

merklich. Es sind hier sehr kleine Unterschiede der elektrischen Dichtigkeit, welche die eine oder andere Art der Entladung veranlassen ¹⁾).

Die *luftförmigen* Stoffe sind so unvollkommene Leiter der Elektrizität, daß in ihnen die continuirliche Entladung nicht mehr durch ihre Wirkungen erkannt und daher nicht als Entladung im engeren Sinne bezeichnet wird. Die discontinuirliche Entladung hingegen findet in ihnen sehr leicht statt und wird durch Verdünnung der Luftart befördert. Die Wirkungen dieser Entladung sind theils mechanischer theils chemischer Natur, indem die Lufttheilchen aus einander geworfen und chemisch verändert werden. Der Verzögerungswerth der durchbrochenen Luftschicht ist dabei ausnehmend klein und wird ferner durch Nebenumstände so verdeckt, daß nicht unbedingt dieser Werth mit der Dicke der Luftschicht zunimmt. Am merkwürdigsten sind der Schall und die eigenthümlichen Lichterscheinungen, von welchen die discontinuirliche Entladung in Luftarten stets begleitet wird und die, obgleich sie seit dem Anfange des Studiums der Elektrizität die Aufmerksamkeit der Beobachter erregt und eine große Anzahl von Untersuchungen veranlaßt haben, zu den am wenigsten aufgeklärten Erscheinungen der Elektrizitätslehre gerechnet werden müssen.

II. *Ueber die Scheiben, welche sich beim Zusammenstoßen von zwei Wasserstrahlen bilden und über die Auflösung einzelner Wasserstrahlen in Tropfen; von G. Hagen.*

Wenn zwei gleiche Wasserstrahlen von kreisförmigem Querschnitt so gegen einanderstoßen, daß ihre Axen zusammenfallen, so kann das Wasser nur seitwärts ausweichen, und bei der symmetrischen Wirkung der Kräfte müs-

1) Ann. Bd. 65, S. 534.

sen alle einzelne Wassertheilchen entweder in der Ebene bleiben, welche in dem Punkte, wo der Zusammenstoß erfolgt, die gemeinschaftliche Axe normal schneidet, oder sie müssen sich um dieselbe gleichmäfsig vertheilen. Die Schwere wird freilich auf die spätere Bewegung des Wasser und die Form der schwebenden Masse Einflufs haben, die Wirkung des ersten Stoffes ist aber nach allen Seiten gleich.

Eine solche im Kreise fortgeschleuderte Wassermasse stellt sich innerhalb gewisser Gränzen als eine zusammenhängende, sehr regelmäfsige und spiegelnde, also glatte Scheibe dar. Diese Erscheinung ist schon lange bekannt gewesen und in etwas veränderter Form mehrfach bei Anwendung von Springbrunnen benutzt worden. Savart ¹⁾ stellte darüber zuerst genauere Untersuchungen an, indem er die Durchmesser solcher Scheiben unter verschiedenen Umständen mafs, und aus den Beobachtungen einige Beziehungen herleitete, welche zwischen der Gröfse der Scheiben und der Stärke der beiden zusammenstofsenden Wasserstrahlen stattfindet. Eine Erklärung des ganzen Phänomens und namentlich der Nachweis, wie die lebendige Kraft des Wassers bei der Bildung der Scheibe zerstört werde, womit die Gröfse der Scheibe offenbar zusammenhängt, ist indessen bisher nicht gegeben.

Nach Savart's Beobachtungen ist der Radius der Scheibe im äufsersten Falle, nämlich bei geringer Geschwindigkeit und grofser Dicke der Strahlen, nur etwa der halben Druckhöhe gleich, er bleibt aber gewöhnlich sogar unter dem vierten Theile derselben. Der Weg, den die ringsumher abfallenden Tropfen verfolgen, zeigt deutlich, dafs die lebendige Kraft, welche das Wasser in den Strahlen besafs, am Rande der Scheibe grofsentheils zerstört ist.

Hält man einen Draht in die Scheibe, so vereinigen sich die durch denselben getrennten Wasserfäden nicht wieder. Es bildet sich alsdann ein Ausschnitt, der nicht durch

1) *Mémoire sur le choc de deux veines liquides animés de mouvements directement opposés. Annales de chimie et physique. 1833. Tome LV.*

gerade Linien, oder Radien begränzt ist, vielmehr wird der Winkel, dem dieser Ausschnitt entspricht, nach dem Rande hin immer gröfser, so dafs es scheint, als ob die äufsern Wasserfäden durch eine Seitenkraft nach dem zusammenhängenden Theile der Scheibe hingezogen werden. Wenn die Trennung der Fäden aber seitwärts vom Mittelpunkte einer lothrechten Scheibe erfolgt, so bemerkt man, dafs der obere getrennte Faden, der Richtung der Schwere entgegengesetzt, sogar aufwärts gezogen wird.

Wenn man zwei Drähte oder ein Blech, das mit einem Schlitz versehen ist, in die Scheibe hält; so bleibt der zu beiden Seiten abgeschnittene Theil der Wassermasse von der übrigen Scheibe getrennt, und nimmt eine radiale Richtung an. Besonders auffallend ist es dabei, dafs dieser Strahl weit über den Umfang der Scheibe herausgeht, und wenn man ihn schon in der Nähe der Axe bildet, sogar gleich dem gewöhnlichen steigenden Strahle eine Höhe erreicht, die dem ganzen Wasserdrucke nahe kommt. Die Zerstörung der lebendigen Kraft des Wassers in der Scheibe wird also nicht durch das Zusammenstossen beider Strahlen veranlafst, sondern erfolgt auf dem Wege von der Axe nach dem Rande der Scheibe.

Diese Wahrnehmungen lassen schon sehr deutlich erkennen, von welcher Kraft die ganze Erscheinung herrührt. Die *Spannung der Oberfläche* des Wassers gestattet nicht, dafs die Masse beim Zusammenstossen beider Strahlen sich in Tropfen auflöst; sie vereinigt dieselben zur regelmäfsigen kreisförmigen Scheibe. Sobald letztere aber durch den hineingesteckten Draht unterbrochen wird, so zieht sie die äufsern, von einander getrennten Fäden immer weiter zurück, und endlich ist sie es allein, welche die lebendige Kraft der radial strömenden Wassertheilchen zerstört, indem jedes hinzutretende Element der Wassermasse einen Ring bildet, der bei zunehmender Entfernung von der Axe auf beiden Seiten eine gröfsere Oberfläche annimmt, und sonach in jedem Augenblicke aufs Neue gespannt werden mufs.

Diese an sich gewiß sehr wahrscheinliche Erklärung wird als richtig angesehen werden dürfen, wenn nachzuweisen ist, daß der aus den Capillarerscheinungen hergeleitete Werth der Spannung der Oberfläche des Wassers mit demjenigen übereinstimmt, der in der Scheibenbildung die lebendige Kraft des Wassers zerstört.

