

## XII. Die Fortpflanzung der Energie durch den Aether; von G. Helm.

Die Gleichungen, durch welche Hertz die Maxwell'sche Theorie ausgedrückt hat, lassen sich durch die *Bewegungsgleichungen eines den Raum stetig erfüllenden Mittels* ersetzen, dessen Volumenelemente in engen Grenzen affinveränderlich sind.

Nennt man nämlich  $u, v, w$  die Verschiebungscomponenten eines solchen Mittels im Orte  $x, y, z$  eines positiven Coordinatensystems, so bestimmen sich die Wirbelcomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  daselbst durch die Gleichungen

$$(1a) \quad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

sodass

$$(2) \quad \frac{\partial 2\xi}{\partial x} + \frac{\partial 2\eta}{\partial y} + \frac{\partial 2\zeta}{\partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(1b) \quad \begin{cases} \frac{\partial 2\eta}{\partial x} - \frac{\partial 2\zeta}{\partial y} = \Delta u - \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \frac{\partial 2\zeta}{\partial x} - \frac{\partial 2\xi}{\partial z} = \Delta v - \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \frac{\partial 2\xi}{\partial y} - \frac{\partial 2\eta}{\partial x} = \Delta w - \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{cases}$$

wo

$$(3) \quad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

die Dilatation des Volumenelementes am Orte  $xyz$ , eingeführt wurde, und  $\Delta$  die Operation  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  anzeigt.

Es bewege sich nun jedes Volumenelement des Mittels nach den Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x c^2 \Delta u + x(C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - k \frac{\partial u}{\partial t} + X_0 + X_1, \\ x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = x c^2 \Delta v + x(C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - k \frac{\partial v}{\partial t} + Y_0 + Y_1, \\ x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = x c^2 \Delta w + x(C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial z} - k \frac{\partial w}{\partial t} + Z_0 + Z_1, \end{cases}$$

deren letzte Glieder  $X_0$  bis  $Z_1$  Hilfskräfte bezeichnen, über die weiterhin verfügt werden soll, während  $t$  die Zeit darstellt, und  $\kappa$ ,  $k$ ,  $C$ ,  $c$  Grössen bedeuten, die für alle Elemente, welche dem Volumen eines und desselben homogenen Körpers angehören, gleich gross sind. Bezeichnet man noch  $\partial u / \partial t$  mit  $u'$  und in entsprechender Weise die übrigen Ableitungen nach der Zeit, so lassen sich die Gleichungen (1a) und (1b) in Verbindung mit (4) schreiben:

$$(5a) \quad \frac{\partial 2\xi}{\partial t} = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial 2\eta}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad \frac{\partial 2\zeta}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

$$(5b) \quad \begin{cases} \kappa \frac{\partial u'}{\partial t} + k u' - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - X_0 - X_1 = \kappa c^2 \left( \frac{\partial 2\eta}{\partial x} - \frac{\partial 2\zeta}{\partial y} \right) \\ \kappa \frac{\partial v'}{\partial t} + k v' - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} - Y_0 - Y_1 = \kappa c^2 \left( \frac{\partial 2\zeta}{\partial x} - \frac{\partial 2\xi}{\partial z} \right) \\ \kappa \frac{\partial w'}{\partial t} + k w' - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} - Z_0 - Z_1 = \kappa c^2 \left( \frac{\partial 2\xi}{\partial y} - \frac{\partial 2\eta}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Wir führen endlich die Hertz'schen Bezeichnungen der electrischen und magnetischen Kräfte und Constanten ein durch die Gleichungen:

$$(6a) \quad \begin{cases} a \cdot 2\xi = A\mu \left( L + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ a \cdot 2\eta = A\mu \left( M + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\ a \cdot 2\zeta = A\mu \left( N + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (6b) \quad \begin{cases} b c^2 \cdot 2\xi = L + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ b c^2 \cdot 2\eta = M + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ b c^2 \cdot 2\zeta = N + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(6c) \quad a u' = X + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a v' = Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a w' = Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(6d) \quad \begin{cases} b u' = A\varepsilon \left( X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ b v' = A\varepsilon \left( Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ b w' = A\varepsilon \left( Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (6e) \quad \begin{cases} b \frac{k}{\kappa} u' = 4\pi\lambda A \left( X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ b \frac{k}{\kappa} v' = 4\pi\lambda A \left( Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ b \frac{k}{\kappa} w' = 4\pi\lambda A \left( Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases}$$

$$(6f) \quad b \frac{1}{\kappa} X_0 = 4\pi\lambda A X', \quad b \frac{1}{\kappa} Y_0 = 4\pi\lambda A Y', \quad b \frac{1}{\kappa} Z_0 = 4\pi\lambda A Z'.$$

Zu beachten ist nur, dass bei  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  der Strich nicht wie sonst in diesem Aufsätze eine Differentiation anzeigt.



