

## 20.

**Mathematische Miszellen.**(Von Herrn Dr. *Schellbach*, Prof. der Math. zu Berlin.)

**D**as Folgende wird eine Sammlung mathematischer Gedanken und Beobachtungen enthalten, die sich mir während einer längern Reihe von Jahren bei meinen Vorträgen aufgedrängt haben. Sie ist hauptsächlich dazu bestimmt, anderen Lehrern der Mathematik bei ihren Vorlesungen denselben Nutzen zu gewähren, den sie mir gebracht hat.

**No. I.****Über die Bewegung eines Puncts, der von einem festen Puncte angezogen wird.**

Die Entfernung  $r$  des beweglichen Puncts  $P$  von dem festen Punct  $O$ , der zum Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten  $x$  und  $y$  genommen werden mag, bilde mit der Abscissen-Axe den Winkel  $\varphi$ . Der Zuwachs an Geschwindigkeit, welchen der Punct  $P$  während einer Secunde erfährt, wenn er sich in der Entfernung  $r$  von  $O$  befindet, sei eine Function  $R$  vom Radius-vector  $r$ . Die Bewegung des Puncts  $P$  wird dann durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{xR}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{yR}{r}.$$

Bezeichnet man die Differentiationen nach dem Bogen  $s$  der durchlaufenen Bahn durch Accente, setzt also  $\frac{\partial x}{\partial s} = x'$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = x''$  u. s. w., so lassen sich diese Gleichungen in die beiden:

$$(1.) \quad x't'' - t'x'' = \frac{xRt'^3}{r},$$

$$(2.) \quad y't'' - t'y'' = \frac{yRt'^3}{r},$$

verwandeln.

Nennt man  $\varrho$  den Krümmungshalbmesser der Bahn, so ist

$$(3.) \quad x'y'' - y'x'' = \frac{1}{\varrho},$$

und für

$$(4.) \quad xy' - yx' = A$$

wird

$$(5.) \quad xy'' - yx'' = A'.$$

Eliminirt man erst  $t'$ , dann  $t''$  aus links (1. und 2.), so erhält man die beiden Gleichungen

$$(6.) \quad \frac{t''}{\varrho} = \frac{A'Rt'^3}{r},$$

$$(7.) \quad \frac{t'}{\varrho} = \frac{A'Rt'^3}{r},$$

deren Quotient  $\frac{t''}{t'} = \frac{A'}{A}$  giebt, von welcher Gleichung

$$t' = \alpha A$$

das Integral ist, indem  $\alpha$  die Integrationsconstante bezeichnet.

Man hat nun noch die Gleichungen

$$(8.) \quad x^2 + y^2 = r^2; \quad xx' + yy' = rr'; \quad x'^2 + y'^2 = 1; \quad r'^2 + r^2\varphi'^2 = 1$$

zu berücksichtigen. Die Summe der Quadrate der Gleichungen (4.) und  $xx' + yy' = rr'$  giebt  $r^2 = r^2r'^2 + A^2$ , woraus sich, mit Rücksicht auf die letzte der Gleichungen (8.)  $A = r^2\varphi'$ , also

$$(9.) \quad t' = \alpha r^2\varphi'$$

ergiebt. Setzt man nun den für  $t'$  gefundenen Werth in (7.), so erhält man

$$(10.) \quad \frac{1}{\varrho} = \alpha^2 R r^5 \varphi'^3.$$

Werden  $\frac{1}{r}$  durch  $u$  und die Differentiale nach dem Winkel  $\varphi$  durch Accente bezeichnet, so ist der einfachste Ausdruck für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve, der auch mit Nutzen in die Lehrbücher aufgenommen werden könnte:

$$(11.) \quad \varrho = \frac{(us')^3}{u + u''}.$$

Da hier  $s'$  für  $\frac{\partial s}{\partial \varphi}$  gesetzt worden ist und in (9.)  $\varphi'$  den Differentialquotienten  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  bedeutet, so verwandelt sich durch diesen Werth von  $\varrho$  die Gleichung (10.) in

$$(12.) \quad u'' + u = \alpha^2 r^2 R;$$

welches die Differentialgleichung der Bahn des Puncts  $P$  ist.

Diese Gleichung läßt sich integrieren, wenn z. B.  $R$  von der Form

$$R = \frac{a}{r^3} + \frac{\Phi}{r^2}$$

ist, wo  $a$  eine Constante und  $\Phi$  eine Function des Winkels  $\varphi$  bedeutet. Man hat nämlich in diesem Falle nur die lineare Gleichung

$$(13.) \quad u'' + (1 - \alpha^2 a)u = \alpha^2 \Phi,$$

zu behandeln, deren Integral für  $1 - \alpha^2 = \beta^2$  die Form

$$(14.) \quad u = \frac{1}{r} = \frac{\alpha^2}{\beta} \left\{ \sin \beta \varphi \int \Phi \cos \beta \varphi \, d\varphi - \cos \beta \varphi \int \Phi \sin \beta \varphi \, d\varphi \right\} + \gamma \cos(\delta + \beta \varphi)$$

hat und bekanntlich für ein imaginäres  $\beta$  eine andere Gestalt annimmt. Die Constanten der Integration sind  $\gamma$  und  $\delta$ . Verwandelt sich  $\Phi$  bloß in eine Constante  $b$ , so erhält man aus (14.):

$$(15.) \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha^2 b}{\beta} + \gamma \cos(\delta + \beta \varphi),$$

welche Gleichung endlich für  $a = 0$ , also  $\beta = 1$ , in

$$(16.) \quad \frac{1}{r} = \alpha^2 b + \gamma \cos(\delta + \varphi)$$

übergeht und einen *Kegelschnitt* darstellt, dessen Brennpunct der feste anziehende Punct ist.

*Jacobi* hat in der Abhandlung: „De motu puncti singularis“ im 24ten Bande dieses Journals dieselbe Aufgabe auf eine eigenthümliche und elegante Weise behandelt, aber er gelangt dort nur zu dem Satze, daß das Problem auf Quadraturen gebracht werden kann, wenn  $R$  eine homogene Function zweiten Grades der Coordinaten  $x$  und  $y$  ist, oder wenn es, da  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ist, die Form  $\frac{\Phi}{r^2}$  hat. Bei seiner Behandlungsweise konnte sich die oben gefundene Verallgemeinerung des Satzes nicht ergeben.

Nimmt man an, es sei

$$R = \frac{a}{r^3} + br,$$

wo  $a$  und  $b$  Constanten bedeuten, so erhält man aus (12.):

$$(17.) \quad u^3 u'' + (1 - \alpha^2) u^4 = b \alpha^2.$$

Von dieser Gleichung ist

$$(18.) \quad u^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{\beta}{1 - \alpha^2} + \frac{\gamma(\beta^2 - b\alpha^2(1 - \alpha^2))}{1 - \alpha^2} \cos 2(\gamma + \varphi \sqrt{1 - \alpha^2})$$

das Integral, mit den Integrationsconstanten  $\beta$  und  $\gamma$ ; welches bekanntlich, für  $\alpha^2 > 1$ , eine andere Gestalt annimmt.

Ist die Constante  $a = 0$ , so verwandelt sich die für den Punkt  $P$  gefundene Bahn, wenn  $b$  positiv ist, in eine *Ellipse*, deren Mittelpunkt  $O$  einnimmt; denn man erhält dann aus (18.)

$$(19.) \quad \frac{1}{r^2} = \beta + \sqrt{(\beta^2 - b\alpha^2)} \cos 2(\gamma + \varphi),$$

oder, wenn man  $r \cos(\gamma + \varphi) = \xi$  und  $r \sin(\gamma + \varphi) = \eta$  setzt:

$$(20.) \quad (\beta + \sqrt{(\beta^2 - b\alpha^2)}) \xi^2 + (\beta - \sqrt{(\beta^2 - b\alpha^2)}) \eta^2 = 1.$$

Für die *Zeit* findet man durch Hülfe der Gleichung (9.):  $t' = \alpha r^2 \varphi'$ , oder

$$\partial t = \alpha r^2 \partial \varphi.$$

## No. II.

In dieser Nummer werde ich dieselbe Aufgabe noch auf eine andere Weise behandeln, welche schneller als die gewöhnlichen Methoden zum Ziele führt.

Bezeichnet man das Differentiiren nach der Zeit  $t$  durch Accente, so ist z. B., wenn  $u$  und  $v$  Functionen von  $t$  sind:

$$(1.) \quad (uv)'' = \frac{(u^4 v'^2)'}{2u^3 v'} + u''v.$$

Die hier zu behandelnden Bewegungsgleichungen sind:

$$(x \cos \varphi)'' + R \cos \varphi = 0 \quad \text{und} \quad (y \sin \varphi)'' + R \sin \varphi = 0.$$

Mit Benutzung der Formel (1.) verwandeln sich diese Gleichungen unmittelbar in

$$(2.) \quad (r^4 \sin^2 \varphi \cdot \varphi'^2)' - r^3 (r'' + R) \sin 2\varphi \cdot \varphi' = 0,$$

$$(3.) \quad (r^4 \cos^2 \varphi \cdot \varphi'^2)' + r^3 (r'' + R) \sin 2\varphi \cdot \varphi' = 0.$$

Die Summe derselben giebt

$$(r^4 \varphi'^2)' = 0,$$

also

$$(4.) \quad r^2 \varphi' = c;$$

wo  $c$  die Constante der Integration ist.