Die Spannung ist in jedem kleinen Theilchen der Oberfläche nach allen Richtungen in der Ebene der letztern wirksam. Zerlegt man diese sämtlichen Kräfte auf zwei gegen einander senkrechte Axen, so erhält man die Spannungen in zwei Richtungen, und diese bezeichnen die ganze Summe aller Spannungen an der untersuchten Stelle. Die in meinen frühern Mittheilungen über die Oberfläche der Flüssigkeiten ¹⁾ angegebenen Werthe von T drücken die Summe aller auf eine bestimmte Axe projecirten Spannungen aus. Im vorliegenden Falle darf man daher nur die Kräfte untersuchen, die in der Richtung des Bogens oder der Tangente, und in der der Normale oder des Radius wirksam sind.

Die Spannung in der Richtung des Radius ist ohne Einfluß auf die Bewegung des Wassers, weil sie in jedem Ringe, der in die Scheibe tritt, schon vorhanden ist, und sich während der Bewegung desselben nicht merklich verändert. Diese Spannung würde allerdings, wenn der Wasserdruck aufhörte, die Masse der Scheibe nach der Axe hinziehen: während der Erscheinung wird ihr aber durch den dauernden Druck das Gleichgewicht gehalten, und wie eine Feder, die gleichmäÙig gespannt bleibt, gar nicht als Feder wirkt, so kann auch diese Spannung keinen mechanischen Effect äußern. Das Verhältniß ist ganz demjenigen analog, welches sich darstellt, wenn die Oeffnung, aus der ein Wasserstrahl tritt, nicht unmittelbar in dem festen Reservoir angebracht, vielmehr durch einen elastischen Schlauch damit verbunden ist. Während man das Reser-

1) Abhandlungen der mathematischen Klasse der Academie der Wissenschaften in Berlin. 1845 S. 41 und 1846 S. 1. (Ann. Bd. 67, S. 1 und 152 und Bd. 77 S. 419).

voir anfüllt und der Druck sich vergrößert, wird der Schlauch zwar gespannt und ausgedehnt, wozu allerdings ein Theil der lebendigen Kraft des Wassers verwandt wird, so daß der inzwischen austretende Strahl etwas schwächer ist, als er bei fester Verbindung der Ausflußöffnung mit dem Gefäße seyn würde. In gleicher Art wird der Strahl während der Verminderung des Druckes etwas verstärkt werden. Von solchen Uebergängen ist hier aber nicht die Rede, es handelt sich vielmehr nur um den *Beharrungs-stand*, und während dieses bleibt die Spannung des Schlauches unverändert: seine Elasticität ist daher vollständig aufgehoben, und der Wasserstrahl wird sich genau in gleicher Weise bilden, wie wenn der Schlauch absolut fest wäre, und keine Elasticität besäße.

Anders verhält es sich mit der in der Richtung des Bogens wirkenden Spannung der Oberflächen. Es leidet keinen Zweifel, auch kann man sich durch Aufstreuen feiner Körnchen leicht davon überzeugen, daß die äußeren Theilchen, welche die Oberfläche bilden, sich mit den innern zusammen bewegen. Denkt man aber beide Oberflächen in concentrische Ringe zerlegt; so wird jeder Ring, der Bewegung der innern Masse folgend, sehr schnell von dem Umfange der zusammenstossenden Strahlen nach dem Rande der Scheibe laufen, und indem er sich in entsprechender Weise erweitert, muß seine Spannung immer aufs Neue überwunden werden, was ohne Kraftverlust nicht geschehen kann. Die Spannung eines solchen Ringes in der Richtung des Bogens verursacht einen Druck in radialer Richtung und dieser wirkt als verzögernde Kraft der Bewegung des Wassers entgegen.

T sey die Spannung der Oberfläche in der Breite der Längeneinheit, r der Radius des Ringes und dr seine Breite. Die Spannung in der einen Oberfläche des Ringes ist daher Tdr , und diese bewirkt in einem Ausschnitte, welcher dem Winkel φ entspricht, nach einem bekannten Lehrsatz der Mechanik in normaler Richtung einen Druck gleich φTdr . Ein eben so großer Druck bildet sich auf der ge-

genüber liegenden Oberfläche. Der ganze Druck, den dieser Theil des Ringes in der Richtung der Radien oder in der Richtung der Bewegung des Wassers erleidet, ist daher

$$2\varphi T dr.$$

Bezeichnet man die Dicke des Ringes mit b , und das Gewicht der Raum-Einheit des Wassers mit γ , so ist die Masse des untersuchten Theiles des Ringes

$$b\gamma r\varphi dr$$

folglich die aus dem Drucke hervorgehende verzögernde Kraft

$$\frac{2T}{b\gamma r}.$$

Das Gesetz der Bewegung des Wassers in der Scheibe ist hiernach ausgedrückt durch die Gleichung

$$o = \frac{d^2r}{dt^2} + 4g \frac{T}{b\gamma r}$$

oder

$$o = dc + 4g \frac{T}{b\gamma r} dt$$

worin t und c , wie gewöhnlich, die Zeit und Geschwindigkeit bezeichnen. Nennt man ferner R den Radius der Scheibe, ϱ den Radius beider Strahlen, durch deren Zusammenstoßen die Scheibe gebildet wird und v die Geschwindigkeit in diesen Strahlen; so ist die Wassermenge, welche in einer Sekunde in die Scheibe tritt, oder jeden kreisförmigen Querschnitt der Scheibe durchläuft

$$2\varrho^2\pi v = 2r\pi bc$$

daher

$$rb = \frac{\varrho^2 v}{c}.$$

Die obige Gleichung verändert sich hiernach in

$$o = dc + \frac{4gT}{\gamma\varrho^2 v} c dt$$

oder

$$o = dc + \frac{4gT}{\gamma\varrho^2 v} dr$$

folglich

$$o = c + \frac{4gT}{\gamma\varrho^2 v} r + \text{Const.}$$

Die Constante findet man, wenn man darauf Rücksicht

nimmt, daß in dem Kreise, wo die Scheibenbildung beginnt

$$r = \varrho$$

und

$$c = v$$

ist. Man hat also

$$v - c = \frac{4gT}{\gamma \varrho^2 v} (r - \varrho).$$

Am äußern Umfange der Scheibe ist aber

$$r = R$$

und

$$c = 0.$$

Die Gleichung verwandelt sich daher für diesen Werth von r in

$$v = \frac{4gT}{\gamma \varrho^2 v} (R - \varrho)$$

und man findet endlich

$$R = \frac{v^2 \gamma}{4gT} \varrho^2 + \varrho.$$

Savart schließt aus seinen Beobachtungen, daß die Durchmesser der Scheiben bei gleichen Ausflußöffnungen den Druckhöhen, und bei gleichen Druckhöhen den Flächeninhalten der Ausflußöffnungen proportional sind. Beide Folgerungen finden in der vorstehenden Herleitung ihre Begründung, vorausgesetzt, daß die Halbmesser den Strahlen vergleichungsweise zu denen der Scheiben so klein sind, daß man das letzte Glied vernachlässigen kann, was mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Beobachtungen allerdings zulässig ist.

