4\pi} E_y E_x' \\
 Y_{2y} &= -\frac{1}{4\pi} E_y E_y' + \frac{1}{8\pi} E^2 \\
 Y_{2z} &= -\frac{1}{4\pi} E_y E_z', \\
 Z_{1x} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_z E_x - H_z H_x \right\} \\
 Z_{1y} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_z E_y - H_z H_y \right\} \\
 Z_{1z} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \right\} + \frac{1}{8\pi} \left\{ H_z^2 - H_x^2 - H_y^2 \right\}, \\
 Z_{2x} &= -\frac{1}{4\pi} E_z E_x' \\
 Z_{2y} &= -\frac{1}{4\pi} E_z E_y' \\
 Z_{2z} &= -\frac{1}{4\pi} E_z E_z' + \frac{1}{8\pi} E^2.
 \end{aligned}
 \tag{10''}$$

Notisi, che le componenti delle X_i , Y_i , Z_i soddisfano alle relazioni di simmetria che intercedono fra le componenti degli sforzi, che si presentano nella meccanica dei sistemi continui, omogenei ed isotropi ,

$$(10''') \quad X_{iy} = Y_{ix} \quad X_{iz} = Z_{ix} \quad Y_{iz} = Z_{iy} .$$

Posto

$$-D \times \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_x'}{\partial t} = \text{div } X_3 ,$$

determiniamo una funzione S_x tale che sia

$$X_3 = \text{grad } S_x .$$

Avremo

$$\Delta_x S_x = -4\pi \rho_{sx} ,$$

ove

$$\rho_{sx} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial P_x'}{\partial t} - D \times \frac{\partial E}{\partial x} \right) ,$$

d' onde segue

$$S_x = \int \frac{dv}{r} \rho_{sx} .$$

Analogamente procedendo nei rimanenti due casi, avremo per le componenti di ρF le espressioni seguenti

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho F_x = \text{div} (X_1 + X_2 + X_3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_x'}{\partial t} \\ \rho F_y = \text{div} (Y_1 + Y_2 + Y_3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_y'}{\partial t} \\ \rho F_z = \text{div} (Z_1 + Z_2 + Z_3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_z'}{\partial t} , \end{array} \right.$$

ove

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} X_3 = \text{grad } S_x , S_x = \int \frac{dv}{r} \rho_{sx} , \rho_{sx} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial P_x'}{\partial t} - D \times \frac{\partial E}{\partial x} \right) \\ Y_3 = \text{grad } S_y , S_y = \int \frac{dv}{r} \rho_{sy} , \rho_{sy} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial P_y'}{\partial t} - D \times \frac{\partial E}{\partial y} \right) \\ Z_3 = \text{grad } S_z , S_z = \int \frac{dv}{r} \rho_{sz} , \rho_{sz} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial P_z'}{\partial t} - D \times \frac{\partial E}{\partial z} \right) . \end{array} \right.$$

Riprendiamo ora l'espressione (7) del lavoro virtuale delle forze interne; sostituendo in essa alle componenti di $\rho \mathbf{F}$ il loro valore dato dalle (11), avremo

$$(12) \quad \delta L_i = \int \left[\left\{ \operatorname{div} (X_1 + X_2 + X_3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_x}{\partial t} \right\} \delta x + \right. \\ \left. + \left\{ \operatorname{div} (Y_1 + Y_2 + Y_3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_y}{\partial t} \right\} \delta y + \right. \\ \left. + \left\{ \operatorname{div} (Z_1 + Z_2 + Z_3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_z}{\partial t} \right\} \delta z \right] dv,$$

ove con δ_x , δ_y , δ_z indichiamo le componenti dello spostamento virtuale δs .

Trattandosi di un sistema rigido, ogni spostamento possibile è anche virtuale e viceversa, epperò la rappresentazione più compendiosa dello spostamento virtuale sarà

$$(13) \quad \delta s = \delta \tau + \omega dt \wedge R_o,$$

$\delta \tau$ rappresentando lo spostamento virtuale di un punto del sistema scelto ad arbitrio e rigidamente collegato con esso, (in particolare si assume il centro dell'elettrone come centro di riduzione),

ωdt rappresentando la rotazione elementare attorno ad un asse passante per detto centro,

R_o essendo il vettore che va dal centro al punto generico, del quale si considera lo spostamento virtuale δs .

Consideriamo i contributi che all'espressione del lavoro virtuale apportano separatamente una traslazione pura, ed una rotazione pura

Cominciamo dal considerare il contributo dovuto alla traslazione $\delta \tau$, contributo che indicheremo con $\delta L_i'$,

$$(14) \quad \delta L_i' = \int \left\{ \operatorname{div} (X_1 + X_2 + X_3) \delta \tau_x + \operatorname{div} (Y_1 + Y_2 + Y_3) \delta \tau_y + \right. \\ \left. + \operatorname{div} (Z_1 + Z_2 + Z_3) \delta \tau_z \right\} dv - \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \delta \tau \right) dv.$$

Per essere $\delta\tau$ indipendente dalle coordinate del punto al quale è circostante l'elemento di volume dr , indicando con n la normale esterna alla superficie che limita il campo, si ha pel teorema della divergenza

$$\begin{aligned}\delta L_i' = & \delta\tau_x \int (X_1 + X_2 X_3)_n d\sigma + \delta\tau_y \int (Y_1 + Y_2 + Y_3)_n d\sigma + \\ & + \delta\tau_z \int (Z_1 + Z_2 + Z_3)_n d\sigma - \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} \times \delta\tau \right) dr.\end{aligned}$$

Consideriamo il primo integrale di superficie,

$$\begin{aligned}\int (X_1 + X_2 + X_3)_n d\sigma = & \int \left\{ X_{1x} \cos nx + X_{1y} \cos ny + X_{1z} \cos nz + \right. \\ & + X_{2x} \cos nx + X_{2y} \cos ny + X_{2z} \cos nz + \\ & \left. + \frac{\partial S_x}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial S_x}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial S_x}{\partial z} \cos nz \right\} d\sigma.\end{aligned}$$

Sostituendo alle componenti di X_1 ed X_2 , le espressioni date da (10'') risulta

$$\begin{aligned}\int (X_1 + X_2 + X_3)_n d\sigma = & \int \left[\frac{1}{8\pi} \left\{ 2E_x E_n + 2H_x H_n - \cos(nx)(E^2 + H^2) \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\pi} \left\{ -2E_x E_n' + \cos(nx)E^2 \right\} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 8\pi \frac{\partial S_x}{\partial n} \right\} \right] d\sigma.\end{aligned}$$

Con sostituzioni circolari delle lettere si ottengono analoghe espressioni per gli altri integrali.

Gli integrali superficiali che vengono così a comparire nell'espressione di $\delta L_i'$ fanno intervenire pressioni analoghe a quelle di Maxwell. nel caso di un mezzo isotropo omogeneo.

Indicando con T le pressioni esercitate in un punto della superficie σ , dal campo elettromagnetico prodotto dall'elettrone, tenendo presente che contrariamente alle convenzioni

ordinarie, le pressioni sono esercitate su σ dal campo elettromagnetico interno, posto

$$\begin{aligned}
 & T = T_1 + T_2 + T_3 \\
 (15) \quad & \left\{ \begin{aligned} T_{1x} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ 2 E_x E_n + 2 H_x H_n - (E^2 + H^2) \cos(nx) \right\} \\ T_{1y} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ 2 E_y E_n + 2 H_y H_n - (E^2 + H^2) \cos(ny) \right\} \\ T_{1z} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ 2 E_z E_n + 2 H_z H_n - (E^2 + H^2) \cos(nz) \right\}, \\ T_{2x} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ -2 E_x E_n' + E^2 \cos(nx) \right\} & T_{3x} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ 8\pi \frac{\partial S_x}{\partial n} \right\} \\ T_{2y} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ -2 E_y E_n' + E^2 \cos(ny) \right\} & T_{3y} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ 8\pi \frac{\partial S_y}{\partial n} \right\} \\ T_{2z} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ -2 E_z E_n' + E^2 \cos(nz) \right\} & T_{3z} &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ 8\pi \frac{\partial S_z}{\partial n} \right\}, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

segue

$$(15') \quad \delta L_i' = - \int (T \times \delta \tau) d\sigma - \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} \times \delta \tau \right) dv.$$