Setzt man diese Constante in eine der Gleichungen (2.) oder (3.) statt  $r^2 \varphi'$ , so findet sich

$$(5.) \quad r^3 (r'' + R) - c^2 = 0,$$

und hieraus

$$r' = \sqrt{(c' - 2 \int R \partial r - \frac{c^2}{r^2})};$$

wo  $c'$  die zweite Integrationsconstante ist. Es ist also

$$(6.) \quad t = \int \frac{\partial r}{\sqrt{(c' - 2fR\partial r - \frac{c^2}{r^2})}},$$

und mit Hülfe von (4.) findet man:

$$(7.) \quad \varphi = c \int \frac{\partial r}{r^2 \sqrt{(c' - 2fR\partial r - \frac{c^2}{r^2})}}.$$

### No. III.

Um dasselbe Problem im Raume zu behandeln, hat man, wenn

$$x = r \cos \alpha; \quad y = r \cos \beta; \quad z = r \cos \gamma$$

gesetzt wird, folgende drei Gleichungen zu integrieren:

$$(1.) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + R \cos \alpha = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R \cos \beta = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + R \cos \gamma = 0.$$

Stellen in (Fig. 1. Taf. VIII.)  $SX$ ,  $SY$ ,  $SZ$  die drei auf einander senkrechten Coordinaten-Axen vor,  $P$  den angezogenen Punct, und die übrigen krummen Linien Bogen größter Kreise, welche auf einer mit dem Radius  $SP$  construirten Kugel liegen: ferner  $PSA$  die Ebene der Bahn des Puncts  $P$ , und  $P_1$  einen in dieser Ebene um  $90^\circ$  von  $P$  abstehenden Punct, so geben die sphärischen Dreiecke  $APX$ ,  $APY$ ,  $APB$  und die drei entsprechenden  $AP_1X$ ,  $AP_1Y$ ,  $AP_1B_1$  die Gleichungen

$$(2.) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \cos \nu \cos \theta - \sin \nu \sin \theta \cos i, \\ \cos \beta = \cos \nu \sin \theta + \sin \nu \cos \theta \cos i, \\ \cos \gamma = \sin \nu \sin i, \end{cases}$$

$$(3.) \quad \begin{cases} \cos \alpha_1 = \sin \nu \cos \theta + \cos \nu \sin \theta \cos i, \\ \cos \beta_1 = \sin \nu \sin \theta - \cos \nu \cos \theta \cos i, \\ \cos \gamma_1 = -\cos \nu \sin i. \end{cases}$$

Aus der Summe der Quadrate der entsprechenden Gleichungen erhält man

$$(4.) \quad \begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha_1 = 1 - \sin^2 \theta \sin^2 i, \\ \cos^2 \beta + \cos^2 \beta_1 = 1 - \cos^2 \theta \sin^2 i, \\ \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma_1 = \sin^2 i. \end{cases}$$

Diese 9 Gleichungen, in denen nur  $\theta$  und  $i$  constant sind, geben

$$(5.) \quad \partial \cos \alpha = -\cos \alpha_1 \partial \nu; \quad \partial \cos \beta = -\cos \beta_1 \partial \nu; \quad \partial \cos \gamma = -\cos \gamma_1 \partial \nu,$$

$$(6.) \quad \partial \cos^2 \alpha = -\partial \cos^2 \alpha_1; \quad \partial \cos^2 \beta = -\partial \cos^2 \beta_1; \quad \partial \cos^2 \gamma = +\partial \cos^2 \gamma_1.$$

Die Gleichungen (1.) verwandeln sich also durch die Transformation (1. N. II.) in

$$(7.) \quad \begin{cases} \partial \left( r^2 \frac{\partial \cos \alpha}{\partial t} \right)^2 + r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) \partial \cdot \cos^2 \alpha = 0, \\ \partial \left( r^2 \frac{\partial \cos \beta}{\partial t} \right)^2 + r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) \partial \cdot \cos^2 \beta = 0, \\ \partial \left( r^2 \frac{\partial \cos \gamma}{\partial t} \right)^2 + r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) \partial \cdot \cos^2 \gamma = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man (5. und 6.) benutzt, in

$$(8.) \quad \begin{cases} \partial \left( r^2 \frac{\partial \nu}{\partial t} \cos \alpha_1 \right)^2 = r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) \partial \cdot \cos^2 \alpha_1, \\ \partial \left( r^2 \frac{\partial \nu}{\partial t} \cos \beta_1 \right)^2 = r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) \partial \cdot \cos^2 \beta_1, \\ \partial \left( r^2 \frac{\partial \nu}{\partial t} \cos \gamma_1 \right)^2 = r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) \partial \cdot \cos^2 \gamma_1. \end{cases}$$

Da  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$  ist, so giebt die Addition dieser drei Gleichungen, ganz wie oben:

$$\partial \left( r^2 \frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 = 0, \quad \text{also} \quad r^2 \frac{\partial \nu}{\partial t} = c,$$

und durch Einführung dieses Werths in eine der Gleichungen (9.):

$$r^3 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + R \right) = c^2.$$

## No. IV.

Eine ähnliche Anwendung findet die Transformation (1.) in (II.) auch bei folgender Aufgabe, welche *Jacobi* ebenfalls in der oben erwähnten Abhandlung löset.

Es sei nämlich ein Punct *A*, in (Fig. 2.) gezwungen, sich auf einer Umdrehungsfläche zu bewegen, von welcher *ZAB* eine Meridiancurve ist. Die Kraft, welche ihn angreift, möge nur in der Meridian-Ebene wirken; ihre Componente *AE*, welche senkrecht gegen die Umdrehungs-Axe *OZ* gerichtet ist, sei *X*; die andere *AF*, parallel mit dieser Axe, heiße *Y*. Beide mögen Functionen der Entfernung *AG* oder *CO* = *x* von der Axe *OZ* sein.

Die Coordinaten des Puncts *A* sind, wie es die Figur zeigt,

$$OD = \xi, \quad DC = \eta, \quad CA = \gamma.$$

Die Richtung des Widerstandes  $\lambda$ , welchen die Fläche zu leisten hat, fällt ebenfalls ganz in die Meridian-Ebene. Stellt  $\partial s$  das Bogen-Element der Meridiancurve vor, so ist die senkrecht gegen die Axe gerichtete Componente

des Widerstandes  $\lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s}$  und die mit ihr parallele  $-\lambda \frac{\partial x}{\partial s}$ . Es ist hier  $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$  mit negativem Zeichen genommen, da vorausgesetzt wird, daß der Bogen wächst, wenn  $\gamma$  abnimmt. Bildet nun die Meridian-Ebene mit der festen Ebene **ZOX** den Winkel  $\varphi$ , so sind die Gleichungen der Bewegung offenbar folgende:

$$(1.) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (X + \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s}) \cos \varphi,$$

$$(2.) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (X + \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s}) \sin \varphi,$$

$$(3.) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = Y - \lambda \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Es ist aber

$$\xi = x \cos \varphi \quad \text{und} \quad \eta = x \sin \varphi;$$

daher giebt die Formel (1. in No. II.) statt (1. und 2.) die beiden Gleichungen

$$(4.) \quad \partial \left( x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \varphi \right)^2 + x^3 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X - \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \partial \cdot \cos^2 \varphi = 0 \quad \text{und}$$

$$(5.) \quad \partial \left( x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \varphi \right)^2 + x^3 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - Y - \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \partial \cdot \sin^2 \varphi = 0,$$

durch deren Addition man  $\partial \left( x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = 0$  und hieraus

$$(6.) \quad x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c$$

erhält. Durch Einführung der Constanten  $c$  in eine der Gleichungen (4. oder 5.) ergibt sich dann:

$$x^3 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X - \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) = c^2.$$

Die beiden zur weiteren Lösung der Aufgabe erforderlichen Gleichungen sind also jetzt

$$(7.) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X + \frac{c^2}{x^3} + \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial s} \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = Y - \lambda \frac{\partial x}{\partial s}. \end{cases}$$

Das Auftreten des Gliedes  $\frac{c^2}{x^3}$  in der ersten dieser Gleichungen, welches hier ganz naturgemäÙ sich zeigt, ist **Jacobi** so auffallend erschienen, daß er darüber folgenden besonderen Satz aufstellt:

## Propositio I.

„Punctum, quod in data superficie revolutione genita moveri debet, vi sollicitetur in plano Meridiani directa et a sola positione puncti in ipso Meridiano pendente: revocari potest motus propositus ad motum puncti in curva meridianae, accedente ad vim sollicitantem alia quae axi perpendicularis et cubo distantiae puncti ab axe inverse proportionalis est.”