Besonders wichtig ist die Frage, welche Werthe für T sich aus Savart's Beobachtungen ergeben? Man kann den vorstehenden Ausdruck nicht unmittelbar zu diesem Zwecke benutzen, da Savart weder ϱ , d. h. den Durchmesser der zusammenstoßenden Strahlen, noch auch v oder die Geschwindigkeit derselben gemessen hat. Für jede einzelne Beobachtung wird dagegen der Durchmesser der Durchflußöffnung und der Wasserdruck über derselben angegeben. Aus der Beschreibung des Apparates ersieht man,

dafs die Ausflufsöffnungen in dünner Wand angebracht waren. In beiden Strahlen fand sonach eine Contraction statt, die man aus vielfachen andern Beobachtungen näherungsweise kennt, der Abstand der Scheibe von der Ausflufsöffnung betrug aber 1,5 Centimeter, war daher mehr, als hinreichend, um die Contraction schon vor dem Zusammenstofse vollständig eintreten zu lassen. Setzt man den Contractions-Coëfficient gleich 0,61, wie die meisten Beobachtungen, namentlich für gröfsere Druckhöhen ergeben, so ist

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{4} D \sqrt{0,61} \\ &= 0,39051 \cdot D, \end{aligned}$$

wobei D den Durchmesser der Ausflufsöffnung bezeichnet.

Michelotti's Beobachtungen über den Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen in dünner Wand beweisen, dafs die Strahlen, sobald die Contraction eingetreten ist, dieselbe Geschwindigkeit haben, welche Körper annehmen, die vom Horizont des Wasserspiegels im Reservoir bis zur untersuchten Stelle des Strahles herabfallen. Es könnte zweifelhaft seyn, ob man diesen Satz im vorliegenden Falle anwenden darf, da Savart die Strahlen nicht aus den weiten Gefäfsen selbst austreten liefs, vielmehr zwischen diesen und den Ausflufsöffnungen noch kurze Zuleitungsröhren angebracht hatte, in welchen ein gewisser Widerstand sich bildete, auf dessen Ueberwindung ein Theil des Druckes verwandt wurde. Eine nähere Untersuchung zeigt aber, dafs selbst in den ungünstigsten Fällen, welche die Beobachtungsreihen umstofsen, dieser Widerstand in den 20 Centimeter langen und 4,5 Centimeter weiten Röhren so unbedeutend ist, dafs man den entsprechenden Verlust an Druck unbeachtet lassen, und die jedesmalige Druckhöhe als Geschwindigkeitshöhe ansehen kann. Wenn letztere daher durch h bezeichnet wird, so ist

$$h = \frac{v^2}{4g}.$$

Endlich habe ich noch die Aenderung eingeführt, dafs ich

$$\frac{T}{\gamma} = m$$

setze. m bezeichnet alsdann nichts Anderes, als jene Constante, welche, durch den Krümmungshalbmesser dividirt, die Erhebung der Oberfläche in den Capillar-Erscheinungen ausdrückt.

Die obige Gleichung ergibt hiernach

$$m = \frac{h\varrho^2}{R - \varrho}$$

Ich habe aus jeder einzelnen Beobachtung nach diesem Ausdrucke m berechnet, und die gefundenen Werthe in folgender Tabelle zusammengestellt, dabei jedoch diejenigen Beobachtungen ausgeschlossen, welche, eines noch stärkeren Druckes unerachtet, keine Vergrößerung der Scheibe zeigten, wobei also schon die Auflösung in feine Tropfen anfang. Alle Maasse sind in Metern angegeben.

$h.$	$D = 0,003$		$D = 0,004$		$D = 0,006$	
	2 R.	$m.$	2 R.	$m.$	2 R.	$m.$
1,05	0,38	0,00000 7633				
1,00	0,36	7676				
0,95	0,35	7502				
0,90	0,33	0,00000 7541				
0,85	0,32	7346				
0,80	0,30	7379				
0,75	0,28	0,00000 7416	0,47	0,00000 7840		
0,70	0,27	7180	0,45	7645		
0,65	0,25	7206	0,41	7797		
0,60	0,22	0,00000 7569	0,39	0,00000 7570	0,70	0,00000 9473
0,55	0,21	7272	0,34	7969	0,69	8811
0,50	0,19	7316	0,33	7466	0,66	8376
0,45	0,175	0,00000 7156	0,30	0,00000 7399	0,59	0,00000 8440
0,40	0,15	7439	0,26	7601	0,55	8052
0,35	0,135	7245	0,23	7531	0,50	7757
0,30	0,11	0,00000 7653	0,20	0,00000 7439	0,45	0,00000 7395
0,25	0,095	7411	0,165	7540	0,36	7723
0,20	0,075	7562	0,135	7405	0,30	7434
0,15	0,055	0,00000 7828				
0,10	0,037	7933				
Mittel		0,00000 7463		0,00000 7600		0,00000 8162.

Die Abweichungen der Werthe von m in den einzelnen Reihen können nicht befremden, wenn man darauf Rücksicht nimmt, daß die Durchmesser der Wasserschei-

ben grofsentheils nur in ganzen Centimetern angegeben sind, sich auch nicht füglich schärfer messen lassen. Die Abweichungen zeigen auch wenig Regelmässigkeit, denn wenn in der dritten Beobachtungs-Reihe die Werthe von m mit der gröfsern Druckmenge zunehmen, so findet in der ersten Reihe für dieselben Druckhöhen das Gegentheil statt.

Auffallend ist es, dafs die mittleren Werthe der Reihen mit der Gröfse der Ausflufsöffnungen zunehmen. Dabei entsteht aber die Frage, ob die Oeffnungen genau 3, 4 und 6 Millimeter weit waren. Wäre der Halbmesser der kleinsten Oeffnung nicht 1,5 sondern 1,56 Millimeter gewesen, so würde der mittlere Werth der ersten Beobachtungs-Reihe mit dem der letzten schon genau übereinstimmen. Die Differenz erklärt sich vielleicht auch durch die Zunahme des Contractions-Coëfficienten bei kleineren Oeffnungen, den alle Beobachtungen über den Ausflufs des Wassers andeuten. Dieser Umstand ist indessen zur Zeit noch so unsicher, dafs nicht füglich davon Rechnung getragen werden kann.

Das Mittel aus den drei Werthen von m , welche die Beobachtungsreihen durchschnittlich ergaben, ist

$$m = 0,000007742$$

oder wenn man statt des Meters den Rheinländischen Zoll zur Längeneinheit wählt

$$m = 0,01132.$$

Die eigentlichen Capillar-Erscheinungen ergaben beim Wasser sehr verschiedene Werthe von m , jenachdem die Oberfläche längere oder kürzere Zeit hindurch gestanden hat. Ich habe in den beiden bereits angeführten Abhandlungen die Beweise für diese Thatsache geliefert. In der frisch gebildeten Oberfläche des Wassers ist die Spannung und sonach m am gröfsten, wird aber in der Zwischenzeit von einer Minute schon merklich kleiner. Durch schnell wiederholtes Abstreichen mit Fließpapier gelang es mir, den Werth von m bis auf 1,50 zu steigern, und bei der Scheibenbildung ist die Oberfläche jedenfalls ganz neu, man mufs also in diesem Falle die stärkste Spannung annehmen.