und dass durch (10) und (12) der Werth  $\Phi$  umgeformt wird in:

$$(8b) \quad \Phi = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(\varphi - \varphi_0) - a \kappa C^2 \sigma.$$

Soll die Function  $\varphi$  wie bei Hertz das electrostatische Potential bezeichnen, so ist nach (9b)

$$(14) \quad \sigma' = 0$$

die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (4) zur Beschreibung derjenigen Erscheinungen ausreichen, die durch die Maxwell'sche Theorie für *ruhende* Körper umfasst werden. In diesem Falle ziehen sich die Bedingungen (8) und (8b) mit (13) zusammen zu

$$\kappa \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + k \Delta \varphi = -a \left( \frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} \right),$$

d. h. zur Continuitätsgleichung der electrischen Strömung

$$(14b) \quad \frac{\partial}{\partial x} [k(X - X')] + \frac{\partial}{\partial y} [k(Y - Y')] + \frac{\partial}{\partial z} [k(Z - Z')] = \frac{\partial}{\partial t} (\kappa \Delta \varphi).$$

Die vorstehenden Entwicklungen, welche hier nur in den Hauptzügen niedergelegt sind, sodass besonders hinsichtlich der Grenzbedingungen und der physikalischen Bedeutung aller eingeführten Grössen auf die Ausführungen von Hertz<sup>1)</sup> verwiesen werden muss, beweisen, dass an Stelle der Hertz'schen Gleichungen (7) die Gleichungen (4) treten können, also die Bewegungsgleichungen eines elastisch festen Körpers, dessen Dichte  $\kappa$  ist, und in dem sich überall, wo nicht äussere Kräfte auf ihn einwirken, Transversal- und Longitudinalwellen mit den Geschwindigkeiten  $c$  und  $C$  ausbreiten können. Aeussere Kräfte wirken erstens an vereinzeltten Stellen ein, nämlich die den electromotorischen Kräften galvanischen, thermischen und chemischen Ursprungs proportionalen  $X_0, Y_0, Z_0$ . Zweitens wirken in allen Volumenelementen die wesentlich vom electrostatischen Potential abhängigen Kräfte  $X_1, Y_1, Z_1$ , denen sich drittens in allen als Leiter bezeichneten Raumgebieten noch reibungsartige Kräfte  $-k u', -k v', -k w'$ , zugesellen.

Die Gleichungen (4) vereinfachen die Auffassung electrischer und magnetischer Vorgänge nicht unerheblich, indem sie zu-

---

1) Hertz, Wied. Ann. 40 u. 41. 1890. Auch „Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft“. p. 208 u. 256. Leipzig 1892,

folge der Gleichungen (6) die als electriche und magnetische Kraft bezeichneten Vektoren bez. durch Geschwindigkeit und Verwindung ersetzen, also durch Begriffe, deren gegenseitige Beziehung der Anschauung verhältnismässig leicht zugänglich ist. Es scheint bei dem jetzigen Zustande der Wissenschaft und Technik nicht belanglos zu sein, dass Versuche solcher mechanischer Vorstellungsweisen der electriche und magnetischen Erscheinungen, die von der Anschauung leicht verfolgt werden können, durchgearbeitet und allgemein einer Prüfung auf theoretische Zulässigkeit und praktische Brauchbarkeit unterzogen werden.

Es soll hier nicht im Einzelnen die im Uebergang zu den Gleichungen (4) liegende Wendung unserer Vorstellungsweisen über electriche und magnetische Vorgänge entwickelt werden, Ich beschränke mich auf die Gleichungen der electriche Induction als Beispiel. Die erste der Gleichungen (4) kann unter Rücksicht auf (8) und (8b) geschrieben werden

$$a c^2 \Delta u = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + a \frac{k}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{a}{\kappa} X_0$$

oder nach (6c), (12) und (10)

$$a c^2 \Delta u = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{4 \pi \lambda}{\epsilon} X + a c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{4 \pi \lambda}{\epsilon} X'.$$

Man darf daher, die Integrationen über den ganzen Raum erstreckend, setzen.

$$a u = - \int \frac{1}{c^2 \epsilon} \cdot \frac{\lambda (X - X')}{r} d\tau - \frac{a}{4 \pi} \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau}{r} - \frac{1}{4 \pi} \int \frac{1}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t} \frac{d\tau}{r}$$

oder

$$(15) \quad -a u = + A^2 \int \mu \frac{\lambda (X - X')}{r} d\tau + \frac{A^2}{4 \pi} \int \epsilon \cdot \mu \frac{\partial X}{\partial t} \frac{d\tau}{r} + \frac{a}{4 \pi} \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{d\tau}{r}$$

wo  $r$  die Entfernung des betrachteten Volumenelementes vom Element  $d\tau$  bezeichnet. Die Gleichung (6c) oder

$$(16) \quad X = - \frac{\partial}{\partial t} (-a u) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

stellt dann die erste der Inductionsgleichungen dar, was bei den nahen Beziehungen zwischen  $-a u$  und der Componente  $F$  des Maxwell'schen Vectorpotentials nicht ausführlicher erörtert zu werden braucht. Die Maxwell'sche Annahme  $\partial F / \partial x + \partial G / \partial y + \partial H / \partial z = 0$  ist nach (3) erfüllt.