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (7.) mit  $\partial x$ , die zweite mit  $\partial y$  und addirt beide Producte, so erhält man

$$(8.) \quad \frac{\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y}{\partial t^2} = X \partial x + Y \partial y + \frac{c^2 \partial x}{x^3}.$$

Ist  $v$  die Geschwindigkeit des bewegten Puncts, also  $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ , und integrirt man (8.), nachdem mit 2 multiplicirt worden, so erhält man

$$(9.) \quad \frac{\partial s^2}{\partial t^2} = v^2 = 2 \int (X \partial x + Y \partial y) - \frac{c^2}{x^2},$$

wenn die zweite Constante nach der Integration hinzugefügt wird.

Wächst der Bogen mit der *Zeit*, so folgt hieraus

$$t = \int \frac{\frac{\partial s}{\partial x} \partial x}{\left\{ 2 \int \left( X + Y \frac{\partial y}{\partial x} \right) \partial x - \frac{c^2}{x^2} \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

und da  $\partial \varphi = \frac{c \partial t}{x^2}$  ist, auch sogleich:

$$\varphi = c \int \frac{\frac{\partial s}{\partial x} \partial x}{x^2 \left\{ 2 \int \left( X + Y \frac{\partial y}{\partial x} \right) \partial x - \frac{c^2}{x^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus der Gleichung der Meridiancurve  $f(x, y) = 0$  müssen die Werthe  $\frac{\partial y}{\partial x}$  und  $\frac{\partial s}{\partial x}$  genommen werden. Das Weitere über diese und ähnliche Aufgaben wird man bei *Jacobi* a. a. O. mit vielem Nutzen studiren.

## V.

## Über den Krümmungskreis.

Jeder Lehrer der Mathematik, der durch einen längeren Verkehr mit seinen Schülern Gelegenheit hat, die Wirkung seiner Vorträge zu sehen, und der zugleich auch den Einfluss anderer Docenten beurtheilen mag, weifs mit ziemlicher Sicherheit, dafs von den Studirenden kaum der dritte Theil selbst die einfacheren Vorstellungen, wie die vom Maafs der Krümmung der Curven, anfangs richtig auffafst, sondern erst nach längerer Arbeit und Anstrengung die Unklarheit seiner ersten Ansichten zu läutern vermag. Namentlich bei den Formeln, welche die Gröfse und Lage des Krümmungskreises bestimmen, bin ich häufig der Vorstellung begegnet, als ob diese Formeln auf eine gewisse allgemeine Weise von der Form der Function abhingen, durch welche die untersuchte Curve dargestellt wird. Ich bin daher veranlafst worden, diese Formeln für *endliche Differenzen* zu berechnen, und theile die Rechnung hier mit, weil sie zu denselben Ausdrücken führt, wie die sind, welche mit Hülfe der Differentialrechnung gewonnen werden.

Die Aufgabe ist also: den Radius  $\rho$  und die Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  eines Kreises zu suchen, welcher durch drei Punkte geht, deren Coordinaten  $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  sind.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich,  $x_1 - x$  durch  $\Delta x$  und  $x_2 - x_1$  durch  $\Delta x_1$ , so wie  $\Delta x_1 - \Delta x$  durch  $\Delta^2 x$  etc., so ist, wenn  $x', y', z'$  die laufenden Coordinaten sind, die Gleichung der Ebene, welche durch die drei gegebenen Punkte geht:

$$(x' - x_1)(\Delta y \Delta^2 z - \Delta z \Delta^2 y) + (y' - y_1)(\Delta z \Delta^2 x - \Delta x \Delta^2 z) \\ + (z' - z_1)(\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x) = 0.$$

Setzt man

$$\xi - x_1 = u, \quad \eta - y_1 = v, \quad \zeta - z_1 = w,$$

so haben die vier Gröfsen  $u, v, w, \rho$  offenbar folgenden vier Gleichungen zu entsprechen:

$$(1.) \quad u(\Delta y \Delta^2 z - \Delta z \Delta^2 y) + v(\Delta z \Delta^2 x - \Delta x \Delta^2 z) + w(\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x) = 0,$$

$$(2.) \quad (u + \Delta x)^2 + (v + \Delta y)^2 + (w + \Delta z)^2 = \rho^2,$$

$$(3.) \quad u^2 + v^2 + w^2 = \rho^2,$$

$$(4.) \quad (u - \Delta x_1)^2 + (v - \Delta y_1)^2 + (w - \Delta z_1)^2 = \rho^2.$$

Man nehme jetzt an, die Entfernung zwischen dem ersten und zweiten Punkte sei der zwischen dem zweiten und dritten gleich, so dafs also, wenn

man diese Entfernungen durch  $\Delta s$  und  $\Delta s_1$  bezeichnet,

$$(5.) \quad \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2 = \Delta s^2 = \Delta s_1^2$$

ist, oder, was dasselbe ist:

$$(6.) \quad 2(\Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y + \Delta z \Delta^2 z) + \Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2 = 0.$$

Zieht man von der Gleichung (2.) und dann von der Gleichung (4.), die (3.) ab, so bleibt

$$(7.) \quad 2(u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z) + \Delta s^2 = 0,$$

$$(8.) \quad 2(u \Delta x_1 + v \Delta y_1 + w \Delta z_1) - \Delta s_1^2 = 0.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt

$$(9.) \quad u \Delta^2 x + v \Delta^2 y + w \Delta^2 z = \Delta s^2.$$

Die Gleichung (1.) wird befriedigt, wenn man annimmt, es sei  $\lambda$  ein unbestimmter Coëfficient und

$$u = \lambda \Delta^2 x, \quad v = \lambda \Delta^2 y, \quad w = \lambda \Delta^2 z.$$

Setzt man aber diese Werthe für  $u, v, w$  in (7.) und benutzt (6.), so erhält man, ganz eben so wie wenn sie in (9.) gesetzt werden:

$$(10.) \quad \lambda(\Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2) = \Delta s^2.$$

Die Substitution derselben Werthe in (3.) giebt aber

$$(11.) \quad \lambda^2(\Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2) = \varrho^2,$$

also, wenn man (11.) durch (10.) dividirt,

$$\lambda = \frac{\varrho^2}{\Delta s^2}.$$

Daher erhält man endlich

$$\xi - x_1 = \varrho^2 \frac{\Delta^2 x}{\Delta s^2}; \quad \eta - y_1 = \varrho^2 \frac{\Delta^2 y}{\Delta s^2}; \quad \zeta - z_1 = \varrho^2 \frac{\Delta^2 z}{\Delta s^2}$$

und

$$\varrho = \pm \frac{\Delta s^2}{\sqrt{(\Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2)}}.$$

Ich kann nicht verhehlen, dafs ich etwas überrascht war, die bekannten Formeln

$$\xi = x + \varrho^2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}; \quad \eta = y + \varrho^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}; \quad \zeta = z + \varrho^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial s^2},$$

und

$$\varrho = \pm \frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)}}$$

für *endliche Differenzen* gültig zu finden.

## VI.

## Über den Krümmungshalbmesser.

(Fortsetzung.)

Schon in der ersten Nummer dieser Miszellen hatte ich Gelegenheit, eines Ausdrucks für den Krümmungshalbmesser zu gedenken, der öfters nützlich werden kann und den ich jetzt entwickeln will.

Der Radiusvector  $OA = r$  der Curve  $EF$  bilde in (Fig. 3.) mit der Abscissen-Axe  $OX$  den Winkel  $\varphi$ . Auf die Tangente  $AB = \tau$  des Puncts  $A$  ist das Loth  $OB = p$  gefällt, und dieselbe Construction ist für den auf  $A$  folgenden Punct  $A_1$  wiederholt. Die Tangente  $\tau$  bildet mit  $OX$  den Winkel  $\omega$ , und daher schneidet sie auch den Krümmungshalbmesser  $MA = \rho$  des Puncts  $A$ , und den des Puncts  $A_1$  unter dem Winkel  $\partial\omega$ . Steht  $AC$  senkrecht auf  $OA_1$ , so ist  $AC = r\partial\varphi$ ,  $CA_1 = \partial r$ , und wenn das Bogen-Element  $AA_1$  mit  $\partial s$  bezeichnet wird, so geben die ähnlichen Dreiecke  $AA_1C$  und  $AOB$  die Gleichung

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{r}{\tau}.$$

Es ist aber  $\rho = \frac{\partial s}{\partial \omega}$ , oder wenn man für  $\partial s$  seinen Werth setzt:

$$\rho = \frac{r\partial r}{\tau\partial \omega}.$$

Da nun der Winkel  $BA_1B_1 = \omega_1 - \omega = \partial\omega$  ist, so wird

$$\tau\partial\omega = B_1D = p_1 - p = \partial p.$$

Der Inhalt des Dreiecks  $OAA_1$  ist aber  $\frac{1}{2}r^2\partial\varphi$  oder auch  $\frac{1}{2}p\partial s$ , daher ist

$$p = \frac{r^2\partial\varphi}{\partial s},$$

folglich

$$(1.) \quad \rho = \frac{r\partial r}{\partial \cdot \frac{r^2\partial\varphi}{\partial s}}.$$

Die Veranlassung zur Entwicklung dieser Formel gab mir die Erfahrung, dafs durch die bekannten Ausdrücke des Krümmungshalbmessers für Polarcordinaten, und auch für rechtwinklige, die Krümmung der gemeinen Lemniscate von den Schülern nur nach sehr beschwerlichen Rechnungen gefunden werden konnte und dafs die Schuld wirklich nicht ganz ihrer Ungeübtheit zugeschrieben werden mußte; wie sich Jeder durch Anstellung des Versuchs überzeugen kann.

