Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes.

Von

M. Dehn in Münster i/W.

Inhalt.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden sowohl der dreidimensionale Raum im allgemeinen (Kapitel III) als auch (Kapitel II) die in dem gewöhnlichen (d. i. hypersphärischen) Raum laufenden geschlossenen Kurven (*Knoten*) topologisch untersucht. Vorangestellt sind (Kapitel I) für diese Erörterungen notwendige allgemeine Untersuchungen. Und zwar werden in § 1 Gruppen diskreter Operationen betrachtet, nämlich diejenigen, die gebildet werden durch eine *endliche* Anzahl erzeugender Operationen, zwischen denen eine *endliche* Anzahl Relationen gegeben sind.

Für eine solche Gruppe wird ein Bild konstruiert, nämlich ein regulärer Streckenkomplex, dessen Konstruktion im Gegensatz zu den sonstigen Darstellungen allgemeiner unendlicher Gruppen wichtige auf die Gruppe bezügliche Probleme erledigt. Dementsprechend ist diese Konstruktion auch mit Schwierigkeiten verbunden. Gruppenbilder werden im Laufe der Arbeit sowohl für bekannte (S. 145) als auch bisher wohl noch unbekannte (S. 159) endliche und unendliche Gruppen gegeben. Sie hängen alle eng zusammen mit regulären Einteilungen der Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Ebene.

Im § 2 folgt die Konstruktion der zu einem beliebigen Flächenkomplex gehörigen Fundamentalgruppe. Durch das Gruppenbild wird so jedem Flächenkomplex ein im allgemeinen unendlicher regulärer Streckenkomplex zugeordnet. Dieser ist für den Fall geschlossener zweiseitiger Flächen als reguläres Netz in der hyperbolischen Ebene mit $4n$-seitigen Maschen, die zu je $4n$ in einem Punkt zusammenstoßen, bekannt.

Im § 3 wird ein allgemeiner Satz über Flächenkomplexe abgeleitet, das „Lemma", das in den weiteren Untersuchungen oft gebraucht wird. Es ist die 2-dimensionale Verallgemeinerung des (trivialen) Satzes, daß man zwei Punkte eines Streckenkomplexes durch einen singularitätenfreien Streckenzug verbinden kann.

In Kapitel II wird zunächst die Definition des Knotens erledigt (§ 1), in § 2 der den Knoten umgebende Schlauch eingeführt. Im § 3 wird die Fundamentalgruppe des Knotens konstruiert, deren Definition sich unmittelbar in der einfachsten Weise aus der ebenen Projektion des Knotens ablesen läßt. *Ist diese Gruppe abelsch, so ist die gegebene Kurve unverknotet* (§ 4, Satz 2). Es wird ferner durch den Satz 1 eine Methode angegeben, wie man die Entscheidung, ob eine Kurve verknotet ist oder nicht, durch die Konstruktion des Bildes der Fundamentalgruppe des Knotens erledigt.

Im § 5 werden spezielle Knoten und zwar die Kleeblattschlinge und ihr verwandte Knoten behandelt. Es werden die zugehörigen Gruppenbilder konstruiert und ferner aus ihnen *Poincarésche Räume* abgeleitet, d. i. solche dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, die, ohne Torsion und mit einfachem Zusammenhang, doch nicht mit dem gewöhnlichen Raum homöomorph sind. Der einfachste hier gefundene hat eine endliche Fundamentalgruppe und zwar die Ikosaedergruppe mit Spiegelung. Die anderen haben unendliche Gruppen. Für alle werden die Gruppenbilder aufgestellt; diese erledigen die Frage, ob eine gegebene Kurve der betreffenden Mannigfaltigkeit auf einen Punkt zusammenziehbar ist oder nicht. Diese Frage war bisher noch für keine solche Mannigfaltigkeit gelöst, auch wußte man nichts über Endlichkeit oder Unendlichkeit der zugehörigen Fundamentalgruppen. Die Resultate haben noch den besonderen Wert, daß sie eine sehr einfache Methode liefern, um unendlich viele Poincarésche Räume zu konstruieren, von denen der Entdecker nur einen einzigen auf komplizierte Weise konstruiert hat*).