Hiernach ist nun während eines stationären Stromes das elastisch feste Mittel nicht in einem Bewegungs-, sondern in einem Spannungszustande, bei welchem die Verschiebungen mittels einer Function  $\varphi$  durch Gleichungen bestimmt sind, deren erste lauten

$$-au = A^2 \int \mu \frac{\lambda(X-X')}{r} d\tau + \frac{a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\sigma d\tau}{r}, \quad X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Die Verwindungen ergeben sich dann nach (1a) und zeigen magnetische Kräfte  $LMN$  zufolge der Formeln (6b) an. Jede Veränderung dieser Verwindungen bewirkt nach (5a) Verschiebungsgeschwindigkeiten und daher nach (6c) electriche Inductionskräfte  $XYZ$ , während bei unverändertem Verwindungszustande electriche Kräfte nur durch das electrostatische Potential  $\varphi$  bedingt sind.

Die durch die Gleichungen (6) gegebene Umdeutung der electricen und magnetischen Vektoren in Geschwindigkeits- und Verschiebungsgrössen eines stetig den Raum erfüllenden Mittels ist nicht die einzig mögliche. Wenigstens kann man (abgesehen von den bekannten hydrodynamischen Analogien) für den Fall  $k=0$  die magnetischen Kraftcomponenten  $LMN$  mit den Grössen  $\xi' \eta' \zeta'$  proportional wählen und die electricen Kraftcomponenten mit  $\Delta u - \partial \sigma / \partial x$ ,  $\Delta v - \partial \sigma / \partial y$ ,  $\Delta w - \partial \sigma / \partial z$ . Aber, wenn das raumerfüllende Mittel als elastisch fester Körper vorgestellt werden soll, wie es für seine Verwendung als Lichtäther geboten erscheint, so müssen die Annahmen ausgeschlossen werden, welche Vektoren, die während stationärer Zustände unveränderlich bleiben, als Geschwindigkeitsgrössen deuten.

Ausser den Gleichungen für die Fortpflanzung der Energie, welche den Ausgangspunkt der vorangehenden Erörterungen bildeten, gehört zur Maxwell-Hertz'schen Theorie noch die Angabe des in der Volumeneinheit für Bewegung ponderabler Massen verfügbaren Energievorrathes:

$$(17) \quad \frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2).$$

Wenn dieser Energievorrath in molaren oder molecularen Formen ponderablen Massen zukommen soll, so muss er dem im Vorangehenden allein ins Auge gefassten elastisch-festen

Mittel entzogen werden, was uns wohl nur durch die Annahme reibungsartiger Absorption der Energie mechanisch verständlich wird. Diese Absorption kann der Gleichung (4) zufolge nur von Kräften herrühren, deren  $X$ -Componenten den Betrag ergeben

$$-k u' + X_0 + X_1,$$

das ist nach (8) und (8b)

$$-k u' + X_0 + \frac{\kappa}{a} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{k}{a} \frac{\partial q}{\partial x} - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

oder

$$(18) \quad -\frac{k}{a} \cdot (X - X') + \frac{\kappa}{a} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Es liegt nahe, diese absorbirenden Kräfte der Wechselwirkung zwischen den ponderablen Molecülen und dem elastisch-festen Mittel zuzuschreiben. Dies führt zu der gewohnten Vorstellungsweise, nach welcher die Molecüle als Kerne in den Aether eingesprengt sind, welche die sie treffende Energie theilweise absorbiren. In den dielectricischen Körpern sind diese Kerne so vereinzelt, dass zwischen ihnen die Energiefortpflanzung im elastisch-festen Mittel ungestört stattfinden kann. Die Störung der Energiefortpflanzung in den Leitern könnte man der thermischen Molecularbewegung zuschreiben, indem man sich durch die letztere die Molecüle in so weiten Grenzen bewegt denkt, dass in kurzen Fristen alle Volumentheile wiederholt in den absorbirenden Zustand gerathen.