Die Gleichung der gewöhnlichen Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

nimmt für Polarcoordinaten die Form

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

an. Bezeichnet man die Differentiale nach  $\varphi$  durch Accente, so erhält man

$$rr' = -a^2 \sin 2\varphi,$$

also

$$a^4 = r^2 r'^2 + r^4 = r^2(r'^2 + r^2) = r^2 s'^2 \quad \text{oder} \quad s' = \frac{a^2}{r}.$$

Die obige Formel (1.) giebt daher für den Krümmungshalbmesser der Lemniscate:

$$\varrho = \frac{r \partial r}{\partial \cdot \frac{r^2}{s'}} = \frac{a^2 r \partial r}{\partial \cdot r^3} = \frac{a^2}{3r}.$$

Setzt man  $\frac{1}{r} = u$ , so wird  $s'^2 = r^2 + r'^2 = \frac{u^2 + u'^2}{u^4}$  und

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{r^2}{s'} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (u^2 + u'^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{u'(u + u'')}{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher verwandelt sich die Formel (1.) in die folgende:

$$(2.) \quad \varrho = \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u + u'')} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{u^2 s'^3}{u + u''},$$

welche ich schon in No. (I.) benutzt und als eine einfachere als die bekannten, empfohlen habe.

## No. VII.

### Eine Wirkung der Schwungkraft.

Der schwere Punct  $A$  ist an der nicht schweren geraden Linie  $HA = l$  (Fig. 4.) befestigt, die sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Axe  $HX$  dreht und durch die Schwungkraft des Puncts  $A$  um den Winkel  $AHD = \alpha$  von der Axe entfernt hat. Zerlegt man die Beschleunigung der Schwere  $AG = g$  in die beiden Componenten  $AF$  und  $AE$ , von denen die erste in der Richtung der Linie  $HA$  fällt und durch deren Befestigung in  $H$  aufgehoben wird, und die zweite, senkrecht gegen  $HX$  gerichtete, der Schwungkraft das Gleichgewicht hält, so hat man zur Bestimmung des Winkels  $\alpha$  die Gleichung

$$\omega^2 l \sin \alpha = g \tan \alpha.$$

Man erhält aus dieser Gleichung entweder

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \cos \alpha = \frac{g}{lw^2}.$$

Also hat die Linie **HA** zwei Gleichgewichtslagen: entweder in der Drehungs-Axe selbst, oder, wenn sie sich um den durch die zweite Gleichung bestimmten Winkel  $\alpha$  von dieser Axe entfernt hat. Dieser Winkel wird aber *unmöglich*, sobald sein Cosinus gröfser als 1 oder

$$l < \frac{g}{w^2}$$

ist. Da  $l \cos \alpha = \mathbf{HD} = h$  ist, so giebt die zweite Gleichung

$$h = \frac{g}{w^2}.$$

Diese Höhe  $h$ , bis zu welcher sich durch den Schwung um die Axe **HX** die Punkte **A, B, C**, die an verschiedenen langen Linien befestigt sind, dem Aufhängungspuncte **H** nähern, hängt also nur von ihrer Winkelgeschwindigkeit  $w$  ab. Punkte, die in **H** an Linien befestigt sind, welche die Länge  $h$  nicht erreichen, bleiben daher, bei der Drehung der Axe **HX**, ruhig in dieser Axe hängen, während sich die übrigen in eine einzige Ebene **CC'** begeben, auf welcher die Axe **HX** senkrecht steht. Solche, an kürzeren Linien als **HD** befestigten Punkte haben also nur eine einzige Gleichgewichtslage, während alle, die an längeren Linien befestigt sind, deren zwei einnehmen können.

Trägt die Linie **AH** (Fig. 5.), statt einer einzigen Masse, in den Puncten **A** und **A'**, zwei Massen  $m$  und  $m'$ , und ist  $\mathbf{AH} = l$  und  $\mathbf{A'H} = l'$ , so sind die Radien, welche diese Massenpuncte bei ihrer Drehung um die Axe **HX** durchlaufen,  $\mathbf{AD} = l \sin \alpha$  und  $\mathbf{A'D'} = l' \sin \alpha$ , also die Schwungkkräfte  $\mathbf{DB} = mw^2 l \sin \alpha$  und  $\mathbf{D'B'} = m'w^2 l' \sin \alpha$ . Die Componenten der Schwere sind aber  $\mathbf{AE} = mg \tan \alpha$  und  $\mathbf{A'E'} = m'g \tan \alpha$ . Die Spannungen **AF** und **A'F'** werden durch die Festigkeit des Puncts **H** aufgehoben. Stellt man sich nun die parallelen Kräfte **BD** und **B'D'**, so wie **AE** und **A'E'**, in der Axe **HD** wirkend vor, so müssen sie hier einander das Gleichgewicht halten; es mufs also die Gleichung

$$\mathbf{HD} \cdot \mathbf{DB} + \mathbf{HD'} \cdot \mathbf{D'B'} = \mathbf{HD} \cdot \mathbf{AE} + \mathbf{HD'} \cdot \mathbf{A'E'}$$

oder

$$l \cos \alpha \cdot mw^2 l \sin \alpha + l' \cos \alpha \cdot m'w^2 l' \sin \alpha = l \cos \alpha \cdot mg \tan \alpha + l' \cos \alpha \cdot m'g \tan \alpha$$

oder

$$\cos \alpha = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{ml + m'l'}{ml^2 + m'l'^2}$$

Statt finden.

Auf diese Weise erhält man auch, wenn die Linie  $AH$  in den Entfernungen  $l, l', l'', \dots$  mit den Massenpunkten  $m, m', m'', \dots$  besetzt ist, für  $\cos \alpha$  den allgemeinen Ausdruck

$$\cos \alpha = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{ml + m'l' + m''l'' + \dots}{ml^2 + m'l'^2 + m''l''^2 + \dots}.$$

Sind alle Massen gleich groß und in  $n$  Punkten über die ganze Linie gleichförmig vertheilt, so findet sich

$$\cos \alpha = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{n(1+2+3+\dots+n)}{l(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)} = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{3nn(n+1)}{ln(n+1)(2n+1)} = \frac{3g}{lw^2} \cdot \frac{n}{2n+1}.$$

Um den Winkel  $\alpha$  für den Fall zu finden, wenn  $AH$  eine gleichförmig schwere Linie ist, hat man nur in der vorigen Formel  $n = \infty$  zu setzen, was für  $l \cos \alpha = HD = h'$ ,

$$h' = \frac{3g}{2w^2} = \frac{3}{2}h$$

giebt, so daß also auch in diesem Falle die Linie  $h'$  von der Länge der Linie  $l$  unabhängig ist.

Diese Eigenschaft der Schwerkraft läßt sich an einer gut construirten Centrifugalmaschine, wie sie in physicalischen Cabinetten vorkommen, leicht nachweisen, und bietet so eine nützliche Vervollständigung dieses Apparats dar.

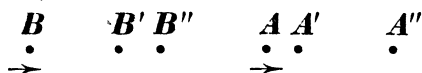
## VIII.

### Über die Gesetze des Stofses und die Ausflusgeschwindigkeit des Wassers aus kleinen Öffnungen.

Nachdem die Optik mit Hülfe der Undulationstheorie bereits einen hohen Grad von Ausbildung erlangt hat und daher die Ansicht über die Natur der Materie, welche dieser Theorie zum Grunde liegt, mehr und mehr bei den Physikern an Geltung gewinnt, scheint es angemessen, diese Theorie auch zur Erklärung möglichst vieler Thatsachen zu benutzen, um neue Prüfungsmittel für sie zu gewinnen und eine gröfsere Einheit in die Auffassungsweise physicalischer Erscheinungen zu bringen. Ich habe daher versucht, die Gesetze des *Stofses* zweier Massentheile und die Formel für die *Ausflusgeschwindigkeit* des Wassers aus kleinen Öffnungen durch die Molecularhypothese abzuleiten, und glaube, daß man diesen Bemühungen einige Aufmerksamkeit schenken werde, da ganz elementare Betrachtungs-Arten und Rechnungen zu Resultaten führen, zu denen man sonst nur auf ziemlich dunkeln Wegen gelangt.