Per quanto seguirà, tenendo presente (10''), (11'), importa notare che

$$(15'') \quad \left\{ \begin{aligned} T_{1x} &= -X_{1n} & T_{2x} &= -X_{2n} & T_{3x} &= -X_{3n} \\ T_{1y} &= -Y_{1n} & T_{2y} &= -Y_{2n} & T_{3y} &= -Y_{3n} \\ T_{1z} &= -Z_{1n} & T_{2z} &= -Z_{2n} & T_{3z} &= -Z_{3n}. \end{aligned} \right.$$

Passiamo a considerare il contributo $\delta L_i''$ dovuto ad una rotazione

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \delta L_i'' &= \int \rho F \times (\omega dt \wedge R_0) dv = \omega dt \times \\
 & \quad \times \int (R_0 \wedge \rho F) dv
 \end{aligned}$$

e per le (11)

$$\begin{aligned}
 (16'') \quad \delta L_i'' = & \omega_x dt \int \left\{ R_{0y} \operatorname{div}(Z_1 + Z_2 + Z_3) - R_{0z} \operatorname{div}(Y_1 + Y_2 + Y_3) \right\} dv + \\
 & + \omega_y dt \int \left\{ R_{0z} \operatorname{div}(X_1 + X_2 + X_3) - R_{0x} \operatorname{div}(Z_1 + Z_2 + Z_3) \right\} dv + \\
 & + \omega_z dt \int \left\{ R_{0x} \operatorname{div}(Y_1 + Y_2 + Y_3) - R_{0y} \operatorname{div}(X_1 + X_2 + X_3) \right\} dv - \\
 & - \frac{1}{c^2} \omega dt \times \int \left(R_0 \wedge \frac{\partial P}{\partial t} \right) dv .
 \end{aligned}$$

Consideriamo il primo integrale del secondo membro, scomponiamolo nelle sue parti

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \int \left\{ R_{0y} \operatorname{div}(Z_1 + Z_2 + Z_3) - R_{0z} \operatorname{div}(Y_1 + Y_2 + Y_3) \right\} dv = \\
 = & \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_1 - R_{0z} \operatorname{div} Y_1) dv + \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_2 - R_{0z} \operatorname{div} Y_2) dv + \\
 & + \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_3 - R_{0z} \operatorname{div} Y_3) dv ,
 \end{aligned}$$

e passiamo successivamente alla trasformazione di ciascuna di queste.

Per quanto riguarda la prima, osservando che per essere le componenti del vettore R_0 niente altro che le coordinate del punto generico del campo d'integrazione rispetto al centro dell'elettrone assunto come origine delle coordinate, ne viene, che le derivate vettoriali $\frac{\partial R_0}{\partial x}$, $\frac{\partial R_0}{\partial y}$, $\frac{\partial R_0}{\partial z}$, coincidono coi vettori unitari di componenti rispettivamente 100, 010, 001; quindi integrando per parti risulta

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_1 - R_{0z} \operatorname{div} Y_1) dv = \\
 = & - \int (Z_{1y} - Y_{1z}) dv + \int (R_{0y} Z_{1,n} - R_{0z} Y_{1,n}) d\sigma ,
 \end{aligned}$$

e per (10''') e (15'')

$$(18') \quad \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_1 - R_{0z} \operatorname{div} Y_1) dv = - \int (R_0 \wedge T_1)_x d\sigma .$$

Per quanto riguarda il secondo integrale del secondo membro (17), per le considerazioni precedentemente fatte abbiamo

$$(19) \quad \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_1 - R_{0z} \operatorname{div} Y_1) dv = - \int (Z_{1y} - Y_{1z}) dv + \\ + \int (R_{0y} Z_{1n} - R_{0z} Y_{1n}) d\sigma$$

e tenendo presente (10''), (15'') e la (9), segue

$$\int (R_{0y} \operatorname{div} Z_1 - R_{0z} \operatorname{div} Y_1) dv = \frac{1}{4\pi} \int E_y E_z (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) dv - \int (R_0 \wedge T_1)_x d\sigma.$$

Determiniamo una funzione B_x tale che sia

$$(19') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 B_x = -4\pi \rho_{bx} \quad , \quad \rho_{bx} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 E_y E_z (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) , \\ B_x = \int \frac{dv}{r} \rho_{bx} . \end{array} \right.$$

Indicando come al solito con n la normale esterna, sarà

$$\frac{1}{4\pi} \int E_y E_z (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) dv = - \int \Delta_1 B_x dv = - \int \frac{\partial B_x}{\partial n} d\sigma ;$$

sostituendo i risultati ora ottenuti si ha

$$(19'') \quad \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_1 - R_{0z} \operatorname{div} Y_1) dv = - \int \frac{\partial B_x}{\partial n} d\sigma - \int (R_0 \wedge T)_x d\sigma .$$

Analogamente, per quanto riguarda il terzo integrale del secondo membro di (17) si ha

$$(20) \quad \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_3 - R_{0z} \operatorname{div} Y_3) dv = - \int (Z_{3y} - Y_{3z}) dv + \\ + \int (R_{0y} Z_{3n} - R_{0z} Y_{3n}) d\sigma ,$$

e per (11') e (15'')

$$(20') \quad \int (R_{0y} \operatorname{div} Z_3 - R_{0z} \operatorname{div} Y_3) dv = - \int \left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) dv - \\ - \int (R_0 \wedge T_3) d\sigma .$$

Indicando con S un vettore di componenti $S_x S_y S_z$, e con \mathbf{n} un vettore unitario diretto verso la normale esterna, per essere

$$\int (\text{rot } S) dv = \int (\mathbf{n} \wedge S) d\sigma,$$

segue

$$(20'') \quad \int (R_{0y} \text{div} Z_3 - R_{0z} \text{div} Y_3) dv = - \int (\mathbf{n} \wedge S)_x d\sigma - \int (R_0 \wedge T_3)_x d\sigma.$$

Riunendo le parti (18'), (19'') e (20''), dalla cui somma risulta il primo integrale dell'espressione (16') di $\delta L_i''$, ed analogamente procedendo con sostituzioni circolari delle lettere pel secondo e terzo integrale che compare in detta espressione (16') di $\delta L_i''$, per essere

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

Si ha infine per $\delta L_i''$ l'espressione

$$(21) \quad \delta L_i'' = -\omega dt \times \int (R_0 \wedge T) d\sigma - \omega dt \times \int \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} + \mathbf{n} \wedge S \right) d\sigma \\ - \frac{1}{c^2} \omega dt \times \int \left(R_0 \wedge \frac{\partial P}{\partial t} \right) dv,$$

ove

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} R_x = \int \frac{dv}{r} \rho_{bx} & \rho_{bx} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 E_y E_z (\epsilon_3 - \epsilon_2) \\ B_y = \int \frac{dv}{r} \rho_{by} & \rho_{by} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 E_z E_x (\epsilon_1 - \epsilon_3) \\ B_z = \int \frac{dv}{r} \rho_{bz} & \rho_{bz} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 E_x E_y (\epsilon_2 - \epsilon_1). \end{array} \right.$$

Riunendo in un'unico integrale i contributi (15') e (21), dovuti separatamente e rispettivamente ad una traslazione ed ad una rotazione virtuale, ricordando essere

$$-\omega dt \times \int (R_0 \wedge T) d\sigma = - \int T \times (\omega dt \wedge R_0) d\sigma \\ - \omega dt \times \int \left(R_0 \wedge \frac{\partial P}{\partial t} \right) dv = - \int \frac{\partial P}{\partial t} \times (\omega dt \wedge R_0) dv,$$

tenendo presente la (13), sia ha

$$(23) \quad \delta L_i = - \int (T \times \delta s) d\sigma - \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} \times \delta s \right) dv - \\ - \int \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \mathbf{n} \wedge \mathbf{S} \right) \times \omega dt d\sigma,$$

ove le componenti di T sono date dalle (15) e (15'), quelle di S dalle (11'), quelle di B dalle (22), e la P è data dalla (5).