Der Bestimmung

$$m = 1,50$$

liegt die Pariser Linie als Längeneinheit zum Grunde: wählt man dafür den Rheinländischen Zoll, so erhält man

$$m = 0,01116.$$

Die Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem aus Savart's Beobachtung hergeleiteten ist so groß, wie irgend zu hoffen war. Die Voraussetzung, daß die Spannung der Oberfläche die lebendige Kraft des Wassers in den Scheiben zerstört, ist sonach gerechtfertigt.

Mehrere Beobachtungen über die Scheibenbildung habe ich angestellt, die ein abweichendes Resultat ergaben, auch war die Anordnung des Apparates und die Art der Messung verschieden. Ich liefs nämlich, um den Einfluß der Contraction zu umgehen, die Strahlen nicht aus Oeffnungen in dünner Wand, sondern aus kurzen cylindrischen Ansatzröhren austreten. Bei diesen findet keine Contraction statt, und der Durchmesser des Strahles stimmt mit der der Oeffnung überein. Die Geschwindigkeit des Wassers im Strahle liefs sich dagegen, nachdem die Gröfse der Oeffnungen bekannt war, mit aller Schärfe bestimmen, indem ich die bei verschiedenen Wasserständen ausfließenden Wassermengen direct maß.

Ich übergehe die specielle Beschreibung des ganzen Apparates, der ursprünglich für andere Beobachtungen bestimmt, eine viel größere Schärfe der Messung erlaubte, als im vorliegenden Falle erforderlich war. Die Radien beider Ausfluß-Oeffnungen waren nicht ganz genau übereinstimmend, den der einen fand ich durch wiederholte Messungen mit dem Faden-Mikrometer gleich 0,04277 und den der andern gleich 0,04348 Rheinländische Zolle. Die Flächen der Oeffnungen sind also 0,005747 und 0,005940, und dem Verhältnisse dieser Zahlen entsprachen in der That die Zeiten, in welchen gleiche Senkungen des Wasserspiegels bei Benutzung der einen, oder der andern Ausflußöffnung erfolgten. Der Unterschied ist so geringe, daß

er bei der Unsicherheit der Messung der Scheiben schon unbeachtet bleiben durfte. In den Rechnungen ist daher vorausgesetzt, daß beide Strahlen einander gleich waren, und der Querschnitt eines jeden 0,005843 Zolle maß. Endlich wurden noch bei jeder neuen Aufstellung des Apparates die Zeiten beobachtet, in welchen der Wasserstand, während der Abfluß durch beide Oeffnungen erfolgte, von halbem zu halbem Zolle sank.

Nach diesen Vorbereitungen beschränkte sich die Beobachtung darauf, den horizontalen Durchmesser der Scheiben zu messen, und gleichzeitig den Wasserstand zu beobachten.

Es ergaben sich für die nachstehenden Geschwindigkeiten des Wassers in den Strahlen die daneben bezeichneten Halbmesser der Scheiben, woraus die Werthe von m nach der obigen Formel abgeleitet sind. Alle Größen sind in Rheinländischen Zollen ausgedrückt.

$v.$	$R.$	$m.$
113,2	2,79	0,0115
118,8	2,90	0,0122
120,7	2,94	0,0125
136,0	3,87	0,0120
139,3	4,06	0,0119
144,8	5,12	0,0102
154,1	4,50	0,0132
Mittel		0,0119.

Die Abweichungen erklären sich dadurch, daß die Größe der Scheiben schwer zu messen ist, indem die Tropfen an ihrem Umfange ganz unregelmäßig abspringen, und dabei jedesmal die Scheibe stark ausziehen, so daß der Durchmesser der letzteren in jeder Richtung sich fortwährend verändert.

Im Allgemeinen ergaben diese Beobachtungen einen etwas größeren Werth für m , als die Capillar-Erscheinungen selbst im äußersten Falle gegeben hatten. Dieses darf in sofern nicht befremden, als es unmöglich ist, die eigent-

lichen Capillar-Erscheinungen in so kurzer Zwischenzeit nach ihrer Darstellung zu beobachten, daß die Oberfläche nicht schon merklich an Spannung verloren haben sollte.

Der Halbmesser der Wasserscheibe entspricht dem obigen analytischen Ausdrucke nur innerhalb einer bestimmten Gränze. - Wenn der Wasserdruck und mit demselben die Geschwindigkeit der Strahlen nach und nach verstärkt wird, so vergrößert sich die Scheibe keineswegs fortwährend, sie erreicht vielmehr bei einer gewissen Geschwindigkeit der Strahlen ihr Maximum, und bei noch größerer Geschwindigkeit wird sie sogar kleiner, als sie früher war. Die äußere Erscheinung läßt diesen Uebergang gleichfalls erkennen. Die Scheibe verliert nämlich im letzten Falle das solide Ansehen, welches sie bisher hatte: sie gleicht einem dünnen Häutchen, welches, wie vom Winde bewegt, zahllose feine Falten schlägt, die sich fortwährend verändern. Besonders auffallend ist es dabei aber, daß an ihrem Umfange das Wasser sich nicht mehr in großen Massen ansammelt, und in einzelnen starken Tropfen abfällt, die ganze Scheibe vielmehr begränzt ringsum unregelmäßig, als ob sie abgerissen wäre, und die feinen Tröpfchen überall umherfliegen, die bei zunehmender Geschwindigkeit der Strahlen immer feiner werden, und endlich einen Staubregen bilden, der in der Ebene der Scheibe weit umhergeschleudert wird.

Diese Erscheinung rührt offenbar davon her, daß die Oberfläche bei einer gewissen Ausdehnung der Scheibe nicht hinreichende Festigkeit besitzt, um das Wasser zusammenzuhalten. Savart bezeichnet dieses Phänomen mit der Benennung *auréole*, und bemerkt, daß es nach den (oben mitgetheilten) Beobachtungen an verschiedenen Scheiben eintritt, sobald die Producte aus den Radien der Ausflußöffnungen in die Druckhöhen eine bestimmte GröÙe erreichen. Eine weitere Erklärung hat Savart nicht gegeben:

er sagt nur, daß der Mangel eines passenden Apparates ihn verhindert habe, die Gesetze aufzusuchen, nach welchen die Durchmesser der Scheiben bei weiterer Verstärkung des Wasserdruckes abnehmen.