Wir schliessen uns also hier an die bekannten Vorstellungen an, nach welchen ein Molecül ein *System* sehr vieler Atome und ein Körper eine Vereinigung sehr vieler Molecülen ist, die in Entfernungen von einander gehalten werden, in denen die größten Dimensionen eines solchen Atomensystems oder Molecüls außerordentlich oft enthalten sind. Diese Entfernungen von einander behalten die Molecülen durch den Einfluss der Elasticität, oder abstossender Kräfte; mit denen sie auch der Annäherung jedes störenden Körpers widerstehen.

Ich will nun zunächst die Wirkung zweier solcher Molecülen oder Körpertheile auf einander untersuchen, wenn das erste *A* aus *m* Atomen besteht und in gerader Linie mit der gleichförmigen Geschwindigkeit *g* fortschreitet, während es von einem zweiten *B* aus *μ* Atomen bestehend, in derselben Linie, mit der Geschwindigkeit *γ* verfolgt wird.



Ist *γ* größer als *g*, so wird die Entfernung *AB* der beiden Molecülen bis auf den Radius *A'B'* der Wirkungssphäre der Elasticität abnehmen. Einer weiteren Annäherung mögen sich darauf die *abstossenden* Kräfte der Atome widersetzen; und zwar so, daß jedes Atom einem andern, nach Verlauf einer Secunde, die Geschwindigkeit *α* mittheilt, also nach *t* Secunden die Geschwindigkeit *αt*. Da die Dimensionen der Körpertheile *A* und *B* gegen die Entfernung *A'B'* außerordentlich klein sind, so kann man annehmen, daß alle mit *gleichen* Kräften auf einander einwirken. Es werden daher die *m* Atome in *A'* jedem Atome in *B'*, also auch dem ganzen Molecüle, nach *t* Secunden die Geschwindigkeit *mat* ertheilen, und die *μ* Atome in *B'* dem Molecüle *A'* die Geschwindigkeit *μat*, wenn nämlich die Entfernung *A'B'* immer constant bleibt, oder sich nur unmerklich ändert. Findet aber das Spiel der abstossenden Kräfte nur sehr kurze Zeit Statt, so wird dieser Fall eintreten. Da nun *B'* eine größere Geschwindigkeit hat als *A'*, so nähern sich Anfangs beide Punkte einander, wodurch *B'* von seiner Geschwindigkeit verliert und *A'* beschleunigt wird. Wenn die sehr geringe Annäherung ihr Maximum erreicht hat, gehen beide Punkte mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, und diese Geschwindigkeit würden sie dauernd behalten, wenn durch irgend einen Einfluss, wie etwa durch Form-Änderung des Molecüls oder Atomensystems, die Wirkung der Elasticität gehemmt würde. Im Allgemeinen tritt aber dieser Fall nicht ein, sondern die Kräfte fahren fort zu wirken und vermindern noch ferner die Geschwindigkeit von *B'* und vermehren die des Molecüls *A'*. Dadurch wächst die

Entfernung zwischen  $A'$  und  $B'$  noch mehr, und wird zuletzt dem Radius der Wirkungssphäre der Atome wieder gleich; so dafs also, wenn unter dem Einflufs dieser Kräfte  $B'$  nach  $B''$  und  $A'$  nach  $A''$  gekommen ist, die Entfernung  $B''A''$  der  $B'A'$  gleich sein mufs. Da nun der Punct  $A''$  jetzt eine gröfsere Geschwindigkeit als  $B''$  hat, so treten beide Molecülen aus der Wirkungssphäre der Atome heraus und setzen jetzt wieder, wie vor dem Zusammentreffen, ihren Weg mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.

Nennt man  $g'$  die Geschwindigkeit des Molecüls  $A$  zur Zeit  $t$ , und  $\gamma'$  die des Molecüls  $B$  zu derselben Zeit, wobei  $t$  vom ersten Augenblicke des Zusammentreffens an gezählt wird, so hat man zur Bestimmung dieser Gröfsen die Gleichungen

$$(1.) \quad g' = g + \mu \alpha t \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma - m \alpha t.$$

Durchläuft während dieser Zeit das Molecül  $A$  den Raum  $r$  und das Molecül  $B$  den Raum  $\varrho$ , so ist

$$(2.) \quad r = gt + \frac{1}{2} \mu \alpha t^2 \quad \text{und} \quad \varrho = \gamma t - \frac{1}{2} m \alpha t^2,$$

oder auch

$$(3.) \quad 2r = (g' + g)t \quad \text{und} \quad 2\varrho = (\gamma' + \gamma)t;$$

denn offenbar gelten für die Bewegung der Puncte  $A$  und  $B$  die einfachen Gesetze des Falles schwerer Körper an der Oberfläche der Erde, da beide während der sehr kleinen Zeit  $t$  mit unveränderlichen Kräften auf einander einwirken.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle: zunächst den einfacheren, wenn die Elasticitätskräfte in ihrer Thätigkeit nicht gehemmt werden; und dann den zusammengesetzteren, wenn eine solche Hemmung erfolgt. Gewöhnlich verfährt man bei der Entwicklung der Gesetze des Stofses umgekehrt, untersucht zunächst den Stofs harter Körper und leitet aus dessen Gesetzen den Stofs elastischer Massen ab; indessen wird dieses Verfahren nur deshalb befolgt, weil man die Gesetze des Stofses harter Körper aus Annahmen ableitet, die sich aus der hier angenommenen Hypothese als Folgerungen ergeben.

Im *ersten* Falle also, wenn die Massen elastisch sind, und *bleiben*, müssen die Räume  $r$  und  $\varrho$  einander gleich werden, sobald die Endgeschwindigkeiten  $g'$  und  $\gamma'$  eintreten sollen; wie oben bereits bemerkt wurde. Man hat daher aus (3.) die Gleichung

$$(4.) \quad g' + g = \gamma' + \gamma.$$

Eliminiert man aber  $\alpha t$  aus (1.), so erhält man

$$(5.) \quad m(g' - g) = \mu(\gamma - \gamma'),$$

und aus diesen beiden Gleichungen:

$$(6.) \quad g' = g + \frac{2\mu(\gamma - g)}{\mu + m} \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma - \frac{2m(\gamma - g)}{\mu + m};$$

welches die bekannten Formeln für den *Stoßs elastischer Massen* sind.

Im *zweiten* Falle, wenn die Massen nach dem *Stoße* ihre Elasticität *verlieren*, gehen beide mit der Geschwindigkeit fort, die sie gemeinschaftlich besaßen, als die Entfernung zwischen ihnen möglichst klein geworden war, oder als der Unterschied der durchlaufenen Räume  $r$  und  $\varrho$  ein Maximum erreicht hatte. Es ist aber

$$\varrho - r = (\gamma - g)t - \frac{1}{2}(\mu + m)t^2,$$

und diese Gröfse wird ein Maximum, wenn

$$\gamma - g - (\mu + m)\alpha t = 0$$

oder

$$\alpha t = \frac{\gamma - g}{\mu + m}$$

ist. Durch diesen Werth von  $\alpha t$  nehmen die Endgeschwindigkeiten  $g'$  und  $\gamma'$  die gemeinsame Gröfse

$$G = \frac{\mu\gamma + mg}{\mu + m}$$

an. Da  $g'$  und  $\gamma'$  zu gleicher Zeit den Werth  $G$  erreichen, so folgt diese Gleichung auch schon unmittelbar aus den Gleichungen (1.), wenn man  $g' = \gamma' = G$  setzt und aus ihnen  $t$  eliminiert.

Dies ist der Ausdruck, den man für die Geschwindigkeit giebt, mit welcher zwei *harte* Massen  $m$  und  $\mu$ , die sich mit den Geschwindigkeiten  $g$  und  $\gamma$  verfolgen, nach dem *Stoße* fortschreiten. Gewöhnlich unterscheidet man bei der Entwicklung der Gesetze des *Stoßes*, mit scheinbarer Folgerichtigkeit, *absolut harte* Massen und *absolut elastische*, aber man sieht bei einigem Nachdenken leicht, dafs absolut harte Massen, d. h. solche, die aller Elasticitätskräfte beraubt wären, auch absolut unwirksam auf einander bleiben müßten; denn nach der gewöhnlichen Annahme über die Natur der Materie kann man durch die blofse Vorstellung, dafs sich eine Materie einer andern nähert, die ruhende auch nicht ein Haar breit aus ihrer Stelle bewegen.

Multiplicirt man (4. und 5.) mit einander, so erhält man

$$\mu(\gamma'^2 - \gamma^2) = m(g^2 - g'^2)$$

oder

$$(7.) \quad \mu\gamma'^2 + m\gamma^2 = \mu\gamma^2 + mg'^2;$$

welche Gleichung man den Satz von der *Erhaltung der lebendigen Kräfte* nach dem Stosse elastischer Massen nennt.