L'ultimo integrale del secondo membro di (23), è suscettibile di una particolare interpretazione.

All'uopo scomponiamo il vettore $\frac{\partial B}{\partial n}$ in due parti, l'una nella direzione della normale esterna $\left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_n$, e l'altra $\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_t$ giacente nel piano tangente a $d\sigma$; sarà quindi

$$(24) \quad - \int \left(\frac{\partial B}{\partial n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{S} \right) \times \omega dt d\sigma = - \int \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_n \times \omega dt d\sigma - \\ - \int \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_t + \mathbf{n} \wedge \mathbf{S} \right\} \times \omega dt d\sigma.$$

Consideriamo il primo integrale del secondo membro.

Detto O' la proiezione del centro O dell'elettrone sul piano tangente a $d\sigma$, detto R'_0 la proiezione di R_0 sul piano tangente a $d\sigma$, segue

$$R'_0 = R_0 \cos \alpha,$$

α essendo l'angolo formato da R_0 col piano tangente a $d\sigma$.

Consideriamo nel piano tangente a $d\sigma$ un vettore U'_t applicato nel centro di $d\sigma$ perpendicolare a R'_0 e tale che sia

$$\left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_n = R'_0 \wedge U'_t.$$

Basterà porre

$$(25) \quad U'_t = \frac{1}{|R'_0|} \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_n \wedge \mathbf{r}'_0,$$

ove con \mathbf{r}'_0 indichiamo un vettore unitario applicato nel baricentro di $d\sigma$, e preso nella direzione del vettore R'_0 il cui modulo viene indicato con $|R'_0|$.

Segue sostituendo.

$$(26) \quad - \int \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} \right)_n \times \omega \, dt \, d\sigma = - \int \mathbf{U}_t' \times (\omega \, dt \wedge \mathbf{R}_0') \, d\sigma.$$

Passiamo a considerare il contributo portato dal secondo integrale che compare nel secondo membro della (24).

Notiamo anzitutto che il vettore

$$\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} \right)_t + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{S})$$

giace nel piano tangente a $d\sigma$.

Sia λ il piano normale a tale vettore e passante pel baricentro di $d\sigma$.

Indichiamo con \mathbf{O}_λ ed $\mathbf{R}_{0\lambda}$, rispettivamente le proiezioni di \mathbf{O} e di \mathbf{R}_0 sul piano λ , ed indichiamo con \mathbf{O}'' ed \mathbf{R}_0'' quelle di \mathbf{O}_λ ed $\mathbf{R}_{0\lambda}$ sul piano tangente a $d\sigma$: osserviamo in proposito che \mathbf{O}'' è pure la proiezione di \mathbf{O}' sulla comune intersezione del piano λ col piano tangente a $d\sigma$.

Detto γ l'angolo formato dai piani, λ ed $(\mathbf{n}, \mathbf{R}_0)$, segue

$$\mathbf{R}_0'' = \mathbf{R}_0' \cos \gamma = \mathbf{R}_0 \cos \alpha \cos \gamma.$$

Prendiamo ora sulla normale a $d\sigma$, a partire dal baricentro di $d\sigma$, un vettore \mathbf{U}_n'' tale che sia

$$\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} \right)_t + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{S}) = \mathbf{R}_0'' \wedge \mathbf{U}_n''.$$

Basterà porre

$$(27) \quad \mathbf{U}_n'' = \frac{1}{\mathbf{R}_0''} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} \right)_t + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{S}) \right\} \wedge \mathbf{r}_0'',$$

ove con \mathbf{r}_0'' indichiamo un vettore unitario applicato nel centro di $d\sigma$ e nella direzione di \mathbf{R}_0'' .

Segue

$$(28) \quad - \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} \right)_t + \mathbf{n} \wedge \mathbf{S} \right\} \times \omega \, dt \, d\sigma = - \int \mathbf{U}_n'' \times (\omega \, dt \wedge \mathbf{R}_0'') \, d\sigma.$$

Sostituendo nella (24) la (26) e la (28), sia ha

$$\begin{aligned} - \int \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{S} \right) \times \omega \, dt \, d\sigma &= - \int \mathbf{U}_t' \times (\omega \, dt \wedge \mathbf{R}_0') \, d\sigma - \\ &\quad - \int \mathbf{U}_n'' \times (\omega \, dt \wedge \mathbf{R}_0'') \, d\sigma, \end{aligned}$$

epperò sostituendo in (23)

$$(28) \quad \delta L_i = - \int (T \times \delta s) d\sigma - \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} \times \delta s \right) dv - \\ - \int U_i' \times (\omega dt \wedge R_0') d\sigma - \int U_n'' \times (\omega dt \wedge R_0'') d\sigma.$$

Gli ultimi due integrali che entrano nel secondo membro, fanno essi pure intervenire nel caso di una rotazione virtuale, pressioni analoghe a quelle di Maxwell: qui pure tenendo presente che contrariamente alle convenzioni ordinarie, che si stabiliscono nella determinazione delle pressioni stesse, queste sono ora esercitate su σ dal campo elettromagnetico interno creato dall'elettrone, ponendo:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i = -U_i' = \mathbf{r}'_0 \wedge \frac{1}{|R_0'|} \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_u, \\ T_n'' = -U_n'' = \mathbf{r}''_0 \wedge \frac{1}{|R_0''|} \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_i + \mathbf{n} \wedge S \right\}, \end{array} \right.$$

segue

$$(V) \quad \delta L_i = - \int (T \times \delta s) d\sigma - \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} \times \delta s \right) dv + \\ + \int T_i' \times (\omega dt \wedge R_0') d\sigma + \int T_n'' \times (\omega dt \wedge R_0'') d\sigma.$$

Tale equazione che da l'espressione di δL_i , è valevole per ogni spostamento virtuale dell'elettrone e del sistema solidale all'elettrone stesso.

Applicando la (V) ad una traslazione virtuale, segue per la forza risultante interna l'espressione:

$$(Va) \quad \int \rho F dv = - \int T d\sigma - \int \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} dv.$$

Applicandola invece ad una rotazione virtuale, si ottiene pel momento risultante delle forze interne l'espressione:

$$(Vb) \quad \int \rho (R_0 \wedge F) dv = - \int (R_0 \wedge T) d\sigma + \int (R_0' \wedge T_i') d\sigma + \\ + \int (R_0'' \wedge T_n'') d\sigma - \int \left(R_0 \wedge \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right) dv.$$

Dal confronto di (V a) e (V b) risulta, che in una rotazione istantanea l'inomogeneità e l'anisotropia del mezzo apportano al momento delle pressioni di Maxwell contributi dovuti a pressioni tangenziali T'_t e normali T''_n , che non si presentano nel caso di una semplice traslazione.

Precisamente i contributi supplementari apportati ad un elemento di superficie $d\sigma$, si presentano per l'appunto come se fossero dovuti ad ipotetiche rotazioni istantanee ωdt , dello stesso elemento di superficie $d\sigma$, rispettivamente attorno ai centri O' ed O'' .

Segue quindi, che ai punti della superficie σ risultano coordinati i punti O' ed O'' di altre due superfici σ' e σ'' , punti rispetto ai quali devono essere presi i contributi spettanti alle tensioni T'_t e T''_n suscitate in ogni rotazione istantanea.

Come nei riguardi della equazione (IV), l'introduzione di una energia dell'elettrone ripartita nel campo ci ha permesso di ritrovare il principio della conservazione dell'energia, così nei riguardi delle equazioni (V a) e (V b), l'introduzione di una quantità di moto elettromagnetica distribuita nello spazio con densità $\frac{1}{c^2} P$, ci porta a ritrovare il principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione.

Infatti in ogni punto del campo ove il vettore di Poynting P varia col tempo, ivi si desta una forza per unità di volume, eguale e di segno contrario alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto elettromagnetico.

Operando nella composizione di queste forze come nel caso dei corpi rigidi, si ha una forza risultante, ed una coppia risultante, il cui totale importo si ritrova in parte applicato sull'elettrone, e nella rimanente parte distribuito sulla superficie che limita il campo.