Im § 1 des Kapitels III werden verschiedene übersichtliche Erzeugungsweisen der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit gegeben. So werden zum Beispiel alle zweiseitigen Mannigfaltigkeiten durch eine geschlossene, zweiseitige Fläche in zwei Stücke zerlegt, die dem einfachsten von einer solchen Fläche im gewöhnlichen Raum begrenzten Raumteil homöomorph sind. Diese Erzeugungsweisen liefern auch die Konstruktion der Fundamentalgruppe der gegebenen Mannigfaltigkeit.

Der § 2 geht etwas auf das wichtige Problem der topologischen Charakterisierung des gewöhnlichen Raumes ein, ohne doch das Problem zur Erledigung zu bringen. Es handelt sich um die Frage, wie der gewöhnliche Raum durch die Eigenschaften seiner geschlossenen Kurven topologisch zu definieren ist, um damit dann die Entscheidung zu ermöglichen, ob ein gegebener Raum mit dem gewöhnlichen Raum homöomorph ist oder nicht. Was die Geschichte dieses Problems angeht, so hatte zuerst Heegaard (Diss. Kopenhagen 1898) und sodann Poincaré (Pal. Rend. Bd. 13 u. Lond. M. S. Bd. 32) darauf hingewiesen, daß es zur Charakterisierung des gewönlichen Raumes nicht genügt, vorauszusetzen, daß jede Kurve, eventuell mehrfach durchlaufen, begrenzt. Und zwar zeigen dies die Mannigfaltigkeiten mit *Torsion.* Sodann hat Poincaré Pal. Rend. 1904 durch Konstruktion eines „Poincaréschen Raumes" (s. oben) bewiesen, daß es ebenfalls nicht genügt, vorauszusetzen, daß jede Kurve einmal durchlaufen begrenzt.

Es liegt nun nahe, zu untersuchen, ob es nicht genügt vorauszusetzen, daß jede Kurve des Raumes ein Elementarflächenstück begrenzt. Dies wird auch am Ende der Poincaréschen Arbeit angedeutet. Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Reduktion des Problems scheint aber noch nicht direkt zur Lösung führen zu können. Es dürfte eine tiefere Untersuchung der bekannten Fundamentalgruppen für zweiseitige geschlossene Flächen nicht zu umgehen sein.

---

*) s. a. Dehn, D. Math. Ver. 1907, S. 573.

Kapitel I.

Vorstudien.

§ 1.

Gruppentheoretische Hilfsmittel (das Gruppenbild).

In der Topologie wird man häufig auf Probleme der folgenden Form geführt:

Gegeben sei eine endliche Reihe von Operationen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ als *erzeugende Operationen* einer Gruppe. Die Gruppe G sei dadurch vollständig bestimmt, daß zwischen den erzeugenden Operationen eine endliche Anzahl von *Relationen* bestehen, etwa von der Form

$$A \begin{cases} \prod_i a_{k_i^{(1)}}^{\varepsilon_i^{(1)}} = S_1 = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \prod_i a_{k_i^{(m)}}^{\varepsilon_i^{(m)}} = S_m = 1 \end{cases} \qquad \left(\varepsilon_i^{(l)} = +1 \text{ oder } -1\right).$$

Die Gruppe G kann in der Tat durch A vollständig bestimmt werden. Denn sind zwei Operationen S und T der Gruppe durch ihre Zusammensetzung aus den a_i gegeben, so ist es vollständig bestimmt, ob die Relation $S = T$ aus den Relationen A folgt oder nicht, d. i. ob in der Gruppe, mit den erzeugenden Operationen a_i und den Relationen A, $S = T$ sein muß oder nicht.