Ist  $\mu = m$ , so wird aus (3.)

$$(8.) \quad g' = \gamma \quad \text{und} \quad \gamma' = g,$$

also *vertauschen* gleiche *elastische* Massen ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

*Bewegt* sich die Masse  $m$  der Masse  $\mu$  *entgegen*, ist also  $g$  negativ, und ist ausserdem noch  $m$  ausserordentlich viel gröfser als  $\mu$ , so wird aus (3.)

$$g' = -g \quad \text{und} \quad \gamma' = 2g - \gamma.$$

*Ruht* aber die Masse  $m$  vor dem Stosse, ist also  $g = 0$ , so bleibt auch  $g' = 0$  und es wird

$$\gamma' = -\gamma.$$

Also springt die Masse  $\mu$  von  $m$  mit derselben Geschwindigkeit zurück, mit welcher sie diese Masse traf.

Die Gleichungen (3.) lassen sich auch so schreiben:

$$g' = \frac{\mu\gamma + mg}{\mu + m} + \frac{\mu(\gamma - g)}{\mu + m} \quad \text{und} \quad \gamma' = \frac{\mu\gamma + mg}{\mu + m} - \frac{m(\gamma - g)}{\mu + m}.$$

Ist nun  $g$  wieder negativ und

$$\mu\gamma = mg,$$

so wird

$$g' = g \quad \text{und} \quad \gamma' = -\gamma,$$

also springt auch in diesem Falle jede Masse von der andern mit derselben Geschwindigkeit zurück, die sie vor dem Stosse hatte.

Ganz so wie eine ausserordentlich grofse *ruhende* Masse  $m$  die Geschwindigkeit der Masse  $\mu$  vernichtete und ihr eine der anfänglichen gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit gab, wirken auch die beiden Massen  $m$  und  $\mu$  auf einander ein, wenn  $\mu\gamma = mg$  ist. Sind in diesem Falle die Massen hart, oder verlieren vielmehr nach dem Stosse ihre Elasticität, so kommen sie beide, wie die Gleichung (7.) ausdrückt, zur Ruhe, sobald sie sich getroffen haben. Das Product aus Masse in Geschwindigkeit, welches man gewöhnlich *Gröfse der Bewegung* nennt, ist also ganz geeignet, die Gröfse der Wirkung zweier bewegten Massen auf einander auszudrücken. Nach den Vorstellungen über die Natur der Materie, die jetzt die Mehrzahl der Physiker angenommen hat, ist noch niemals ein Atom mit einem andern in Berührung gekommen, und doch wird der Satz, das Product  $mg$  sei ein Maafs für die Gröfse

der Kraft, fast immer, im Widerstreit mit diesen Ansichten, ausgesprochen. Ich glaube, man wird den Satz hier folgerechter finden, als an andern Orten.

Die Formeln für den Stofs *unvollkommen elastischer* Massen lassen sich auf ganz ähnliche Weise ableiten.

$$\begin{array}{ccc} B & B' & B'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & A' & A'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Die Kraft, mit der die Atome  $A$  und  $B$  einander abstossen, sei Anfangs wieder  $\alpha$ , und wenn  $A$  nach  $A'$  und  $B$  nach  $B'$  gekommen ist, möge die grösste Annäherung zwischen beiden eingetreten und die Geschwindigkeit von  $A$  gleich  $g'$  und von  $B$  gleich  $\gamma'$  geworden sein, so dafs, wenn dies zur Zeit  $t$  geschehen ist, wieder die bereits aufgestellten Formeln

$$\begin{aligned} g' &= g + \mu \alpha t; & r &= g t + \frac{1}{2} \mu \alpha t^2, \\ \gamma' &= \gamma - m \alpha t; & \varrho &= \gamma t - \frac{1}{2} m \alpha t^2, \\ \varrho - r &= (\gamma - g) t - \frac{1}{2} (m + \mu) \alpha t^2 \end{aligned}$$

gelten. Für  $\alpha t = \frac{\gamma - g}{m + \mu}$  wird bekanntlich diese Differenz ein Maximum und erreicht für diesen Werth von  $t$  die Gröfse

$$\varrho - r = \frac{(\gamma - g)^2}{2\alpha(m + \mu)},$$

während die Geschwindigkeiten  $g'$  und  $\gamma'$  den gemeinsamen Werth

$$g' = \gamma' = \frac{m\gamma + \mu g}{m + \mu} = G$$

annehmen. Durch die Wirkung der Elasticitätskräfte möge nun aber die Anordnung der Atome in  $A$  und  $B$  so geändert worden sein, dafs die Molecülen jetzt auf einander mit der abstossenden Kraft  $\alpha'$  einwirken; welche Kraft während der Bewegung der Molecülen von  $A'$  nach  $A''$  und von  $B'$  nach  $B''$  thätig ist. Nennt man ihre Geschwindigkeiten in diesen Puncten  $g''$  und  $\gamma''$  und die während der Zeit  $\tau$  von ihnen durchlaufenen Räume  $r'$  und  $\varrho'$ , so erhält man zur Bestimmung dieser Gröfsen die Gleichungen

$$\begin{aligned} g'' &= G + \mu \alpha' \tau; & r' &= G \tau + \frac{1}{2} \mu \alpha' \tau^2, \\ \gamma'' &= G - m \alpha' \tau; & \varrho' &= G \tau - \frac{1}{2} m \alpha' \tau^2. \end{aligned}$$

Wenn

$$r + r' = \varrho + \varrho' \quad \text{oder} \quad \varrho - r = r' - \varrho'$$

geworden ist, so hören die Wirkungen der Elasticitätskräfte wieder auf, da jetzt  $A$  und  $B$  wieder in einer Entfernung von einander sich befinden, die dem Radius der Wirkungssphäre der abstossenden Kräfte gleich ist, der durch den Über-

gang von  $\alpha$  und  $\alpha'$  nicht merklich geändert wurde. Setzt man nun die Werthe von  $\rho - r$  und  $r' - \rho'$  einander wirklich gleich, so erhält man

$$\frac{1}{2}(m + \mu) \alpha' \tau^2 = \frac{(\gamma - g)^2}{2\alpha(m + \mu)},$$

also

$$\alpha' \tau = \frac{\gamma - g}{m + \mu} \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}.$$

Mit Hülfe dieses Werths von  $\tau$  findet man für die Geschwindigkeiten:

$$g'' = g + \frac{\mu(\gamma - g)}{m + \mu} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}\right),$$

$$\gamma'' = \gamma - \frac{m(\gamma - g)}{m + \mu} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}\right).$$

Diese Formeln für die Endgeschwindigkeiten unvollkommen elastischer Massentheile sind die bekannten, an andern Orten auf ganz anderem Wege gefundenen Ausdrücke. Für  $\alpha' = \alpha$  erhält man aus ihnen die Formeln für den Stofs *vollkommen elastischer* Massen, und für  $\alpha' = 0$  die für den Stofs *harter* Körper.

Wir wollen jetzt noch den Einfluss von  $n$  Molecülen

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_n$$

aufeinander untersuchen, die, entsprechend, aus

$$m_1, m_2, m_3, \dots m_n$$

Atomen bestehen und einander auf einer geraden Linie mit den Geschwindigkeiten

$$g_1, g_2, g_3, \dots g_n$$

verfolgen, während sie sich wechselseitig mit den Elasticitätskräften

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_{n-1}$$

abstoßen, sobald sie in die Wirkungssphäre dieser Kräfte eingetreten sind.

Wir müssen hierbei offenbar annehmen, daß, wenn die Geschwindigkeiten von der Linken zur Rechten gerichtet sind,  $g_1 > g_2 > g_3 \dots > g_n$  ist und die Molecülen sämmtlich zu gleicher Zeit sich einander bis auf den Radius der Wirkungssphären der abstossenden Kräfte genähert haben. Nennt man dann

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n$$

die Geschwindigkeiten, welche die Molecülen besitzen, nachdem  $t$  Secunden lang die benachbarten auf einander eingewirkt haben, und bezeichnet mit

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_n$$

die von ihnen in dieser Zeit durchlaufenen Räume, so hat man zur Bestim-



und daher verwandelt sich jetzt (11.) in

$$(14.) \quad \gamma_1 + g_1 = \gamma_2 + g_2 = \gamma_3 + g_3 = \cdots = \gamma_n + g_n = \frac{2\Sigma mg}{\Sigma m};$$

durch welche Gleichungen die Geschwindigkeiten, welche die Molecülen nach dem Stosse annehmen, sämmtlich gefunden werden können. Aus den Gleichungen (9.) ergiebt sich, auf dieselbe Weise wie (12.), auch

$$(15.) \quad \Sigma m\gamma = \Sigma mg$$

oder

$$m_1(\gamma_1 - g_1) + m_2(\gamma_2 - g_2) + m_3(\gamma_3 - g_3) + \cdots + m_n(\gamma_n - g_n) = 0.$$

Multiplicirt man die Coëfficienten von  $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$  dieser Gleichung entsprechend mit den einzelnen Werthen von  $\frac{2\Sigma mg}{\Sigma m}$  aus (14.), so erhält man

$$m_1(\gamma_1^2 - g_1^2) + m_2(\gamma_2^2 - g_2^2) + m_3(\gamma_3^2 - g_3^2) + \cdots + m_n(\gamma_n^2 - g_n^2) = 0$$

oder

$$(16.) \quad \Sigma m\gamma^2 = \Sigma mg^2;$$

so dafs also der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte auch für den simultanen Stofs beliebig vieler Massen-Elemente gilt.