Però, mentre nei sistemi materiali la quantità di moto è localizzata nella materia, al contrario nel caso di un elettrone la sua quantità di moto elettromagnetica è ripartita in tutto il campo con densità finita eguale a $-\frac{1}{c^2} P$.

Il campo dell'elettrone, come è il ricettacolo della sua energia, è pur anche la sede della sua quantità di moto elettromagnetica e quindi anche, (come seguirà), della sua massa; epperò l'elettrone propriamente detto non ci appare, che come la porzione di spazio da dove irradiano, o convergono, le sue linee di forza elettrica ed ove sono applicate le forze esterne agenti sull'elettrone stesso.

Risultando la quantità di moto elettromagnetico dell'elettrone, al pari della energia, per una integrazione estesa a tutto il campo, si comprende come pur essa si presenti in funzione degli stati di moto anteriori e della distribuzione dell'inomogeneità ed anisotropia del mezzo, ciò che porta anche nei casi più semplici alle più complicate difficoltà.

§ 4.^o

Le equazioni del movimento dell'elettrone.

Limitiamoci alla considerazione del moto di elettroni in un mezzo anisotropo inhomogeneo, supponendo che le sole forze che intervengono sieno puramente elettriche e magnetiche di origine interna ed esterna ed eliminando nei riguardi di quest'ultima le azioni esercitate dalla materia sul moto degli elettroni: non è allora più necessario tracciare al finito una superficie σ per limitare il campo prodotto dall'elettrone, epperò detta superficie σ può essere immaginata sospinta all'infinito.

Calcolando allora, con opportune limitazioni, l'energia e la quantità di moto elettromagnetico come se l'elettrone esistesse solo nello spazio, saremo condotti a concludere che gli integrali di superficie che si presentano nelle equazioni (IV), (V), (V a) e (V b), si annullano.

Anzitutto, dipendendo le funzioni che si calcolano dagli stati di moto anteriori, è necessario portare la nostra atten-

zione sulle condizioni iniziali; precisamente noi considereremo i seguenti due casi:

1.^o — Supporremo che sino al tempo $t=0$ l'elettrone sia rimasto in riposo,

2.^o — Supporremo che dal tempo $t=-\infty$ sino al tempo $t=0$ l'elettrone si muova con velocità costante.

Cominciamo dal considerare il primo caso in cui l'elettrone si è supposto in riposo sino all'istante $t=0$, nel qual istante cominciano ad agire le forze esterne. Ammetteremo che sieno soddisfatte le condizioni iniziali, che nella nota precedentemente citata ci hanno permesso di affermare la convergenza delle serie che ci danno il campo elettromagnetico interno di un elettrone mobile in un mezzo anisotropo inhomogeneo.

Supporremo dunque che la velocità sia nulla sino all'origine dei tempi, (supposta non infinitamente remota) e che a partire dall'istante $t=0$, essa vari così lentamente rispetto alla velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche nel vuoto, che sieno trascurabili i prodotti delle sue derivate rispetto a t d'ordine superiore al secondo con potenze dello stesso grado di $\frac{1}{c}$.

Alle condizioni iniziali sopraccennate ed a quelle che riguardano le funzioni ε_1 ε_2 ε_3 , aggiungiamo per quest'ultime la seguente limitazione: supporremo cioè che le funzioni ε_1 ε_2 ε_3 varino oltre una certa distanza dall'origine delle coordinate, supposta al finito, per gradi così piccoli, che le loro derivate prime all'infinito si annullino come

$$\lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{1+\lambda}} \right), \quad \lambda > 0,$$

R_q essendo la distanza dall'origine delle coordinate del punto in cui si calcolano le derivate in oggetto.

Nella su citata nota si è trovato come il campo elettromagnetico risultasse da un potenziale scalare φ e da un potenziale vettore A dei quali ne abbiamo dato la espressione

sotto forma di serie, che nel § 1.^o della presente nota abbiamo richiamato colle formole (1 a'')

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n$$

$$A = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n ,$$

φ_0 ed A_0 essendo i potenziali all'elettrone supposto mobile nell'etere anzichè nel mezzo dato.

Il campo elettromagnetico in oggetto si può considerare quindi come la sovrapposizione di un numero infinito di campi elettromagnetici dovuti a distribuzioni fatte nello spazio, cui corrispondono come potenziali scalari e vettori, funzioni rispettivamente indicate con φ_n ed A_n , le cui espressioni vennero richiamate nel § 1.^o colle formole (1 c'').

Segue che le perturbazioni elettromagnetiche dovute al moto dell'elettrone e direttamente partenti da questo, determinano negli elementi di volume del mezzo anisotropo polarizzazioni irradianti perturbazioni, che chiameremo indirette, causa alla loro volta di ulteriori polarizzazioni nel mezzo, che si comportano come le precedenti. Le perturbazioni così suscitate, si propagano tutte colla velocità finita della luce, epperò quelle conseguenti a variazioni di moto dell'elettrone che per prime raggiungono l'elemento di superficie $d\sigma$, saranno quelle spettanti al campo φ_0 ed A_0 e direttamente partite dall'elettrone al tempo $t = 0$, ed insieme a queste, per anche quelle indirette, dovute alla polarizzazioni degli elementi di volume che si trovano sulla congiungente i punti dell'elettrone coll'elemento di superficie $d\sigma$: avendo supposta sospinta a distanza infinita la superficie σ , segue che le perturbazioni dirette ed indirette, dovute alle variazioni di moto dell'elettrone, investono i punti della superficie limite dopo un tempo infinito, cosicchè per ogni valore finito del tempo il campo sulla superficie σ è solo quello elettrostatico iniziale.

In conseguenza di ciò, il vettore P si annulla in ogni punto di σ e quindi anche l'integrale di superficie che compare nella equazione (IV).

Passiamo alla considerazione degli integrali di superficie che si trovano nelle equazioni (V), (V a) e (V b).

Anzitutto nelle espressioni di T , T'_i e T''_n , spariscono tutti i termini che contengono il campo magnetico, od elementi che variano rispetto al tempo, epperò dalle (15) e dalle (30), in tale caso particolare si ha

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = -\frac{1}{4\pi} (E_n - E'_n) E - \frac{\partial S}{\partial n} \\ T'_i = \mathbf{r}'_o \wedge \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_n \frac{1}{|R'_o|} \\ T''_n = \mathbf{r}''_o \wedge \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_i + \mathbf{n} \wedge S \right\} \frac{1}{|R''_o|}, \end{array} \right.$$

ove

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_x = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \left(D \times \frac{\partial E}{\partial x} \right) \dots\dots\dots \\ B_x = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 \int \frac{dv}{r} E_y E_z (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Vediamo come tali funzioni si comportano all'infinito.

In conseguenza dell'obbietto al quale si è limitata la nostra ricerca, E è il solo campo elettrostatico iniziale, che deve essere calcolato prescindendo da ogni variazione dovuta al tempo e dagli elementi che dipendono dal campo magnetico, epperò dalle richiamate formule (1 a)

$$(33) \quad E = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n,$$

ove, per quanto consegue delle suaccennate ipotesi e dalle (1 c'),

$$(33') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \int \frac{dv}{r} \rho \\ \varphi_n = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \left\{ (1-\varepsilon_1) \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial x^2} + (1-\varepsilon_2) \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial y^2} + (1-\varepsilon_3) \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial z^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z} \right\}, \end{array} \right.$$

formule nelle quali non compaiono potenziali ritardati, ma potenziali ordinari riferentesi alla distribuzione della densità iniziale di ρ .

Segue

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = E_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} E_n, \\ E = -\text{grad } \varphi_0 \quad E_n = -\text{grad } \varphi_n. \end{array} \right.$$

Essendo φ_0 la funzione potenziale ordinaria spettante all'elettrone, supposto immerso nell'etere, per essere $\rho \neq 0$ solo al finito, da (33') segue che φ_0 è finito quando il punto potenziato Q è al finito e che quando Q va all'infinito

$$(35) \quad \lim_{R_q = \infty} \varphi_0 = \lim_{R_q = \infty} \left(\frac{1}{R_q} \right),$$

R_q indicando la distanza di Q dall'origine delle coordinate supposta al finito.