Unsere Probleme lauten nun so:

1) Es wird eine Methode gesucht, um in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob zwei durch ihre Zusammensetzung aus den a_i gegebene Operationen von G gleich sind oder nicht, speziell, ob eine solche Operation gleich der Identität ist.

2) Es wird eine Methode gesucht, um in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob es zu zwei gegebenen Substitutionen S und T von G eine dritte U gibt, sodaß

$$S = UTU^{-1},$$

d. i. ob S vermöge A sich als Transformation von T erweist.

Diese beiden Probleme sind vollständig gelöst für die speziellen Gruppen G_p, die folgendermaßen gegeben sind:

$$G_p \begin{cases} \text{erzeugende Operationen } a_1, b_1, \cdots, a_p, b_p, \\ \text{Relation:} \\ \qquad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1\,. \end{cases}$$

G_p ist nichts anderes als die *Fundamentalgruppe der Kurven auf einer zweiseitigen Fläche* F_p vom Geschlecht p. Unsere Probleme sind hier äquivalent mit dem Problem: wann sind zwei geschlossene Kurven auf F_p ineinander reduzierbar (mit oder ohne Festhaltung eines Punktes)? Die Lösung wird erzielt durch eine Abbildung der G_p auf ein reguläres Netz der hyperbolischen Ebene. Wir werden versuchen, die Lösung des allgemeinen Problems durch eine Verallgemeinerung dieser Abbildung anzubahnen.

Wir konstruieren den folgenden zur Gruppe G gehörenden Streckenkomplex C_1^G. Sei etwa:

$$S_1 \equiv a_{k_1}^{\varepsilon_1} a_{k_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{k_l}^{\varepsilon_l},$$

so legen wir durch einen Punkt Z einen Kreis (geschlossene Kurve) K^1 mit l Eckpunkten $Z, P_1, \cdots, P_{l-1}$ und bezeichnen ZP_1 mit $+a_{k_1}$ oder $-a_{k_1}$, P_1P_2 mit $+a_{k_2}$ oder $-a_{k_2}$ etc., je nachdem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ gleich $+1$ oder -1 ist. Sodann legen wir durch Z einen zweiten Kreis K^2, dessen Strecken, der Reihe nach von Z ausgehend durchlaufen, im Durchlaufungssinn mit $+a_{k_2}$ oder $-a_{k_2}, \cdots, +a_{k_l}$ oder $-a_{k_l}$ bezeichnet werden. (Über die Vorzeichen entscheidet wieder der Wert ε_i.) In dieser Weise fahren wir fort, bis wir alle zyklischen Transformationen von S_1 erschöpft haben. Es werden dann also l Kreise an Z hängen, deren Strecken, in bestimmtem Sinn durchlaufen, die angegebene Bezeichnung erhalten haben. In umgekehrtem Sinn durchlaufen werden sie, wie immer, diese Bezeichnung mit umgekehrtem Vorzeichen erhalten. Gehen nun von Z zwei solche Strecken ZP und ZQ aus, die, von Z nach P resp. Q durchlaufen, die gleiche Bezeichnung tragen, so wollen wir P und Q, sowie die Strecken ZP und ZQ zusammenfallen lassen und mit diesem Prozeß so lange fortfahren, bis von Z nur noch verschieden benannte Strecken ausgehen. Denselben Prozeß wollen wir auch für die anderen Punkte der Kreise ausführen, und damit so lange fortfahren, bis von jedem Punkte nur noch verschieden benannte Strecken ausgehen. Wir wollen den so konstruierten Streckenkomplex $\overline{C}_1{}^1$ und Z sein Zentrum nennen.