Hört die Thätigkeit der Elasticitätskräfte auf, sobald alle Massen die gleiche Geschwindigkeit angenommen haben, oder  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_n = \gamma$  geworden ist, so erhält man aus (15.) sogleich für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, welche alle nach dem Stosse erlangen:

$$(17.) \quad \gamma = \frac{\Sigma mg}{\Sigma m}.$$

In diesem Falle ist wieder der Unterschied zweier von benachbarten Molecülen durchlaufener Räume ein Maximum; oder das ganze System hat die grösste Zusammendrückung erfahren; denn z. B. aus (10.) ergiebt sich

$$r_1 - r_2 = (g_1 - g_2)t - \frac{1}{2}(m_2\alpha_1 + m_1\alpha_1 - m_3\alpha_2)t^2,$$

welche Differenz für

$$0 = g_1 - g_2 - (m_2\alpha_1 + m_1\alpha_1 - m_3\alpha_2)t$$

ein Maximum wird. Dieselbe Gleichung folgt aber auch aus (9.), wenn man  $\gamma_1 = \gamma_2$  setzt.

Theilt man die Molecülen  $A_1, A_2, \dots A_n$  in mehrere Gruppen

$$A_1, \dots A_a; \quad A_{a+1}, \dots A_b; \quad A_{b+1}, \dots A_c; \quad \dots$$

und nimmt an, dafs sämmtliche Molecülen einer jeden Gruppe gleiche Geschwin-

digkeit haben, so läßt sich ein solches System als eine Reihe von linearen Körpern betrachten, die sämmtlich zu gleicher Zeit auf einander stoßen. Wenn nun diese Körper nach dem Stosse nicht zerreißen sollen, so würde es genügen, anzunehmen, daß alle ihre Theile nach dem Stosse wieder gleiche Geschwindigkeit haben; aber in diesem Falle, wo in den Gleichungen (9.) verschiedene der mit  $\gamma$  bezeichneten Größen einander gleich gesetzt werden müssen und auch die entsprechenden  $g$  einander gleich sind, ergeben sich aus (9. und 10.) Bedingungsgleichungen, die nur in speciellen Fällen befriedigt werden können. Die Formeln (14. und 17.) bestimmen zwar auch in diesem Falle die gesuchten Geschwindigkeiten der Körper *nach* dem Stosse, aber die Resultate werden durch die Beobachtung nicht vollständig bestätigt; wie es auch der Natur der Sache nach nicht anders sein kann. Denn, nimmt man z. B. alle Massen, außer der ersten stoßenden, ruhend und von gleicher GröÙe an, so lehren die Formeln nicht etwa, daß nach dem Stosse alle Massen zur Ruhe kommen und die letzte sich von ihnen mit der Geschwindigkeit der stoßenden trennt, wie es doch die Erfahrung zu bestätigen scheint, sondern alle ruhenden wirken gegen die stoßende, wie eine einzige zusammenhängende Masse. Es wäre in der That auch seltsam, wenn sich ein Unterschied zwischen der Einwirkung der einzelnen Theile eines Körpers und zwei sich berührender Körper aus Formeln ergäbe, die einen solchen Unterschied gar nicht in Rechnung gebracht haben. Die gewöhnlichen und bekannten Reflexionen und elementaren Rechnungen über den Stoß der Körper lehren weiter nichts, als Das, was wir über den Stoß der Molecülen mitgetheilt haben; nur mit etwas weniger Klarheit; und Niemand wird sich durch das Raisonnement überzeugt finden, welches z. B. *Poisson* im zweiten Bande seiner Mechanik (pag. 32) anstellt, um die oben angeführte Erscheinung zu erklären; die aber bekanntlich leicht erklärlich ist, wenn die stoßenden Massen durch kleine Zwischenräume von einander getrennt sind.

Ich werde nun noch ganz kurz andeuten, wie sich durch die Anwendung der oben benutzten Hypothesen die *Ausflußweise des Wassers* aus sehr kleinen Öffnungen im Boden eines Wasserbehälters leicht erklären läßt.

Stellen wir uns zu diesem Zwecke auf der geraden Linie *Am* (Fig. 6.) die Molecülen  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ , ... vertheilt vor, wo sie auf irgend eine Weise, etwa durch den Druck des Äthers und die Wirkung der zwischen ihnen thätigen Elasticitätskräfte, festgehalten werden. Sobald auf diese Molecülen die Schwerkraft in der Richtung von *A* nach *m* wirkt und *m* festgehalten wird,

nähern sie sich einander, und zwar so, daß sich die Zwischenräume

$$l, l_1, l_2, \dots \text{ in } \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

verwandeln und die Molecülen  $m, m_1, m_2, \dots$  in die Lagen  $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$  kommen. Bezeichnet man nun die Schwerkraft, d. h. den Zuwachs an Geschwindigkeit, den ein fallender Körper in jeder Zeitsecunde erlangt, durch  $g$ , und die zwischen  $\mu$  und  $\mu_1$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$ , ... thätigen Elasticitätskräfte durch  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ ; ferner die Strecken  $Am, Am_1, Am_2, \dots$  durch  $h, h_1, h_2, \dots$ , so ist es naturgemäß, anzunehmen, daß sich die Veränderungen, welche die Strecken  $l, l_1, l_2, \dots$  erfahren haben, zu ihren Entfernungen von  $A$ , wie die Schwerkraft zu den zwischen ihnen thätigen Elasticitätskräften verhalten, oder daß folgende Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$\frac{l - \lambda}{h} = \frac{g}{\varepsilon},$$

$$\frac{l_1 - \lambda_1}{h_1} = \frac{g}{\varepsilon_1},$$

$$\frac{l_2 - \lambda_2}{h_2} = \frac{g}{\varepsilon_2},$$

.....

Wird jetzt das Molecül  $\mu$  freigelassen, so fängt es an, zu fallen, und die über ihm befindlichen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  folgen ihm nach. Nach  $t$  Secunden mögen die Geschwindigkeiten dieser Molecülen  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  und die von ihnen durchlaufenen Räume  $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots$  sein. Man hat dann offenbar zur Bestimmung dieser Größen folgende Gleichungen:

$$\gamma = (g + \varepsilon)t \quad \varrho = \frac{1}{2}(g + \varepsilon)t^2,$$

$$\gamma_1 = (g + \varepsilon_1 - \varepsilon)t \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \frac{1}{2}(g + \varepsilon_1 - \varepsilon)t^2,$$

$$\gamma_2 = (g + \varepsilon_2 - \varepsilon_1)t \quad \varrho_2 = \frac{1}{2}(g + \varepsilon_2 - \varepsilon_1)t^2,$$

.....

Sobald der Unterschied der von  $\mu$  und  $\mu_1$  durchlaufenen Räume gleich  $l - \lambda$  geworden ist, so ist  $\mu$  wieder in die ursprüngliche Entfernung  $l$  von  $\mu_1$  getreten, beide Molecülen hören auf, auf einander zu wirken, und  $\mu$  fällt nur durch die Einwirkung der Schwere weiter. Es ist aber

$$\varrho - \varrho_1 = \frac{1}{2}(2\varepsilon - \varepsilon_1)t^2$$

$$\text{und} \quad l - \lambda = \frac{gh}{\varepsilon}.$$

Setzt man also  $\varphi - \varphi_1 = l - \lambda$  und erwägt, daß  $2\varepsilon - \varepsilon_1$  nicht merklich von  $\varepsilon$  verschieden sein kann, so erhält man

$$t = \frac{\sqrt{(2gh)}}{\varepsilon},$$

also

$$\gamma = \frac{g + \varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{(2gh)}.$$

Offenbar sind aber die Elasticitätskräfte außerordentlich viel größer als die Schwerkraft, so daß man  $g$  gegen  $\varepsilon$  vernachlässigen kann; also gelangt man zu dem *Torricellischen* Lehrsatz

$$\gamma = \sqrt{(2gh)}.$$

Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgehen, daß diese Ableitung des wichtigen Satzes auf klar ausgesprochenen Hypothesen beruht, während er in den Lehrbüchern, selbst namhafter Physiker, auf eine Art bewiesen wird, die mindestens äußerst dunkel zu nennen sein dürfte.