Per quanto riguarda la sua derivata prima e seconda, calcolata in un punto Q esterno alla distribuzione ρ , si ha

$$(35') \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{R_q = \infty} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \lim_{R_q = \infty} \left(\frac{1}{R_q^2} \right) \\ \lim_{R_q = \infty} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = \lim_{R_q = \infty} \left(\frac{1}{R_q^3} \right). \end{array} \right.$$

Le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono date dalle (33'): tenendo presente il comportamento di φ_0 all'infinito e le condizioni limiti delle funzioni $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ all'infinito, deducendo successivamente $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, e studiandone il loro comportamento come nell'ultimo § dell'accennata nota dal potenziale vettore A_0 si sono ottenuti e studiati, nei riguardi delle derivate spaziali, successivamente A_1, A_2, \dots, A_n , si concludono per le φ_n proprietà analoghe a quelle allora stabilite

per le A_n : precisamente le φ_n , oltre risultare continue e finite, sono tali che

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{R_q \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{\mu_n}} \right) \\ \lim_{R_q \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{1+\mu_n}} \right) \\ \lim_{R_q \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{2+\mu_n}} \right), \\ \mu > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \dots > \mu_n > 0. \end{array} \right.$$

La sola differenza sta in questo, che il valore $\nu > 0$ che compariva nella suscitata nota in luogo di μ , è nel nostro caso sostituito dall'unità, o quanto meno da una quantità $\mu > \frac{1}{2}$, epperò

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > \frac{1}{2}.$$

Da (34), (35') e (36), segue

$$(37) \quad \lim_{R_q \rightarrow \infty} E_n = \lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{1+\mu_n}} \right), \quad 1 > \mu_n > \frac{1}{2},$$

epperò

$$(37 \text{ a}) \quad \lim_{R_q \rightarrow \infty} E_n \times E_m = \lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{3+\nu}} \right), \quad \nu > 0.$$

Richiamiamo ora le equazioni (IV), (V), (V a) e (V b), ove i valori di T , T'_i e T_n'' , sono dati dalle (31): i risultati conseguiti (37) (37 a), riguardanti i valori di E_n all'infinito, ci permettono di asserire, che sospinta la superficie limite σ del campo all'infinito, nella (V a) gli integrali di superficie si annullano come $\lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{1+\nu}} \right)$, nella (V) e (V b) come

$$\lim_{R_q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_q^{\nu}} \right), \quad \nu > 0.$$

Nella (IV) poi, come abbiám detto, dovendo eliminare i termini contenenti il campo magnetico alla superficie

limite immaginata sospinta all' infinito, l' integrale di superficie in oggetto sparisce.

Concludendo, nel caso proposto le equazioni in oggetto assumono la forma

$$(IV') \quad \frac{dL_i}{dt} = - \frac{dW}{dt}$$

$$(V') \quad \delta L_i = - \int dv \left(\delta s \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

$$(V' a) \quad \int \rho F dv = - \int dv \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$(V' b) \quad \int \rho (R_0 \wedge F) dv = - \int dv \left(R_0 \wedge \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right).$$

Per essere

$$\frac{dL_i}{dt} = \int \rho (V \times F) dv ,$$

$$V = V_0 + \omega \wedge R_0 ,$$

risulta dalla (IV')

$$\frac{dW}{dt} = - V_0 \times \int \rho F dv - \omega \times \int \rho (R_0 \wedge F) dv$$

e ricordando le equazioni (III''') del § 1.º, che collegano la risultante ed il momento risultante delle forze interne ed esterne, risulta

$$\frac{dW}{dt} = V_0 \times R_e + \omega \times \Gamma_e .$$

Sostituendo infine le espressioni R_e e Γ_e date dalle (3), segue componendo

$$\frac{dW}{dt} = \int \rho (V \times F_e) dv .$$

ossia

$$(VI) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dL_e}{dt} .$$

Tale equazione esprime, che l' aumento dell' energia elettromagnetica dell'elettrone è eguale al lavoro compiuto dalle forze esterne.

Dove si tenga presente, che il campo dell'elettrone è la sede della sua quantità di moto elettromagnetico che nel campo stesso trovasi distribuita con una densità

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{P} = - \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}) ,$$

segue per l'equazione (V') una immediata e notevole interpretazione.

Essa ci dice, che in ogni punto del campo ove la densità della quantità di moto elettromagnetico varia col tempo, ivi sopra un' unità di volume si esercita, sul sistema rigidamente legato all'elettrone, una reazione espressa da

$$- \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} .$$

Sostituendo nell'equazione (III') del § 1.º, l'espressione di δL_i data dalla (V'), si ha

$$(VII) \quad \delta L_e - \int \left(\delta s \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) dv = 0 .$$

Tale equazione del movimento corrisponde perfettamente al principio di Alembert della dinamica dei corpi rigidi.

Infatti sostituendo in (VII) a δL_e la sua espressione

$$\delta L_e = \int \varrho (\delta s \times \mathbf{F}_e) dv ,$$

risulta

$$(VII') \quad \int dv \varrho \left\{ \mathbf{F}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\} \times \delta s = 0 ;$$

ove \mathbf{F}_e è la forza applicata esterna, corrispondente quindi a quella forza che nella meccanica ordinaria si chiama forza attiva, mentre $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ è la forza interna destatasi in conseguenza di una variazione rispetto al tempo della densità di moto elettromagnetico ed è quindi una reazione assimilabile a quella forza che nella meccanica ordinaria si chiama forza d'inerzia.

L'equazione (VII') tradotta nel linguaggio della meccanica ordinaria dice appunto in conformità al principio di Alembert, che le forze attive e le forze d'inerzia si fanno equilibrio: tale è l'espressione del principio di Alembert, che trova così perfettamente il suo riscontro nella meccanica dell'elettrone.

Si può inoltre ottenere la risultante ed il momento risultante delle forze esterne applicate all'elettrone, in funzione del campo interno e della velocità dell'elettrone, combinando opportunamente le (III''') del § 1.º. colle (V' a) e (V' b).

Poniamo

$$(38) \quad Q = \int \frac{1}{c^2} P \, dv,$$

e chiamiamo Q col nome di impulsione elettromagnetica dell'elettrone, od integrale della sua quantità di moto elettromagnetico.

Derivando (38) rispetto a t e tenendo presente (III''') e (V' a), segue

$$(VII \ a) \quad R_\partial = \frac{dQ}{dt}.$$

Poniamo poi

$$(39) \quad K = \int \left(R_0 \wedge \frac{1}{c^2} P \right) dv,$$

e chiamiamo K momento dell'impulso elettromagnetico, od integrale del momento della quantità di moto elettromagnetico dell'elettrone.

Deriviamo tale ultima equazione rispetto a t

$$\frac{dK}{dt} = \int \left(\frac{\partial R_0}{\partial t} \wedge \frac{1}{c^2} P \right) dv + \int \left(R_0 \wedge \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right) dv;$$

osservando che $\frac{\partial R_0}{\partial t}$ è la variazione che subisce, in seguito al moto dell'elettrone, il raggio vettore R_0 che va dal centro dell'elettrone al punto fisso dello spazio cui è circostante l'elemento dv , segue

$$\frac{\partial R_0}{\partial t} = -V_0,$$

epperò tenendo presente (V' b) e (38) si ha

$$\frac{dK}{dt} = - (V_0 \wedge Q) - \int \varrho (R_0 \wedge F) dr ,$$

e per (III''')

$$(VII\ b) \qquad \Gamma_e = \frac{dK}{dt} + (V_0 \wedge Q) .$$

Le equazioni (VII a) e (VII b), sono le cercate equazioni del moto dell'elettrone.

Tali equazioni corrispondono perfettamente a quelle che competono al caso del moto di un corpo rigido in un fluido perfetto.

L'equazione (VII a) ci dà il teorema dell'impulso elettromagnetico, che nella sua espressione formale corrisponde perfettamente al teorema delle quantità di moto della meccanica razionale; l'equazione (VII b) ci dà il teorema del momento dell'impulso elettromagnetico, che corrisponde a quello del momento delle quantità di moto della meccanica razionale.