Man könnte vermuthen, daß diese Zerstreuung des Wassers eintritt, sobald die Scheibe sehr dünn wird. Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, daß dieses nicht der Fall ist, und daß es keine bestimmte Gränze für die Dicke der Scheibe, noch auch für die Geschwindigkeit giebt, wobei die Auflösung in Tropfen erfolgt.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen ergiebt die obige Rechnung

$$c = \frac{4gT}{\gamma q^2 v} (R - r).$$

Wegen der Gleichheit der Wassermenge in beiden Strahlen mit derjenigen, die jeden kreisförmigen Querschnitt der Scheibe durchströmt, ist

$$b = \frac{q^2 v}{rc}.$$

Indem man den vorstehenden Werth von c und nach der frühern Herleitung statt v^2 dessen Werth

$$v^2 = \frac{4gT}{\gamma q^2} (R - q)$$

in den letzten Ausdruck einführt, erhält man

$$b = \frac{q^2 (R - q)}{r(R - r)}.$$

Der Nenner wird ein Maximum, also b ein Minimum, wenn $r = \frac{1}{2} R$ ist. Die Scheibe ist daher in der Mitte des Radius am dünnsten. Bezeichnet B ihre Dicke an dieser Stelle, so ist

$$B = \frac{4q^2 (R - q)}{R^2}.$$

Man kann diesen Ausdruck so verändern, daß seine Abhängigkeit von der Druckhöhe deutlicher wird. Wenn man nämlich den obigen Ausdruck für R , sowie auch die Fallhöhe oder Druckhöhe h einführt, welche der Geschwin-

dig-

digkeit v entspricht, und endlich, wie schon früher gesehen, $\frac{T}{\gamma}$ gleich m setzt; so findet man

$$B = \frac{4m}{h}.$$

Die *geringste Dicke jeder Scheibe* ist allein abhängig von der Geschwindigkeit der Strahlen, und zwar steht sie im umgekehrten Verhältnisse zur Fallhöhe, welche dieser Geschwindigkeit entspricht.

Savart's Beobachtungen ergaben augenscheinlich, daß die Auflösung der Scheiben in Tropfen nicht allein von diesem B abhängig ist. Wäre dieses der Fall, so müßte nämlich in allen drei Beobachtungs-Reihen das Maximum der Scheibe bei derselben Druckhöhe eingetreten seyn; ausserdem aber dürfte man auch erwarten, daß bei zunehmender Druckhöhe der Durchmesser der Scheibe sich plötzlich mit der Hälfte reducirte, was gleichfalls nicht geschieht. Die Erfahrung zeigt vielmehr, daß bei zunehmender Druckhöhe der Durchmesser der Scheibe zunächst zu wachsen aufhört, also die Zerstreuung in Tropfen am Umfange der Scheibe beginnt, wo nicht nur die Dicke der Scheibe wieder größer, sondern auch die radiale Geschwindigkeit des Wassers am kleinsten ist. Man darf demnach auch nicht voraussetzen, daß der Zusammenhang der Scheibe aufhört, sobald die Geschwindigkeit des Wassers eine gewisse Gränze übersteigt.

Es dürfte nicht unwichtig seyn, zu untersuchen, welches die geringste Dicke in den beobachteten Wasserscheiben sey. Nach Savart's Beobachtungen stellte sich unter dem Drucke von 1,05 Meter und zwar für die Ausflussoeffnung von 3 Millimeter noch eine vollständig ausgebildete Scheibe dar. Der Werth von B ist in diesem Falle dem 34ten Theile eines Millimeters oder dem 74ten Theile einer Rheinländischen Linie gleich. Ich beobachtete, daß eine Wasserscheibe bei der Geschwindigkeit der Strahlen von 205 Zoll in ihrem Umfange zu zerstreuen anfing. Diese

Geschwindigkeit entspricht der Fallhöhe von 56 Zoll, und daraus ergibt sich *B* gleich dem 104ten Theile einer Linie.

Die Ursache der bei verstärktem Drucke eintretenden Auflösung der Wasserscheiben in feine Tropfen ist sonach weder in der geringen Dicke der Scheiben, noch in der großen Geschwindigkeit zu suchen, womit das Wasser dieselben durchläuft. Dagegen liegt die Vermuthung sehr nahe, daß diese Erscheinung mit der *Auflösung eines Wasserstrahles in Tropfen* in naher Beziehung steht. Die hierüber angestellten Untersuchungen werden dieses im Allgemeinen bestätigen, wenn der Zusammenhang beider Erscheinungen sich auch nicht analytisch nachweisen läßt.

Der Einfachheit wegen betrachte ich zunächst einen Strahl, der durch das Ueberfließen des Wassers über den Rand eines Gefäßes entsteht, der also durch keinen Wasserdruck, sondern allein durch den Fall frei gebildet wird. Ich nehme auch an, daß das Gefäß fortwährend in gleicher Höhe gefüllt bleibe, so daß der Strahl sich nicht verändert. Alsdann werden zwei Wassertheilchen *A* und *B*, die nacheinander und zwar in der Zwischenzeit τ in den Strahl eintreten, sich mit einer constanten Geschwindigkeit von einander entfernen. Ihr Abstand von einander ist gleich

$$2g\tau t,$$

wenn *t* die Zeit bedeutet, die seit dem Eintritt des Theilchens *B* in den Strahl verflossen ist. Nehme ich nun an, daß die Zeit τ im Vergleiche zu *t* sehr klein sey, oder daß *B* sehr nahe auf *A* folge, so ist die Fläche des cylindrischen Mantels des Strahles zwischen diesen beiden Punkten

$$\tau \sqrt{8M\pi g} \cdot \sqrt{t},$$

wo *M* die in einer Sekunde ausfließende Wassermenge bedeutet. Der Mantel, oder die freie Oberfläche ist also der Quadratwurzel der Zeit, oder der vierten Wurzel der Fallhöhe des Punktes *B* proportional. Derselbe vergrößert sich demnach zwar fortwährend, aber seine Vergrößerung ist

Aufangs am stärksten, und wird nach und nach immer kleiner, oder das Heraustreten neuer Wassertheilchen aus dem Innern des Strahles, um die erforderliche Oberfläche zu bilden, wird um so leichter, je tiefer der untersuchte Theil des Strahles bereits herabgefallen ist. Es darf kaum erwähnt werden, daß in jedem einzelnen Querschnitte des Strahles das Verhältniß des Umfanges zum Inhalte genau in gleicher Weise sich verkleinert, also die Wassertheilchen auch aus jedem Querschnitte um so leichter heraustreten können, je tiefer derselbe liegt. Es ist sonach durchaus nicht anzunehmen, daß der Strahl sich deshalb an einer gewissen Stelle in Tropfen auflösen müßte, weil die umschließende Oberfläche sich nicht schnell genug bilden könnte. Dagegen wird freilich, sobald ein Abreißen erfolgt, die weitere Trennung der gelösten Theile durch die Spannung der Oberfläche um so mehr befördert werden, je feiner der Strahl in Folge seiner Beschleunigung bereits ausgezogen, oder je tiefer er gefallen ist. Nichts desto weniger muß die Ursache der ersten Trennung doch in einer äußern Veranlassung gesucht werden.