Wir wollen nun folgende Eigenschaften von $\overline{C}_1{}^1$ nachweisen: Besteht eine geschlossene Kurve von $\overline{C}_1{}^1$, in bestimmter Reihenfolge durchlaufen, aus den Strecken $d_1, d_2, \cdots, d_q$ (die alle gleich $\pm a_i$ sind), dann ist die Operation $d_1 d_2 \cdots d_q$ vermöge der Relation $S_1 = 1$ ebenfalls gleich 1: sie entsteht aus der Operation S_1 durch Transformation und Komposition.

In der Tat: unsere Behauptung ist richtig im Anfangszustand des C_1, wo alle geschlossenen Kurven des Komplexes durch Z gehen und sich zusammensetzen aus Kurven von der Form:

$$S_1, \; a_{k_1}^{-\varepsilon_1} S_1 a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \; a_{k_2}^{-\varepsilon_2} a_{k_1}^{-\varepsilon_1} S_1 a_{k_1}^{\varepsilon_1} a_{k_2}^{\varepsilon_2} \text{ usw.}$$

Aber jeder geschlossene Streckenweg, dessen Anfangs- und Endpunkt Z ist, wird dargestellt durch eine Komposition dieser Ausdrücke. Jede andere Wahl des Anfangspunktes aber ist durch zyklische Vertauschung, und diese wieder durch Transformation zu erreichen. Wir müssen jetzt uns überzeugen, daß durch das Zusammenfallenlassen zweier Strecken, die von einem Punkt ausgehen, diese Eigenschaft nicht verloren gehen kann. Sei nun $d = PQ = PR$ eine solche Strecke, so können wir annehmen, daß die zu untersuchende Kurve durch Q hindurchgeht; denn alle anderen geschlossenen Kurven waren ja auch schon vor der Änderung geschlossen und haben nach Voraussetzung die behauptete Eigenschaft. Möge also K eine geschlossene Kurve sein, die durch Q hindurchgeht. Dann war die Kurve $k' = dkd^{-1}$ schon vor der Änderung geschlossen, und da sie nach Annahme aus S_1 durch Transformation und Komposition hervorgeht, so ist dasselbe mit k selbst der Fall, die ja eine Transformierte von k' ist.

Wir führen nun nacheinander die anderen Relationen $S_2, \cdots, S_m$ ein, wobei wir annehmen können, daß jede erzeugende Operation a_i mindestens in einer von ihnen oder in S_1 vorkommt. Andernfalls fügen wir zu A, ohne daß dadurch die Gruppe geändert würde, die triviale Relation $a_i a_i^{-1} = 1$ hinzu. Wir wenden nun wieder den oben beschriebenen Prozeß so lange an, bis wir zu einem Komplex C_1^1 kommen, bei dem von keinem Punkte zwei gleich bezeichnete Strecken ausgehen und von Z jede der Seiten $a_1 \cdots a_n$, $a_1^{-1} \cdots a_n^{-1}$ ausgeht.

Es ist vollständig bestimmt, welche von den Kurven S_1, $a_{k_1}^{-\varepsilon_1} S_1 a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \cdots, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ durch einen Punkt P von C_1^1 als Anfangspunkt hindurchgehen. Wir fügen nun zu C_1^1 so viel Kreise, die am Punkte P hängen, dergestalt bezeichnet hinzu, daß nun von P zusammen mit den schon vorhin vorhandenen Kurven alle Kurven der Gesamtheit S_1, $a_{k_1}^{-\varepsilon_1} S_1 a_{k_1}^{\varepsilon_2}, \cdots, S_n, \cdots$ ausgehen. Dasselbe machen wir mit allen Punkten von C_1^1. Ändern wir nun den entstehenden Komplex durch Zusammenfallenlassen von Seiten mit einem gemeinsamen Punkt derart ab, daß von keinem Punkte des Komplexes zwei voneinander verschiedene, gleich bezeichnete Strecken ausgehen, so erhalten wir einen Komplex C_1^2. Ebenso, wie wir C_1^2 aus C_1^1 konstruiert haben, konstruieren wir weiter C_1^3 usw. Wir erhalten so eine im allgemeinen unbegrenzte, aber auch unter besonderen Umständen begrenzte Reihe von Streckenkomplexen (die Reihe bricht dann ab, wenn bereits alle Kurven des Systems $S_1, \cdots, S_2, \cdots$ von jedem Punkte eines Komplexes C_2^i ausgehen).