È da notare però che i risultati ora ottenuti, mascherano, sotto un'apparente semplicità, difficoltà d'ordine superiore a quelle che si presentano nella meccanica ordinaria. Mentre nella meccanica ordinaria le quantità di moto ed i momenti delle quantità di moto dei corpi sono funzioni lineari delle componenti delle loro velocità, nel caso della meccanica elettromagnetica, essendo l'impulso ed il momento d'impulso dell'elettrone rappresentati da integrali estesi a tutto il campo dell'elettrone, risulta che il loro valore ad un certo istante dipende, e dagli stati di moto posseduti dall'elettrone in tutti gli istanti anteriori a quello considerato, e dalla anisotropia del mezzo: segue che, solo in casi particolari, (che nei successivi paragrafi saranno oggetto di studio), sarà possibile tradurre in un modo semplice i risultati che nel caso generale della dinamica elettromagnetica si presentano così complessi ed irriducibili.

§ 5.^o**Trasformazione delle equazioni.**

Sino ad ora nel calcolo delle derivate vettoriali ci siamo sempre riferiti ad una terna fissa di assi coordinati.

Proponiamoci ora di esprimere i risultati ai quali siamo giunti, prendendo in considerazione le derivate rispetto al tempo dei vettori elettrici e magnetici calcolate con referenza ad una terna di assi che partecipi, non solo del movimento di traslazione, ma anche del movimento di rotazione dell'elettrone.

Indicando con $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ e $\frac{\partial' \mathbf{A}}{\partial t}$ le derivate del vettore \mathbf{A} , riferite rispettivamente ad un sistema fisso ed ad un sistema che partecipa del moto dell'elettrone; la differenza

$$\frac{\partial' \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

rappresenta la variazione rispetto al tempo che il vettore \mathbf{A} riceve in conseguenza del moto del sistema nel campo.

Tale variazione conterà di contributi dovuti ad una traslazione e di contributi dovuti ad una rotazione del sistema.

Ove si supponga anzitutto che il sistema mobile si trasporti mantenendo i propri assi paralleli a se stessi, i corrispondenti contributi apportati alle variazioni delle componenti di \mathbf{A} saranno

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} &= \mathbf{V} \times \text{grad } \mathbf{A}_x \\ \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} &= \mathbf{V} \times \text{grad } \mathbf{A}_y \\ \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} &= \mathbf{V} \times \text{grad } \mathbf{A}_z. \end{aligned}$$

che possiamo compendiosamente rappresentare con

$$(\mathbf{V} \times \text{grad}) \mathbf{A}.$$

L' intervento poi della rotazione del sistema mobile, com' è noto apporterà alla variazione del vettore A un contributo

$$(A \wedge \omega).$$

Possiamo dunque concludere

$$(40) \quad \frac{\partial' A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + (V \times \text{grad}) A + A \wedge \omega.$$

Analogamente avremo

$$(40') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial' E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + (V \times \text{grad}) E + E \wedge \omega \\ \frac{\partial' H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + (V \times \text{grad}) H + H \wedge \omega. \end{array} \right.$$

È da notare che delle tre parti delle quali risulta costituita la $\frac{\partial'}{\partial t}$, la seconda sparisce allorchè, come nel calcolo della impulsione Q e del momento d' impulsione K , ci si riferisce al centro dell' elettrone, epperò si ha in questo caso, come per un corpo rigido,

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial' Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \wedge \omega \\ \frac{\partial' K}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial t} + K \wedge \omega. \end{array} \right.$$

Abbiamo detto che la forza interna F agente su un punto dell' elettrone, è data dall' espressione

$$F = E - \frac{1}{c} (V \wedge H).$$

In ogni punto fuori dell' elettrone, F esprime la forza che si esercita su una carica elettrica unitaria legata agli assi mobili.

Il trascorrere del campo elettrico nel mezzo desta in questo uno spostamento che accompagna il campo elettrico stesso: ciò suscita in seno al mezzo una componente del campo magnetico, osservata dal Röntgen e dal Eichenwald, compo-

nente dovuta ad una corrente (detta di Röntgen) la cui densità è data dall' espressione

$$\text{rot} (D \wedge V) .$$

Tale valore della densità della corrente di Röntgen risulta dalla immediata considerazione delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo nel caso dei corpi in moto, e più precisamente dall' ipotesi, che anche in un sistema mobile il lavoro della forza magnetica lungo una linea in moto sia proporzionale alla quantità di elettricità che passa attraverso ad una superficie che abbia per contorno detta linea.

Tale corrente di Röntgen porta conseguentemente al campo magnetico un contributo

$$\frac{4\pi}{c} (V \wedge D) ,$$

epperò al vettore F definito nel campo elettrico, corrisponde nel campo magnetico il vettore

$$(42) \quad H' = H + \frac{4\pi}{c} (V \wedge D) ,$$

che rappresenta la forza magnetica esercitata dal campo interno sopra un polo magnetico unitario legato agli assi mobili.

Passiamo ora al calcolo di una conveniente espressione di F , che ci permetterà una notevole trasformazione delle equazioni fondamentali del campo riferite agli assi mobili.

Per essere

$$H = -\text{rot } A \quad , \quad E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} ,$$

sostituendo nell' espressione di F si ha

$$F = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{c} (V \wedge \text{rot } A) .$$

Dalla relazione vettoriale

$$\begin{aligned} \text{grad} (V \times A) &= V \wedge \text{rot } A + A \wedge \text{rot } V + \\ &+ (V \times \text{grad}) A + (A \times \text{grad}) V , \end{aligned}$$

per essere

$$V = V_0 + \omega \wedge R_0 ,$$

epperò

$$\text{rot } V = 2\omega, \quad (A \times \text{grad}) V = -A \wedge \omega,$$

segue

$$V \wedge \text{rot } A = \text{grad}(V \times A) - A \wedge \omega - (V \times \text{grad}) A,$$

d'onde sostituendo in F

$$F = -\text{grad} \left\{ \varphi - \frac{1}{c} (V \times A) \right\} - \\ - \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} + (V \times \text{grad}) A + A \wedge \omega \right\}.$$

Posto

$$(43) \quad \psi = \varphi - \frac{1}{c} (V \times A),$$

e tenendo presente (40) si ha

$$(44) \quad F = -\text{grad } \psi - \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}.$$

Per quanto riguarda il calcolo del rot, div, grad, è indifferente riferirsi ad una terna fissa piuttosto che ad una mobile, poichè non dovendo considerare dei vettori le loro variazioni rispetto al tempo, ma solo le loro posizioni attuali, segue che i vettori e gli scalari che si ottengono sono degli invarianti una trasformazione di coordinate.

Calcoliamo ora rot F ed rot H'.

Da (44) si ha

$$\text{rot } F = -\frac{1}{c} \frac{\partial'}{\partial t} \text{rot } A,$$

e per essere

$$H = -\text{rot } A,$$

segue

$$(45) \quad \text{rot } F = \frac{1}{c} \frac{\partial' H}{\partial t}.$$

Dalla (42) si ha

$$\text{rot } H' = \text{rot } H + \frac{4\pi}{c} \text{rot}(V \wedge D);$$

per essere

$$\text{rot}(V \wedge D) = (D \times \text{grad}) V - (V \times \text{grad}) D + V \text{div } D - D \text{div } V,$$

poichè

$$(\mathbf{D} \times \text{grad}) \mathbf{V} = -(\mathbf{D} \wedge \boldsymbol{\omega}) \quad , \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho \quad , \quad \text{div } \mathbf{V} = 0$$

ed essendo per (I a)

$$4\pi \frac{\rho \mathbf{V}}{c} = -\text{rot } \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad ,$$

segue

$$\text{rot } \mathbf{H}' = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\mathbf{V} \times \text{grad}) \mathbf{D} + \mathbf{D} \wedge \boldsymbol{\omega} \right\}$$

e per (40)

$$(46) \quad \text{rot } \mathbf{H}' = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial' \mathbf{D}}{\partial t} \quad .$$

Le equazioni (46) e (45) corrispondono rispettivamente alle equazioni del campo interno (I a) e (I b) del § 1.º: poichè le equazioni (I c) e (I d) del § stesso, sono degli invarianti di una trasformazione di coordinate, possiamo dire, che il sistema di equazioni fondamentali nel caso in cui ci si riferisce agli assi mobili si trasforma nel seguente

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\text{rot } \mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial' \mathbf{D}}{\partial t} & (a') \\ \text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{c} \frac{\partial' \mathbf{H}}{\partial t} & (b') \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho & (c') \\ \text{div } \mathbf{H} = 0 & (d') \end{array} \right.$$

Tale forma di equazioni ci conduce a prendere in considerazione una importante classe di movimenti e precisamente quelli caratterizzati dal fatto che i campi derivati dal potenziale scalare φ e dal potenziale vettore elettromagnetico \mathbf{A} , sono stazionari rispetto agli assi mobili.