Diese Annahme wird Gewißheit, wenn man bemerkt, daß derselbe Strahl, mag er vertical aufwärts, oder abwärts gerichtet seyn, sehr nahe in derselben Entfernung von der Ausfluß-Oeffnung sich in Tropfen auflöst. In dem ersten Falle kann aber seine ursprüngliche Geschwindigkeit durch den Einfluß der Schwere schon größtentheils vernichtet, im andern dagegen beinahe verdoppelt seyn, und deunoch ist die Erscheinung nicht wesentlich verschieden. Noch auffallender giebt sich dieses im horizontalen Strahle zu erkennen, wobei die Einwirkung der Schwere fast ganz aufgehört. Die Geschwindigkeit ändert sich in demselben nur nach Maßgabe der nach und nach eintretenden Senkung. Bei starken Druckhöhen und kleinen Durchflußöffnungen ist diese Senkung für den zu untersuchenden Theil des Strahles nur unbedeutend, also die Aenderung der Geschwindigkeit und des Querschnittes unmerklich; man sollte daher auf eine ganz gleichmäßige Beschaffenheit des Strahles

schließen, aber dennoch löst sich derselbe an einer bestimmten Stelle in Tropfen auf.

Auch über diesen Gegenstand hat Savart sehr wichtige Beobachtungen angestellt ¹⁾, und namentlich die Beziehung der ganzen Erscheinung zu den Schwingungen der umgebenden Luft, oder vielmehr des Gefäßes, worin das Wasser sich befindet, nachgewiesen und zugleich höchst auffallende Verhältnisse in der Tropfenbildung angedeutet. Derselbe hat auch durch Anordnung eines sehr sinnreichen Apparates, unerachtet der schnellen Bewegung der Tropfen, diese zu beobachten und ihre Form und Gröfse und gegenseitigen Abstand zu bestimmen versucht.

Die Messung der Länge des ungetheilten Strahles ist nicht nur schwierig, sondern auch an sich sehr unsicher. Der eigentlichen Auflösung desselben in Tropfen gehen merkliche ringförmige Anschwellungen voran, die ich aber nur auf geringe Entfernungen, und bei wirklichen Strahlen niemals bis zur Ausflufs-Oeffnung habe verfolgen können. Man sieht diese, wie ich glaube am deutlichsten, wenn man den Strahl an einer Scheibe auffängt, und wählt man hierzu eine Glasscheibe, so kann man, indem man von der hintern Seite darauf sieht, am sichersten die Länge des massiven Theiles des Strahles durch Annähern und Entfernen der Scheibe ermitteln. Diese Art der Beobachtung zeigt das Profil des Strahles scharf begränzt und dunkel gefärbt: die Schwankungen oder jene ringförmigen Anschwellungen geben sich deutlich zu erkennen, sobald sie die Scheibe treffen, und wenn vollends der Strahl sich schon trennt, so bemerkt man die Unterbrechung sehr auffallend in der helleren Färbung des Profiles. Wäre der Strahl unveränderlich, so könnte man auf diese Art sehr sicher die Länge seines festen Theiles ermitteln; aber in Folge jeder zufälligen, wenn auch nur sehr geringen Erschütterung der Umgebungen und selbst der Luft, wie Savart aufer Zweifel gestellt hat, beginnen oft die Pulsationen und selbst

1) *Ann. de chim. et phys. Tome LIII. p. 337* und Poggendorff's Annalen Bd. 33, S. 451 und 520.

die Trennungen schon viel näher der Ausflufs-Oeffnung. Bei senkrecht aufsteigenden Strahlen gewährt diese Anordnung der Beobachtung, und namentlich, wenn man flach concave Glasscheiben (Uhrgläser) anwendet, noch den Vortheil, daß die zurückfallenden Tropfen vom Strahle entfernt werden.

Manche der von Savart bemerkten Eigenthümlichkeiten der Tropfenbildung habe ich, wenn ich auch gefärbtes Wasser und starke Beleuchtung anwendete, niemals mit einiger Wahrscheinlichkeit wahrnehmen können. Mir schien es, als ob die Tropfenbildung oder das Zerreißen der Oberfläche sich jedesmal durch das Ausstossen sehr feiner Tröpfchen zu erkennen giebt, die unregelmäßig bald nach der einen bald nach der andern Seite, aber jedesmal seitwärts aus dem Strahle gestossen werden. Die in der Richtung des Strahles fortfliegenden Tropfen waren an Gröfse nicht sehr verschieden, zeigten auch in Bezug auf die geringe Verschiedenheit der Gröfse keine besondere Regelmäßigkeit, am wenigsten wenn der Strahl aus einer Oeffnung in dünner Wand austrat. Oft folgten drei und noch kleinere Tropfen unmittelbar einander. Nur einmal sah ich eine regelmäßige Abwechselung gröfserer und kleinerer Tropfen, und zwar in einem Strahle der durch einen kleinen Heber gebildet wurde, doch auch in diesem Falle war das Verhältniß des Durchmessers der gröfsern Tropfen zu dem der kleineren nur etwa wie 4 zu 3. Jene feinen Zwischentropfen, von denen Savart spricht, habe ich niemals wahrgenommen. Vielleicht waren dieses jene Seitentropfen, die bei der Schwäche jenes Strahles beinahe lothrecht herabfallen mochten. Ich muß aber bemerken, daß ein grofser Theil der von Savart angestellten Beobachtungen sich wirklich nur auf eine Reihe von getrennt austretenden Tropfen, und keineswegs auf einen zusammenhängenden Strahl bezogen zu haben scheint. Mir ist es wenigstens selbst bei Anwendung der feinsten Durchflufs-Oeffnungen und der kleinsten Druckhöhen nicht gelungen, zusammenhängende Strahlen darzustellen, die nach ihrer

Auflösung nur 5 Tropfen in der Sekunde gegeben hätten. Eine Oeffnung von 0,9 Linie Durchmesser gab bei der Druckhöhe von 9 Linien, nachdem der Strahl sich aufgelöst hatte, schon 80 Tropfen in der Sekunde. Sobald die Druckhöhe sich aber verminderte, verschwand der zusammenhängende Strahl ganz, und die Tropfen fielen schon einzeln von der Oeffnung ab.