a) Ebenso wie oben folgt: sind die Strecken einer geschlossenen Kurve auf C_1^i in bestimmter Reihenfolge durchlaufen $d_1, d_2, \cdots, d_q$, dann ist die Operation

$$S = d_1\, d_2 \cdots d_q$$

durch $S_1, S_2, \cdots, S_n$ durch Transformation und Komposition erzeugt, d. i. S ist in G gleich 1.

b) Wir wollen jetzt noch zeigen: Ist eine Operation S gegeben, so existiert eine Zahl r so, daß, wenn $i > r$ ist, eine Kurve in C_1^i mit Z als Anfangspunkt existiert, die S darstellt und geschlossen ist, wenn S in der Gruppe G durch Transformation und Komposition aus den $S_{i_\varkappa}$ hervorgeht.

Denn sei

$$S = d_1 d_2 \cdots d_f,$$

wo die Darstellung auf der rechten Seite so gewählt sei, daß die Erzeugung von S durch Komposition und Transformation aus den S_i unmittelbar aus der Darstellung hervorgeht, d. i. daß die rechte Seite aus mehreren Teilen zusammengesetzt ist, die *identisch* mit den S_i resp. den aus ihnen durch Komposition und Transformation entstehenden Operationen sind. Man kann dann r so finden, daß die in dieser Darstellung S entsprechende Kurve (die also aus den Strecken $d_1, d_2, \cdots, d_f$ zusammengesetzt ist) von Z ausgehend in jedem C_1^i $(i \geqq r)$ existiert. Diese Kurve ist notwendigerweise geschlossen in jedem C_1^i $(i > r)$. Denn ein Teil der Kurve von der Form S_i, der von einem Punkte des C_1^r ausgeht, existiert nach Konstruktion im C_1^i $(i > r)$ und läuft in denselben Punkt wieder zurück. Ist aber ein Teil T der Kurve geschlossen, so auch der Teil von der Form UTU^{-1}, der in C_1^r liegt, weil dann infolge unserer Konstruktion in C_1^i $(i > r)$ U und U^{-1} zusammenfallende, aber in entgegengesetztem Sinn durchlaufene Streckenzüge sind.

Ist S ursprünglich in einer anderen Bezeichnung gegeben, so entsteht diese aus der obigen durch ev. wiederholte Weglassung zweier aufeinander folgender Glieder von der Form e und e^{-1}. Aber eine solche Weglassung verwandelt eine geschlossene Bildkurve wieder in eine geschlossene Kurve, wie dies wieder unmittelbar aus den Eigenschaften unserer Konstruktion hervorgeht.

Hieraus ergibt sich: In einem C_1^i können zwei Punkte P und U voneinander verschieden sein, die bei Erweiterung dieses Komplexes zum Zusammenfallen gebracht werden. Aber es gibt jedenfalls eine Zahl r_i derart, daß keine zwei Punkte von C_1^i, die in $C_1^{r_i}$ voneinander verschieden sind, in einen C_1^l zum Zusammenfallen kommen: Jede Kurve des C_1^i, die in $C_1^{r_i}$ ungeschlossen ist, bleibt dies auch, soweit wir auch die Konstruktion ausdehnen, und repräsentiert folglich eine von der Identität verschiedene Operation der Gruppe. Wir wollen nun die unveränderliche Gestalt von C_1^i, die er in $C_1^{r_i}$ erhält, mit $[C_1^i]$ bezeichnen und konstruieren den *unendlichen Streckenkomplex* C_1^G, *das Gruppenbild der Gruppe* G, dessen Punkte und Strecken wir erhalten als Punkte und Strecken von $[C_1^i]$, wenn wir i sukzessive die Werte $1, 2, \cdots, n$ erteilen. Wir ordnen das