In tali movimenti, che si chiamano notevoli, le derivate $\frac{\partial' \mathbf{A}}{\partial t}$ e $\frac{\partial' \mathbf{H}}{\partial t}$ si annullano, epperò dalla (I' b') segue che \mathbf{F} è irrotazionale e precisamente da (44) si ha

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \psi \quad .$$

Tale funzione Ψ , della quale F ne è il gradiente, dicesi potenziale di convezzione.

Per quanto riguarda poi la trasformazione delle equazioni del movimento dell'elettrone (VII *a*) e (VII *b*) riferite al sistema di assi mobili, dalle (41) si ha senz'altro

$$(VII' a) \quad \frac{d'Q}{dt} = R_e + Q \wedge \omega$$

$$(VII' b) \quad \frac{d'K}{dt} = \Gamma_e + K \wedge \omega - V_0 \wedge Q.$$

§ 6.^o

Equazioni del moto di un elettrone in traslazione uniforme.

Siamo partiti dalle equazioni fondamentali (I), abbiamo supposto il moto dell'elettrone retto dalla equazione cinematica (II), ed abbiamo ammesso soddisfatta l'equazione dinamica (III), che venne in seguito trasformata sino ad ottenere le equazioni del movimento (VII *a*) e (VII *b*).

Tali trasformazioni supponevano, che certi integrali, estesi alla superficie limite del campo sospinta all'infinito, avessero ad annullarsi.

Abbiam visto come nel caso particolare in cui l'elettrone sia supposto in riposo sino all'istante $t=0$, in cui cominciano ad agire le forze esterne, sono soddisfatte condizioni che ci permettono di concludere che detti integrali si annullano.

Intendiamo ora occuparci del secondo caso prospettato nel § 4.^o, nel qual caso si suppone che dal tempo $t=-\infty$ sino al tempo $t=0$ l'elettrone si muova con velocità costante.

Questo moto è dato dalla (II), ove si ponga in essa $\omega=0$, epperò $V=V_0$.

Assumiamo allora l'asse delle x nella direzione del moto, cosicchè

$$V_{oy} = V_{oz} = 0 ,$$

e poniamo

$$V_{ox} = v \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} .$$

Tenendo presente i risultati conseguiti nei riguardi della determinazione del campo elettromagnetico interno, sommariamente esposti al § 1.º della presente nota (formule 1a....d'), richiamando in particolare i risultati sui quali dobbiamo fermare la nostra attenzione, abbiamo

$$E = E_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} E_n$$

$$H = H_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n ,$$

E_0 ed H_0 essendo il campo elettrico e magnetico spettante all'elettrone supposto immerso nell'etere anzichè nel mezzo anisotropo dato: si ha

$$E_0 = - \text{grad } \varphi_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t}$$

$$H_0 = - \text{rot } A_0 ,$$

ove

$$\square \varphi_0 = - 4 \pi \rho \quad , \quad \square A_0 = - 4 \pi \frac{\rho V}{c} ,$$

d'onde

$$\varphi_0 = \int \frac{dv}{r} \frac{\rho}{\rho} \quad , \quad A_0 = \int \frac{dv}{r} \frac{\rho V}{c} ,$$

Per quanto riguarda i contributi E_n ed H_n ,

$$E_n = - \text{grad } \varphi_n - \frac{1}{c} \frac{\partial A_n}{\partial t}$$

$$H_n = - \text{rot } A_n ,$$

ove

$$\square \varphi_n = - \text{div } U_{n-1} \quad , \quad \square A_n = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} U_{n-1} ,$$

d' onde

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \left\{ \operatorname{div} U_{n-1} \right\}_{t-\frac{r}{c}}$$

$$A_n = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} U_{n-1} \right\}_{t-\frac{r}{c}},$$

essendo

$$U_{n-1x} = -(1 - \epsilon_1) \left\{ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_{n-1x}}{\partial t} \right\}$$

$$U_{n-1y} = -(1 - \epsilon_2) \left\{ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_{n-1y}}{\partial t} \right\}$$

$$U_{n-1z} = -(1 - \epsilon_3) \left\{ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_{n-1z}}{\partial t} \right\}.$$

Per quanto riguarda i valori di φ_0 ed A_0 , riferiti all'elettrone supposto mobile nell'etere con velocità costante, essendo la storia dell'elettrone sempre la stessa per tutti i differenti istanti segue, che i corrispondenti campi, elettrico e magnetico E_0 e H_0 , riferiti ad assi che partecipano al moto dell'elettrone, non variano col tempo.

Altrettanto in generale non possiamo dire nei riguardi delle porzioni di campo E_n ed H_n .

L'elettrone che trovasi nel mezzo non omogeneo ed anisotropo, suscita negli elementi di volume del dielettrico successive polarizzazioni, che inviano perturbazioni al punto potenziato.

Tali perturbazioni saranno diverse a seconda della diversa posizione che nei successivi istanti l'elettrone possiederà rispetto alle regioni del dielettrico, nelle quali l'inomogeneità e l'anisotropia ha valori diversi. Solo nel caso di un mezzo anisotropo omogeneo, in cui cioè le $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ si riducono a delle costanti; e così pure anche nel caso, particolare, in cui le funzioni $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ hanno una distribuzione simmetrica rispetto alla retta lungo la quale ha luogo il moto, per di più tale che ciascuna di dette funzioni conservi lo

stesso valore nei punti appartenenti a rette parallele alla direzione del moto, solo in tali due casi i campi E_n ed H_n , riferiti ad assi che partecipano al moto dell'elettrone, non variano col tempo.

Supponiamo precisamente soddisfatte tali condizioni.

Poichè allora

$$\frac{\partial'}{\partial t} = 0,$$

dalle (40) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x},$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= -\beta \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Le equazioni per φ_0 ed A_0 si trasformeranno allora nelle seguenti

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} &= -4 \pi \rho \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} &= -4 \pi \rho \beta. \end{aligned} \right.$$

Risulta

$$(48) \quad A_{0x} = \beta \varphi_0, \quad A_{0y} = A_{0z} = 0.$$

Dalle (1 d') del § 1.^o abbiamo allora per le espressioni del corrispondente campo elettrico e magnetico

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} E_{0x} &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \beta \frac{\partial A_{0x}}{\partial x} = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \\ E_{0y} &= &= & -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \\ E_{0z} &= &= & -\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{ox} = 0 \\ H_{oy} = -\frac{\partial A_{ox}}{\partial z} = -\beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \beta E_{oz} \\ H_{oz} = \frac{\partial A_{ox}}{\partial y} = \beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = -\beta E_{oy} . \end{array} \right.$$

Posto

$$(51) \quad F_0 = E_0 - \frac{1}{c} (V \wedge H_0) ,$$

segue

$$(51 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{ox} = E_{ox} = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \\ F_{oy} = (1 - \beta^2) E_{oy} = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \\ F_{oz} = (1 - \beta^2) E_{oz} = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} , \end{array} \right.$$

$$(51 b) \quad F_0 = -\text{grad } \psi_0 \quad , \quad \psi_0 = (1 - \beta^2) \varphi_0 .$$

Osserviamo come si comporta all'infinito il potenziale ψ_0 del quale F_0 ne è il gradiente.

Ove si ponga

$$(52) \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \beta < 1 ,$$

noi veniamo a far corrispondere l'elettrone ed il suo campo ad un sistema immobile nello spazio: tale trasformazione ci conduce ad un sistema reale sempre che si supponga $\beta < 1$ cioè $v < c$.