Das Mittel, welches ich zum Zählen der Tropfen, so wie zur Beurtheilung ihrer Größe und Entfernung anwendete, bestand darin, daß ich das Schwungrad einer Drehbank mit einer Trommel aus Pappe versah, diese mit Fließpapier überzog und den zu untersuchenden Strahl während einer kurzen Zeit darauf fallen liefs, indem das Rad sich schnell drehte. Diese Art der Beobachtung ist sehr sicher, da man die Tropfen auf dem Papier mit voller Schärfe und Bequemlichkeit untersuchen kann, besonders wenn das Wasser gefärbt war. Zwischen die Ausfluß-Oeffnung und das Schwungrad legte ich eine geneigte Rinne, um den Strahl bis zur Zeit der Beobachtung und unmittelbar nachher abzuleiten. Die Dauer der Beobachtung beschränkte sich etwa auf eine halbe Sekunde, während welcher Zeit die Rinne seitwärts gestofsen wurde. Das Rad, welches 75 Zoll Umfang hatte, drehte sich in der Sekunde ein oder zweimal herum, indem es in gewöhnlicher Weise durch Treten bewegt wurde. Man gewöhnt sich, besonders wenn man ein Sekunden-Pendel vor Augen hat, sehr leicht daran, dem Rade diese Geschwindigkeiten mitzutheilen, und es dauernd darin zu erhalten.

Endlich erwähne ich noch, daß ich wiederholentlich auch Strahlen mit dem Rade auffing, die ihrem Ansehen nach sich noch nicht in Tropfen aufgelöst hatten, vielmehr an den Stellen, wo sie das Rad berührten, gleich massiven Glasstäben eine spiegelnde Oberfläche zeigten. In diesem Falle vertheilte sich die Flüssigkeit jedesmal ganz gleichmäfsig, und ohne Anschwellungen zu zeigen, als ein sehr feiner Streif über die Trommel. Dieses geschah auch noch, wenn ich das Rad drei Umdrehungen in der Sekunde ma-

chen liefs, und man darf daraus wohl mit Sicherheit schließen, daß die Tropfenbildung keineswegs schon in der Ausflußöffnung, sondern erst an der Stelle des Strahles beginnt, wo derselbe das massive Ansehen verliert, und der Mangel an Continuität auch dem bloßen Auge bemerkbar wird.

Diese Stelle ist indessen keineswegs unveränderlich, sie schwankt vielmehr in Folge der leisesten Erschütterungen sehr bedeutend. Savart hat durch acht Beobachtungsreihen nachgewiesen, welchen großen Einfluß die Art der Aufstellung des Gefäßes auf die Länge des zusammenhängenden Theiles des Strahles hat. Die Strahlen traten dabei aus Oeffnungen in dünner Wand, und zwar waren die Oeffnungen theils 3, und theils 6 Millimeter weit. Die Resultate waren für beide Oeffnungen sehr verschieden. Der zusammenhängende Theil des Strahles aus der feinern Oeffnung ist nämlich nach diesen Beobachtungen sehr nahe der Quadratwurzel aus der Druckhöhe proportional, oder wenn man die Beobachtungen graphisch darstellt, so erhält man Parabeln, deren Scheitel in die Anfangspunkte der Abscissen fallen. Trägt man dagegen die mit der weiteren Oeffnung angestellten Beobachtungs-Reihen in gleicher Weise auf, so ist ein Anschluß derselben an Parabeln, deren Scheitel in dem Anfangspunkte der Abscissen liegt, unmöglich.

Ich habe eine Menge Beobachtungen dieser Art angestellt, auch denselben in Bezug auf die Weite der Oeffnungen und die Druckhöhe eine größere Ausdehnung, als Savart gegeben. Sie weichen im Allgemeinen unter sich bedeutend ab, und ergaben niemals diejenige Uebereinstimmung, welche einzelne Reihen von Savart's Beobachtungen zeigten, und namentlich diejenigen, welche die Parabel darstellten. Ueberhaupt deutete keine einzelne meiner Beobachtungsreihen die Parabel an, wiewohl ich auch Oeffnungen benutzte, die wenig größer und kleiner, als 3 Millimeter waren. Die Richtigkeit jenes Gesetzes muß ich demnach bezweifeln, wenn auch Savart unerachtet

des Widerspruches aller von ihm selbst mit der gröfsern Oeffnung angestellten Beobachtungen, dasselbe ausdrücklich ausspricht.

Um aus meinen Messungen Resultate zu ziehen, schien es mir überflüssig, alle einzelnen Beobachtungen einer scharfen Berechnung zu unterwerfen. Ich stellte sie daher zunächst durch Abscissen und Ordinaten graphisch zusammen. Dabei zeigte es sich, dafs die Curve, welche durch die Längen des zusammenhängenden Theiles des Strahles bei verschiedenen Druckhöhen und derselben Ausflufsöffnung dargestellt wird, sich nicht merklich von einer geraden Linie unterscheidet. Ich hatte sogar fast bei keiner Beobachtungsreihe Veranlassung, eine Krümmung nach der einen, oder der andern Seite vorauszusetzen. Diese Linien zeigten, dafs die Länge des zusammenhängenden Theiles des Strahles mit der Druckhöhe zunimmt, dafs er aber in den meisten Fällen keinesweges mit dem Aufhören der Druckhöhe gleichfalls verschwindet, vielmehr alsdann noch eine bestimmte Länge behält.

Hiernach ergab sich die Form des Ausdrucks

$$H = \alpha + \beta h,$$

wo α die zuletzt erwähnte Länge, β eine gewisse andere Constante, h die Druckhöhe und H die Länge des zusammenhängenden Theiles des Strahles bezeichnet.

Stellte ich ferner die unter Anwendung derselben Beobachtungsart mit verschiedenen Ausflufsöffnungen gemachten Messungen zusammen; so ergab die Zeichnung mit grofser Wahrscheinlichkeit, dafs der Factor β der jedesmaligen Weite, oder dem Radius ρ der Oeffnung proportional sey. Die Constante α war gleichfalls augenscheinlich von ρ abhängig und nahm zu, sobald ρ gröfser wurde. Beide Gröfsen standen aber nicht im einfachen Verhältnisse, vielmehr schien es, dafs α dem Quadrate von ρ also dem Querschnitte des Strahles proportional sey. Die mit verschiedenen Ausflufsöffnungen angestellten Beobachtungen liefsen sich sonach durch den Ausdruck

$$H = a\rho^2 + b h \rho$$

darstellen. Ich muß aber bemerken, daß ich dieses Resultat nicht nur fand, als ich den Abstand der Stelle, wo die Tropfenbildung erfolgt, von der Ausflußöffnung maß, sondern ganz unabhängig davon führte die Messung der Länge des festen Theiles des Strahles, der also keinen dauernden Schwankungen unterworfen ist, mich genau zu demselben Ausdrucke.

Um die Zahlenwerthe der Constanten a und b zu finden, schien es genügend, zunächst für jede einzelne Beobachtungsreihe durch bloße Schätzung diejenige gerade Linie zu ermitteln, welche sich derselben am genauesten anschloß. Ich spannte einen feinen Faden über die Zeichnung und verschob denselben so lange, bis er sich den einzelnen Beobachtungspunkten am besten anzuschließen schien, und diese sich gleichmäßig darum gruppirten. Die auf solche Art gefundene gerade Linie wurde demnächst durch zwei Punkte an den Grenzen der angestellten Beobachtungen bestimmt, und diese beiden Punkte legte ich der folgenden Rechnung zum Grunde, als wenn sie unmittelbar durch Beobachtung gefunden wären.