Berlin im December 1852.

## IX.

### Über den Schwerpunkt sphärischer Figuren.

Nimmt man die Kanten einer dreiseitigen Ecke, deren Ebenenwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  und die gegenüberliegenden Kantenwinkel  $a, b, c$  sind, zu Axen schiefwinkliger Coordinaten  $x, y, z$ , und setzt

$$\begin{aligned} (\Delta y \Delta^2 z - \Delta z \Delta^2 y) \sin a &= X; & (\Delta z \Delta^2 x - \Delta x \Delta^2 z) \sin b &= Y; \\ (\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x) \sin c &= Z, \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{1}{2} \sqrt{[X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ \cos \alpha - ZX \cos \beta - XY \cos \gamma]}$$

der Flächen-Inhalt eines Dreiecks, von welchem  $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  die Coordinaten der Ecken sind. Der Inhalt  $D$  eines Theils einer krummen Oberfläche kann so auf die mannigfachste Weise, z. B. durch folgende leicht verständliche Formel ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} D = \iint \partial x \partial y \sqrt{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sin^2 a + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sin^2 b - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \sin a \sin b \cos \gamma \right.} \\ \left. + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \sin a \sin c \cos \beta + 2 \frac{\partial z}{\partial y} \sin b \sin c \cos \alpha + \sin^2 c\right]}. \end{aligned}$$

Für dieses Coordinatensystem ist die Gleichung einer Kugel vom Radius  $r$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos a + 2zx \cos b + 2xy \cos c = r^2,$$

und der Inhalt  $D$  irgend einer sphärischen Figur auf dieser Kugel wird dann durch das Integral

$$D = r\theta \iint \frac{\partial x \partial y}{x \cos b + y \cos a + z}$$

ausgedrückt; wo

$$\sqrt{[1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c]}$$

durch  $\theta$  bezeichnet worden ist.

Sind nun  $u, v, w$  die Coordinaten des Schwerpunkts der sphärischen Figur  $D$ , so ist

$$\begin{aligned} Du &= r\theta \iint \frac{x \partial x \partial y}{x \cos b + y \cos a + z}; & Dv &= r\theta \iint \frac{y \partial x \partial y}{x \cos b + y \cos a + z}; \\ Dw &= r\theta \iint \frac{z \partial x \partial y}{x \cos b + y \cos a + z}, \end{aligned}$$

folglich

$$D(u \cos b + v \cos a + w) = r\theta \iint \partial x \partial y.$$

Es ist aber

$$\sin c \iint \partial x \partial y = C$$

die *schiefwinklige* Projection der Figur  $D$  auf die Ebene der  $xy$ ; daher wird

$$u \cos b + v \cos a + w = \frac{rC}{D \sin c}.$$

Errichtet man im Anfangspuncte 0 der Coordinaten  $x, y, z$ , auf der Ebene der  $yz, zx, xy$ , senkrechte Axen  $OX', OY', OZ'$ , d. h. construirt zu der ersten Ecke die *Polar-Ecke*; und bilden deren Kanten mit den Axen der  $x, y, z$ , entsprechend, die Winkel  $a, b', c'$ , so ist bekanntlich

$$\theta = \sin a \cos a' = \sin b \cos b' = \sin c \cos c'.$$

Daher ist die Seite rechts in der vorigen Gleichung:

$$= \frac{rC}{D} \cos c'.$$

Bezeichnet man noch mit  $A$  und  $B$  die schiefwinkligen Projectionen von  $D$  auf die Ebenen der  $yz$  und  $zx$  und setzt

$$(1.) \quad x' = \frac{rA}{D}, \quad y' = \frac{rB}{D}, \quad z' = \frac{rC}{D},$$

so erhält man offenbar zur Bestimmung der Coordinaten  $u, v, w$  des Schwerpunkts der Figur  $D$ , durch gehörige Buchstabenvertauschung, die drei Gleichungen:

$$(2.) \quad \begin{cases} u + v \cos c + w \cos b = x' \cos a', \\ u \cos c + v + w \cos a = y' \cos b', \\ u \cos b + v \cos a + w = z' \cos c'. \end{cases}$$

Stellt man sich jetzt durch den Schwerpunkt eine Ebene gelegt vor, welche der Ebene  $Y'OX'$  der Polar-Ecke parallel läuft, also auf der Axe  $OX$  senkrecht steht, so schneidet diese Ebene auf der Axe  $OX$  eine Strecke ab, welche als die *senkrechte* Projection der Coordinaten  $u, v, w$  auf diese Axe angesehen werden kann, mithin  $u + v \cos c + w \cos b$  ist. Auf der Axe  $OX'$  schneidet die Ebene aber ein Stück ab, welches mit dem Cosinus des Winkels  $a'$ , den die Axen  $OX$  und  $OX'$  mit einander machen, multiplicirt werden muß, um seine Projection auf  $OX$  zu finden: daher ist das auf der Axe  $OX'$  bestimmte Stück gleich  $x'$ ; wie sich aus der ersten der Gleichungen (2.) sogleich ergibt. Die Gleichungen (2.) lehren also offenbar, daß  $x', y', z'$  die *schiefwinkligen* Coordinaten des Schwerpunkts sind, wenn die Kanten der Polar-Ecke zu Coordinaten-Axen genommen werden. Da diese Kanten bekanntlich mit einander die Winkel  $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$  machen, so findet man durch die Projection der Coordinaten des Schwerpunkts auf die Axen  $OX', OY', OZ'$  sogleich:

$$(3.) \quad \begin{cases} +x' - y' \cos \gamma + z' \cos \beta = u \cos a', \\ -x' \cos \gamma + y' - z' \cos \alpha = v \cos b', \\ -x' \cos \beta - y' \cos \alpha + z' = w \cos c'. \end{cases}$$

Die Entfernung  $\varrho$  des Schwerpunkts vom Mittelpunkte  $O$  der Kugel ist demnach:

$$\varrho = \frac{r}{D} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha - 2CA \cos \beta - 2AB \cos \gamma}.$$

Schneidet man auf den Kanten  $OX, OY, OZ$  die Strecken

$$x' \cos a' = \frac{rA \sin b \cos \gamma}{D}; \quad y' \cos b' = \frac{rB \sin c \cos \alpha}{D}; \quad z' \cos c' = \frac{rC \sin a \cos \beta}{D}$$

ab und legt durch deren Endpunkte Ebenen, welche senkrecht auf diesen Kanten stehen, so liegt der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser Ebenen im Schwerpunkte. Da also diese Strecken die senkrechten Projectionen von  $\varrho$  auf die Kanten darstellen, so braucht man jene nur durch  $\varrho$  zu dividiren, um die Cosinus der Winkel zu finden, welche  $\varrho$  mit den Kanten bildet.

Das Resultat dieser Untersuchung ist also folgendes:

Man stelle sich unter  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  die drei Kanten einer dreiseitigen Ecke vor, deren Spitze  $O$  den Mittelpunkt einer Kugel vom Radius  $r$  einnimmt, auf welcher eine sphärische Figur gezeichnet ist, die den Inhalt  $D$  hat. Die Inhalte der *schiefwinkligen* Projectionen der Figur  $D$  auf die Ebenen  $YOZ$ ,  $ZOX$ ,  $XOY$  mögen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sein. Construiert man nun zu dieser Ecke die *Polar-Ecke*, deren auf den bezeichneten Ebenen senkrechte Kanten  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  sind, und bestimmt auf diesen Kanten durch die Proportionen

$$D : A = r : x',$$

$$D : B = r : y',$$

$$D : C = r : z'$$

die Strecken  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , so bilden dieselben die *schiefwinkligen* Coordinaten des *Schwerpunkts* der Figur  $D$ , wenn man die bezeichneten Kanten der Polar-Ecke zu Coordinaten-Axen nimmt.

Soll demnach z. B. der Schwerpunkt eines sphärischen Dreiecks  $D$ , welches die Seiten  $ra$ ,  $rb$ ,  $rc$  hat, gefunden werden, so darf man für die erwähnten schiefwinkligen Projectionen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  des Dreiecks  $D$  nur die Kreis-Ausschnitte

$$A = \frac{1}{2}r^2a; \quad B = \frac{1}{2}r^2b; \quad C = \frac{1}{2}r^2c$$

nehmen, wodurch sich die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks  $D$  auf die Kanten der Polar-Ecke als

$$x' = \frac{ar^3}{2D}; \quad y' = \frac{br^3}{2D}; \quad z' = \frac{cr^3}{2D}$$

ergeben. Aus (3.) erhält man dann die Coordinaten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des Schwerpunkts in Bezug auf die Axen welche durch die Ecken des Dreiecks gelegt sind.

Die hier benutzten Vorstellungen lassen sich auch in anderen Fällen anwenden; wie ich es später in diesen Miscellen nachweisen werde.

Berlin im Januar 1853.