In tal caso il potenziale φ_0 soddisfa, nel sistema deformato, coll'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = -4\pi\rho :$$

φ_0 è dunque il potenziale di un ellissoide di rotazione con una distribuzione di carica continua e finita, (sia in superficie che in volume).

Dalla teoria del potenziale si ricava che

$$\lim_{R_p \rightarrow \infty} \varphi_0 = \lim_{R_p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_p} \right)$$

$$\lim_{R_p \rightarrow \infty} \frac{\partial_0 \varphi}{\partial x} = \lim_{R_p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_p^2} \right),$$

epperò da (49), (50) e (51), segue che all' infinito E_0 , H_0 ed F_0 , si comportano come $\lim_{R_p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_p^2} \right)$, R_p come al solito indicando la distanza di un punto dall' origine delle coordinate supposto al finito.

Tali risultati si potevano ottenere dalle equazioni (43), (48) e (44), appartenendo, nel caso particolare considerata, la traslazione uniforme alla classe dei moti notevoli.

Come φ_0 non è che il primo termine di φ , così Ψ_0 non è che il primo termine della serie che da Ψ .

Da (44), per essere $\frac{\partial' A}{\partial t} = 0$, si ha

$$(53) \quad F = - \text{grad } \psi.$$

Dalle posizioni fatte, segue da (43) per ψ l' espressione

$$\psi = \varphi - \beta A_x,$$

ove

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n, \quad A_x = A_{0x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{nx},$$

e per la (48) si ha

$$(54) \quad \psi = (1 - \beta^2) \varphi_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\varphi_n - \beta A_{nx}).$$

Vediamo ora come si comportano all' infinito le funzioni φ_n e βA_{nx} ; dai risultati che otterremo potremo allora dedurre dalla (53), non solo il comportamento globale di F , ma anche quello di E ed H e quindi in particolare quello di E_n ed H_n , e ciò allo scopo di poter legittimare nel caso dei moti notevoli l'annullarsi all' infinito degli integrali di superficie che si presentano nelle espressioni delle equazioni fondamentali.

Nella nota precedentemente citata, abbiamo trovato per le funzioni vettoriali A_n le seguenti espressioni,

$$A_n = \frac{1}{4\pi} \Omega(A_{n-1}) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \Omega^n(A_0),$$

$$\Omega(A_{n-1}) = \int \frac{dv}{r} \left\{ L(A_{n-1}) \right\}_{t-\frac{r}{c}},$$

ove

$$L_x(A_{n-1}) = (1 - \epsilon_1) \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{n-1x}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} A_{n-1} \right\}$$

$$L_y(A_{n-1}) = (1 - \epsilon_2) \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{n-1y}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} A_{n-1} \right\}$$

$$L_z(A_{n-1}) = (1 - \epsilon_3) \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{n-1z}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} A_{n-1} \right\}.$$

Noi abbiamo nel § 4.^o, della precitata nota, potuto affermare la convergenza delle serie che danno l'espressione del campo nel caso in cui l'origine dei tempi fosse infinitamente remota, ed abbiamo stabilito ed accettate le condizioni iniziali seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t' \rightarrow 0} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_{t'} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{N'}{r^\nu} \right) \\ \lim_{t' \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \right)_{t'} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{N''}{r^{1+\nu}} \right) \\ N' \text{ ed } N'' \text{ finiti e } \nu > 0; \text{ supponendo ancora che} \\ \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{1}{c^m} \left(\frac{\partial^m J}{\partial t^m} \right)_{t'} \text{ sia trascurabile per } m > 2, \\ \text{ove } t' = t - \frac{r}{c} \text{ ed } J = \frac{\rho}{c} \nu. \end{array} \right.$$

Ora noi ci siamo posti nel caso in cui l'elettrone possegga un moto uniforme e rettilineo da un tempo infinitamente remoto sino all'istante $t = 0$ (fissalo al finito e assunto come origine del tempo).

Per metterci nelle stesse condizioni del problema allora risolto, basterà riportare al tempo $t = -\infty$ le condizioni di costante uniformità del moto, che ora riteniamo essere soddisfatte sino all'origine dei tempi: risulta allora senz'altro che le condizioni iniziali poste per stabilire l'integrabilità delle equazioni nel caso generale, sono a foriori soddisfatte nel presente caso particolare.

Possiamo quindi accettare le conclusioni dell'analisi allora perseguita, che ci condusse ai seguenti risultati

$$\begin{aligned} \lim_{R_p = \infty} A_n &= \lim_{R_p = \infty} \left(\frac{1}{R_p^{\nu_m}} \right) \\ \lim_{R_p = \infty} \frac{\partial A_n}{\partial x} &= \lim_{R_p = \infty} \left(\frac{1}{R_p^{1+\nu_n}} \right) \\ \lim_{R_p = \infty} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2} &= \lim_{R_p = \infty} \left(\frac{1}{R_p^{2+\nu_n}} \right), \end{aligned}$$

ove

$$\nu > \nu_1 > \nu_2 \dots > \nu_n > 0.$$

Notisi che ove si supponga $\nu > \frac{1}{2}$, anche ν_n si può supporre sempre $> \frac{1}{2}$.

Altrettanto potendo asserire per φ_n e sue derivate con considerazioni analoghe a quelle precedentemente fatte, possiamo concludere che gli integrali di superficie che si presentano nelle equazioni (IV), (V), (V a) e (V b) spariscono allorchè la superficie limite del campo va all'infinito

Il risultato essenziale è che le equazioni del movimento (VII a) e (VII b) il principio di Alembert (VII) e la legge dell'energia (IV), possono essere applicati quando le condizioni iniziali del movimento corrispondono ad una traslazione uniforme e da $t = -\infty$ a $t = 0$, sempre che sia $v < c$, ed il mezzo nel quale la traslazione ha luogo soddisfi, nei riguardi dell'inomogeneità e dell'anisotropia, alle sopra espresse condizioni di simmetria.

Indaghiamo ora se, ammesse le equazioni del movimento, è necessario una forza esterna per mantenere la traslazione uniforme.

Poichè l'elettrone trascina con se il proprio campo elettromagnetico e conseguentemente il suo impulso e momento d'impulsione questi ultimi riferiti al centro dell'elettrone sono costanti, epperò si ha

$$\frac{\partial' Q}{\partial t} = \frac{\partial' K}{\partial t} = 0,$$

e da (VII' a) e (VII' b) § 5.^o risulta

$$\begin{aligned} R_e &= 0 \\ \Gamma_e &= V_0 \wedge Q. \end{aligned}$$

Anzitutto dalla prima per essere $R_e = 0$, si conclude che non è necessaria una forza esterna per mantenere l'elettrone in moto uniforme.

Dalla seconda segue, che è invece necessaria una coppia esterna Γ_e , a meno che non sia Q parallelo a V_0 .

Il vettore Q dipende dalla forma dell'elettrone, dalla ripartizione della carica su di esso, dal campo e quindi dalla inomogeneità ed anisotropia del mezzo. Supposto l'elettrone sferico con una distribuzione di carica uniforme (sia cubica che superficiale), Q risulta senz'altro parallelo a V_0 nel caso in cui il moto abbia luogo in un mezzo isotropo ed omogeneo. Alla stessa conclusione possiamo giungere nel caso in cui sieno soddisfatte, nei riguardi della inomogeneità ed anisotropia, le condizioni di simmetria rispetto alla direzione del moto nei termini che abbiamo più sopra accennato. In tali condizioni, nei punti dello spazio B e B' , simmetrici rispetto alla retta sulla quale ha luogo il moto dell'elettrone, il vettore $\frac{1}{c^2} P$ ha valori eguali e direzioni simmetriche rispetto alla direzione del moto, cosicchè il vettore

$$Q = \int \frac{1}{c^2} P dv$$

risulta parallelo a V_0 .

Possiamo dunque concludere, che nel caso considerato

$$R_e = 0 \quad , \quad \Gamma_e = 0 \quad ,$$

cioè non è necessario, nè una forza esterna, nè una coppia esterna per mantenere il moto uniforme dell'elettrone, vale a dire nelle stabilite condizioni e sempre per $v < c$, è ancora accettabile il principio d'inerzia.

Brescia, Luglio 1921.