Ich erhielt sonach für jede Durchfluß-Oeffnung und jede Beobachtungsart zwei Werthe der Länge des Strahles zu zwei verschiedenen Druckhöhen gehörend. Hierauf berechnete ich aus den so gefundenen Werthen und zwar für alle unter übrigens gleichen Umständen angestellte Beobachtungsreihen nach der Methode der kleinsten Quadrate und unter Zugrundelegung des angegebenen Ausdrucks der beiden Constanten.

Ich will nur die Endresultate dieser Rechnungen hier mittheilen.

I. Wenn die Länge der Strahlen bis zur Auflösung in Tropfen gemessen wird:

A. bei senkrecht herabfallenden Strahlen

$$H = 857 \cdot \rho^2 + 13,5 \cdot h \rho.$$

B. bei horizontalen Strahlen

$$H = 282 \cdot \rho^2 + 19,0 \cdot h \rho.$$

C. bei senkrecht aufsteigenden Strahlen

$$H = 17,0 \cdot h \varrho.$$

II. Wenn die Länge der Strahlen nur bis zu der Stelle gemessen wird, wo die Schwankungen einzutreten pflegen:

B. bei horizontalen Strahlen

$$H = 490 \cdot \varrho^2 + 11,3 \cdot h \varrho.$$

Die Verschiedenheit dieser Resultate kann nicht auffallen, sobald man auf die große Unsicherheit dieser Messungen Rücksicht nimmt. Eine irgend sichere Gränze für die Länge des zusammenhängenden oder des festen Theiles des Strahles giebt es nicht, und es ist daher auch sehr wahrscheinlich, daß ich in den zu verschiedenen Zeiten angestellten Beobachtungen, von der Aufstellungsart des Apparates abgesehen, jene Gränze nach der jedesmaligen Disposition des Auges und der Beleuchtung verschieden geschätzt habe. Hierdurch erklärt es sich, daß die zusammengehörigen Beobachtungen unter sich jedesmal besser übereinstimmten, als mit denen, die an anderen Tagen angestellt waren.

An denselben Ausdruck habe ich auch Savart's Beobachtungen anzuschließen versucht, indem ich jedesmal die bei gleicher Aufstellungsart des Apparates mit beiden Durchfluß-Oeffnungen gemachten acht Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete. Sie beziehen sich sämmtlich auf die Länge des herabfallenden Strahles und zwar bis zu der Stelle, wo die Auflösung in Tropfen erfolgt. Ich habe auch hier, wie in den vorstehenden Untersuchungen den Rheinländischen Zoll als Maafs-Einheit eingeführt.

Die erste Aufstellung des Apparates begünstigte am meisten die Vibrationen, die zweite weniger, die dritte noch weniger und am wenigsten die vierte. Die Resultate sind bei der ersten Aufstellung:

$$H = 1033 \cdot \varrho^2 + 11,0 \cdot h \varrho$$

bei der zweiten:

$$H = 1161 \cdot \varrho^2 + 13,5 \cdot h \varrho,$$

bei der dritten:

$$H = 2485 \cdot \rho^2 + 14,4 \cdot h \rho,$$

und bei der vierten:

$$H = 2927 \cdot \rho^2 + 13,3 \cdot h \rho.$$

Diese Resultate weichen nicht gerade bedeutend von den aus meinen Beobachtungen hergeleiteten ab. Man darf vielleicht aus allen die Folgerung ziehen, daß der constante Factor des zweiten Gliedes von der Richtung des Strahles und von der Art der Aufstellung des Apparates ganz unabhängig ist, der Factor des ersten Gliedes dagegen um so größer wird, je mehr die Richtung des Strahles sich der der Schwere nähert, und je mehr alle Vibrationen vermieden werden.

Eine genügende Erklärung des ganzen Phänomens zu geben, bin ich nicht im Stande; es scheint aber, daß die Spannung der Oberfläche des Wassers auch hier von großem Einflusse ist. Die Beziehung zu den Schallwellen, die Savart evident nachgewiesen hat, lassen dieses schon vermuthen, und die Formveränderungen der bereits abgerissenen Tropfen, welche die auffallende Knotenbildung veranlassen, bestätigen es sehr sicher. Das letzte Phänomen schließt sich auch an die Form-Veränderungen eines noch zusammenhängenden Strahles an, der aus dreiseitigen oder vierseitigen Oeffnungen tritt. Die Kraft, welche in diesem Falle die aus den Seiten vorspringenden Rippen wieder zurückzieht, und zwar mit solcher Gewalt, daß statt ihrer tiefe Rinnen entstehn, kann wohl keine andere seyn, als die Spannung der elastischen Oberfläche.

Die Schwingungen dieser Oberfläche, die bei zunehmender Ausbildung endlich ein Zerreißen der Oberfläche und sonach die Trennung des Strahles in Tropfen verursachen, werden gewiß um so mehr befördert, je weniger Steifigkeit der Strahl besitzt. Man darf wohl annehmen, daß diese Steifigkeit theils dem Drucke proportional ist, unter dem der Strahl sich bildet oder h , theils aber auch dem Verhältnisse des Querschnittes zum Umfange des Strahles oder ρ . Auf diese Weise erklärt sich die Zusammen-

setzung des zweiten Gliedes in dem gefundenen Ausdrucke. Das erste Glied dagegen, welches beim senkrecht aufsteigenden Strahle verschwindet, rechtfertigt sich vielleicht dadurch, daß der Strahl, wenn er auch ohne Druck sich bildet, schon durch den Zusammenhang der Wasserfäden auf eine gewisse Länge die Schwingungen der Oberfläche verhindert, und dieser Widerstand der Anzahl der Wasserfäden oder ϱ^2 proportional ist.

Berlin d. 30. Juli 1849.

III. *Ueber das Gleichgewicht von homogenen starren Körpern; von Hrn. W. Wertheim.*

(Schluß der im vorigen Heft abgebrochenen Abhandlung.)

Hr. Cauchy hat gezeigt, daß man die Navier'sche Grundhypothese durch eine allgemeinere Hypothese ersetzen kann. Statt anzunehmen, jeder vornehmste Zug oder Druck sey proportional der linearen Ausdehnung oder Zusammenrückung in Richtung der Kraft, kann man voraussetzen, er zerfalle in zwei Theile, von denen der eine der linearen Veränderung proportional gehe, während der andere proportional sey der kubischen Ausdehnung oder Verdichtung.

Seyen ω der vornehmste Zug oder Druck, ε die lineare Veränderung und v die entsprechende Volumensänderung, so setzen wir, daß man habe:

$$\omega = k\varepsilon + Kv \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo k und K , für homogene Körper, zwei Constanten sind, die nur von der Natur der Substanz abhängen.

Denken wir uns einen Cylinder mit freier convexer Fläche, nur unterworfen an seinen Grundflächen einem Zuge oder Drucke, der ihn um die Gröfse δ verlängert oder verkürzt. Hr. Cauchy beweist nun, daß man habe