

$$\begin{aligned} B_1^{n+1} &= B_1^n, \\ B_2^{n+1} &= B_2^n + (n+1)B_1^{n+1}, \\ B_3^{n+1} &= B_3^n + (n+1)B_2^{n+1}, \\ B_4^{n+1} &= B_4^n + (n+1)B_3^{n+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ B_m^{n+1} &= B_m^n + (n+1)B_{m-1}^{n+1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Da nun immer

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots,$$

also immer $B_m^1 = 1$ ist, so erhält man aus den vorhergehenden Gleichungen, wenn man anstatt des dortigen m hier n setzt:

$$\begin{aligned} B_{n+1}^1 &= B_n^1, \\ B_n^2 &= B_n^1 + 2B_{n-1}^2, \\ B_{n-1}^3 &= B_{n-1}^2 + 3B_{n-2}^3, \\ B_{n-2}^4 &= B_{n-2}^3 + 4B_{n-3}^4, \\ &\text{u. s. f. u. s. f.} \end{aligned}$$

Die nahe Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit den Gleichungen in (2.) läßt eine Uebereinstimmung der durch A und B bezeichneten Coefficienten vermuthen, und es fällt augenblicklich in die Augen, daß, wenn die beiden Reihen

$$\begin{array}{cccccc} B_n^1, & B_{n-1}^2, & B_{n-2}^3, & B_{n-3}^4, & B_{n-4}^5, & \dots \\ A_n^1, & A_n^2, & A_n^3, & A_n^4, & A_n^5, & \dots \end{array}$$

identisch wären, dies auch von den beiden Reihen

$$\begin{array}{cccccc} B_{n+1}^1, & B_n^2, & B_{n-1}^3, & B_{n-2}^4, & B_{n-3}^5, & \dots \\ A_{n+1}^1, & A_{n+1}^2, & A_{n+1}^3, & A_{n+1}^4, & A_{n+1}^5, & \dots \end{array}$$

gelten müßte. Da nun diese Uebereinstimmung, weil $B_1^1 = 1$, $A_1^1 = 1$ ist, offenbar für $n=1$ gilt, so ist sie allgemein gültig, und man hat also folgende allgemeine Gleichung:

$$A_n^k = B_{n-k+1}^k.$$

Die Glieder, mit denen die Reihen abbrechen, sind offenbar B_n^n und A_n^n .

4.

Um nun unserm eigentlichen Zwecke näher zu rücken, habe man die Reihe

$$1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{x^4}{z^4} + \dots = S.$$

Substituirt man für die Potenzen von x die oben gefundenen allgemeinen Ausdrücke, so erhält man mit Hülfe der vorhergehenden allgemeinen Vergleichung zwischen den Gröſsen A und B :