Um den Werth der in Energie ponderabler Massen umgeformten Aetherenergie auf Grund der hier entwickelten Anschauungen herleiten zu können, steht noch eine Annahme über die Beweglichkeit offen, die man der Substanz, aus der jene Kerne, die ponderablen Molecüle, bestehen, zuzuschreiben hat. Die Anhaltunkte, welche die Electricität dafür bietet, dürften folgende sein:

Schon um die freie Beweglichkeit der ponderablen Theile durch den festen Aether hindurch zu sichern, ist es zweckmässig die Substanz der Kerne als eine Art zweiten Aggregatzustand des Stoffes anzusehen, der nach den Gleichungen (4) die Energie fortpflanzt. Ein ponderables Molecül bewegen, heisst dann den Zustand des Aethers bewegen, den es erzeugt, oder vielmehr, der es characterisirt, in dem es einzig besteht.

Das ist die Hypothese, die ich 1881<sup>1)</sup> entwickelt habe. Sie gestattet sogleich, die Electric für *bewegte* ponderable Körper zu entwickeln; sie sagt ja wesentlich dasselbe aus, was Hertz zur Grundlage seiner Gleichungen für bewegte Körper macht, nämlich dass die Bewegung der Körper die Kraftlinien mit ihnen fortführt.

Dieselbe Hypothese macht aber auch verständlich, dass kinetische Energie ponderabler Massen als Aequivalent für den absorbirten Energievorrath auftritt. Denn die im Zeitelement  $dt$  mit der Geschwindigkeit  $x'y'z'$  stattfindende Verschiebung des Aetherzustandes, den wir Molecül nennen, hat Uebergang einer mit jener Geschwindigkeit proportionalen Aethermenge aus dem elastisch festen Gebiete in das Gebiet des Molecüls zur Folge, aber bei gleichförmiger Verschiebung auch einen ebenso grossen Uebergang aus dem letzteren in das erstere Gebiet. In den Zeitelementen, in denen sich  $x'y'z'$  ändern, ist die Gleichheit gestört.

Während eines stationären Stromes herrscht nach der hier vorgetragenen Theorie überall im festen Aether ein Spannungszustand. Die während des Stromes nicht-umkehrbar entwickelte Wärme würde also keine mechanische Erklärung finden, wenn nicht jener Spannungszustand von einem Bewegungszustande in einem andern Mittel begleitet ist. Es scheint daher zweckmässig, sich die Substanz der ponderablen Molecüle als flüssigen Aether vorzustellen, wie ich das a. a. O. gethan habe. (Während ich aber 1881 den Inhalt der Gleichung (4) so zu zerlegen versuchte, dass der feste Aether die Erscheinungen der Dielectrica, der flüssige die der Leiter erklärte, gestaltet sich die Theorie durch Benutzung der Gleichungen (4) für beide Fälle einfacher und umgeht gewisse Mängel des älteren Verfahrens.) Inzwischen dürfte ja, besonders durch Poincaré's Ausführungen, die Annahme zweier raumerfüllenden Mittel an Fremdartigkeit viel verloren haben.

Stellt man sich also den Inhalt der Molecüle als verflüssigten Aether vor, der ausser durch innere Druckunterschiede noch durch eine äussere Kraft beschleunigt wird, deren Grösse nach dem Wechselwirkungsgesetze durch den zu (18)

1) Helm, Wied. Ann. 14. p. 149. 1881.



entgegengesetzten Werth gegeben ist, so gelangt man auch zu einer mechanischen Bedeutung der Function  $\varphi$ . Es erweist sich  $k\varphi/a$  als Druck im Gleichgewichtszustande, oder die zwischen festem und flüssigem Aether bestehende Wechselwirkung  $X_1 Y_1 Z_1$  ist die Ursache, dass Druckdifferenzen aufrecht erhalten bleiben.

Die electriche Kraft  $XYZ$  ist also nach (6c) Resultirende zweier Wirkungen; einer kinetischen im festen Aether, die durch  $au', av', aw'$  gemessen wird, und einer potentiellen, einer Ansammlung von Druckdifferenz in den flüssigen Kernen.

Die magnetische Kraft  $LMN$  wird nach (6b) aus den Verwindungen  $\xi\eta\zeta$  im festen Aether und den unzerstörbaren Wirbeln in permanent magnetischen Moleculen gebildet, die das Drillungspotential  $\psi$  verursachen.

Was nun schliesslich den Energiebetrag (17) anlangt, so ist ja hiernach seine Herleitung aus der Aethermechanik nicht unmöglich, aber sie nöthigt zu Annahmen, deren Durchführung erst gerechtfertigt scheint, wenn sich zeigen lässt, dass auch die ausser den electricen und magnetischen bekannten Formen der Energie nach denselben Grundsätzen herzuleiten sind. Bis dahin hat die unmittelbare Festsetzung des Werthes (17) und der Nachweis seiner mechanischen Möglichkeit die Einfachheit für sich.

Dagegen erscheint die Einführung der Gleichungen (4) und der durch sie ausgesagten Kinematik des elastisch festen Körpers als eine Vereinfachung unserer Anschauungen über electriche und magnetische Vorgänge.

Dresden, October 1892.

---