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ &+ x \cdot \frac{1}{z} \\ &+ \{ \overset{1}{A}_2 x + \overset{2}{A}_2 x(x-1) \} \cdot \frac{1}{z^2} \\ &+ \{ \overset{1}{A}_3 x + \overset{2}{A}_3 x(x-1) + \overset{3}{A}_3 x(x-1)(x-2) \} \cdot \frac{1}{z^3} \\ &+ \{ \overset{1}{A}_4 x + \overset{2}{A}_4 x(x-1) + \overset{3}{A}_4 x(x-1)(x-2) + \overset{4}{A}_4 x(x-1) \dots (x-3) \} \cdot \frac{1}{z^4} \\ &+ \{ \overset{1}{A}_5 x + \overset{2}{A}_5 x(x-1) + \overset{3}{A}_5 x(x-1)(x-2) + \overset{4}{A}_5 x(x-1) \dots (x-3) \\ &\quad + \overset{5}{A}_5 x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \} \cdot \frac{1}{z^5} \\ &+ \dots \dots \dots \\ &= 1 \\ &+ x \cdot \frac{1}{z} \\ &+ \{ \overset{1}{B}_2 x + \overset{2}{B}_2 x(x-1) \} \cdot \frac{1}{z^2} \\ &+ \{ \overset{1}{B}_3 x + \overset{2}{B}_3 x(x-1) + \overset{3}{B}_3 x(x-1)(x-2) \} \cdot \frac{1}{z^3} \\ &+ \{ \overset{1}{B}_4 x + \overset{2}{B}_4 x(x-1) + \overset{3}{B}_4 x(x-1)(x-2) + \overset{4}{B}_4 x(x-1) \dots (x-3) \} \cdot \frac{1}{z^4} \\ &+ \{ \overset{1}{B}_5 x + \overset{2}{B}_5 x(x-1) + \overset{3}{B}_5 x(x-1)(x-2) + \overset{4}{B}_5 x(x-1) \dots (x-3) \\ &\quad + \overset{5}{B}_5 x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \} \cdot \frac{1}{z^5} \\ &+ \dots \dots \dots \\ &= 1 \\ &+ x \left\{ \overset{1}{B}_1 \frac{1}{z} + \overset{2}{B}_2 \frac{1}{z^2} + \overset{3}{B}_3 \frac{1}{z^3} + \overset{4}{B}_4 \frac{1}{z^4} + \overset{5}{B}_5 \frac{1}{z^5} + \dots \right\} \\ &+ x(x-1) \left\{ \overset{2}{B}_1 \frac{1}{z^2} + \overset{3}{B}_2 \frac{1}{z^3} + \overset{4}{B}_3 \frac{1}{z^4} + \overset{5}{B}_4 \frac{1}{z^5} + \dots \right\} \\ &+ x(x-1)(x-2) \left\{ \overset{3}{B}_1 \frac{1}{z^3} + \overset{4}{B}_2 \frac{1}{z^4} + \overset{5}{B}_3 \frac{1}{z^5} + \overset{6}{B}_4 \frac{1}{z^6} + \dots \right\} \\ &+ x(x-1)(x-2)(x-3) \left\{ \overset{4}{B}_1 \frac{1}{z^4} + \overset{5}{B}_2 \frac{1}{z^5} + \overset{6}{B}_3 \frac{1}{z^6} + \dots \right\} \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

und folglich nach (3.):

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ &+ x \cdot \frac{1}{z-1} \\ &+ x(x-1) \cdot \frac{1}{(z-1)(z-2)} \\ &+ x(x-1)(x-2) \cdot \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\ &+ x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Da nun aber nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} S &= 1 + \left(\frac{x}{z}\right) + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{x}{z}\right)^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1} = \left(\frac{z-x}{z}\right)^{-1} = \frac{z}{z-x} \end{aligned}$$

ist, so erhält man folgende merkwürdige Summe:

$$1 + \frac{x}{z-1} + \frac{x(x-1)}{(z-1)(z-2)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)} + \dots = \frac{z}{z-x}$$

oder

$$1 + \frac{x}{z} + \frac{x(x-1)}{z(z-1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{z(z-1)(z-2)(z-3)} + \dots = \frac{z+1}{z-x+1}$$

für jedes x und z .

Ist x eine positive ganze Zahl, so bricht die Reihe ab, und man erhält den auch sonst bekannten Satz von den Binomial-Coefficienten:

$$1 + \frac{x}{z} + \frac{x(x-1)}{z(z-1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)} + \dots + \frac{x(x-1)\dots 3.2.1}{z(z-1)\dots(z-x+1)} = \frac{z+1}{z-x+1}.$$

Nimmt man x und z negativ, so verwandelt sich die Reihe in:

$$1 + \frac{x}{z} + \frac{x(x+1)}{z(z+1)} + \frac{x(x+1)(x+2)}{z(z+1)(z+2)} + \dots = \frac{z-1}{z-x-1}.$$

Nimmt man aber bloß x oder z negativ, so wird:

$$1 - \frac{x}{z} + \frac{x(x+1)}{z(z-1)} - \frac{x(x+1)(x+2)}{z(z-1)(z-2)} + \dots = \frac{z+1}{z+x+1},$$

$$1 - \frac{x}{z} + \frac{x(x-1)}{z(z+1)} - \frac{x(x-1)(x-2)}{z(z+1)(z+2)} + \dots = \frac{z-1}{z+x-1}.$$