Zentrum Z *der Identität* zu, dann ist jedem Element $S = d_1 d_2 \cdots d_f$ der Endpunkt des gleichbezeichneten Streckenzuges zugeordnet. Zwei voneinander verschiedene Elemente erhalten auch zwei verschiedene Bildpunkte, und umgekehrt, zwei verschiedene Bildpunkte entsprechen zwei voneinander verschiedenen Elementen der Gruppe. *Durch die Konstruktion des* C_1^G *des Gruppenbildes ist das erste fundamentale Problem gelöst.* Das Vorstehende aber gibt nur den Beweis für die Existenz des Gruppenbildes, nicht aber die Möglichkeit, dieses Bild in einer endlichen Anzahl von Schritten abzuleiten. Genauer können wir uns so ausdrücken: um zu entscheiden, ob zwei Elemente S und T gleich sind, konstruieren wir ein C_1^i, in dem beide Elemente durch von Z ausgehende Streckenzüge abgebildet werden. Sind die Endpunkte dieser Streckenzüge auch in $C_1^{r_i}$ voneinander verschieden, so sind S und T voneinander verschiedene Elemente der Gruppe. Wir haben wohl die Existenz von r_i nachgewiesen, aber kennen keine allgemeine Methode, um es wirklich zu bestimmen. Im folgenden Abschnitt werden wir eine ganze Reihe von solchen Gruppenbildern ableiten, die uns den größten Nutzen für die Erforschung der zugehörigen Gruppen und topologischen Gebilde leisten werden. Hier wollen wir nur darauf hinweisen, daß das Gruppenbild außer für die am Anfang erwähnten Fundamentalgruppen der geschlossenen zweiseitigen Fläche ganz einfach für Abelsche Gruppen ist, aber hier gerade gar keine Bedeutung besitzt, weil für diese Gruppen die Lösung der fundamentalen Probleme trivial ist.

Als Beispiel ist in der nebenstehenden Figur 7 das Gruppenbild der Ikosaedergruppe gegeben. Die Gruppe ist erzeugt durch die beiden Substitutionen a_1 und a_2 mit den drei Relationen

$$a_1^5 = 1, \quad a_2^3 = 1, \quad a_1 a_2 a_1 a_2 = 1.$$

In der Figur bedeuten die Strecken, in der Pfeilrichtung durchlaufen, die den beigesetzten Zahlen entsprechenden erzeugenden Substitutionen. Man erkennt deutlich, wie die 60 Elemente der Gruppe durch a_1 und a_2 aus einem Anfangselement entstehen.*)

Das Gruppenbild einer endlichen Gruppe ist ein endlicher Streckenkomplex (s. das Gruppenbild für die Ikosaedergruppe mit Spiegelung S. 145).

Wir wollen noch einen allgemeinen Schluß aus unserer Konstruktion ziehen: wir sahen, daß jede geschlossene Kurve des Gruppenbildes eine Operation der Gruppe darstellt, die gleich 1 ist, weil sie durch Komposition und Transformation aus den S_i hervorgeht. Andererseits wird ja

*) Die Zuordnung dieses Komplexes zu der Ikosaedergruppe ist bekannt (s. Maschke, Am. Journ. 1896). Überhaupt ist das Gruppenbild für *endliche* Gruppen eigentlich nicht neu. Es steht in enger Beziehung zu dem Cayleyschen „Colour-Diagram“.

jede der Identität gleiche Operation durch eine geschlossene Kurve dargestellt. Wir haben also den Satz:

Jede der Identität gleiche Operation einer Gruppe, die durch erzeugende Operationen mit den Relationen $S_1 = S_2 = \cdots = S_m = 1$ *definiert ist, geht durch Komposition und Transformation aus den* S_i *hervor.*

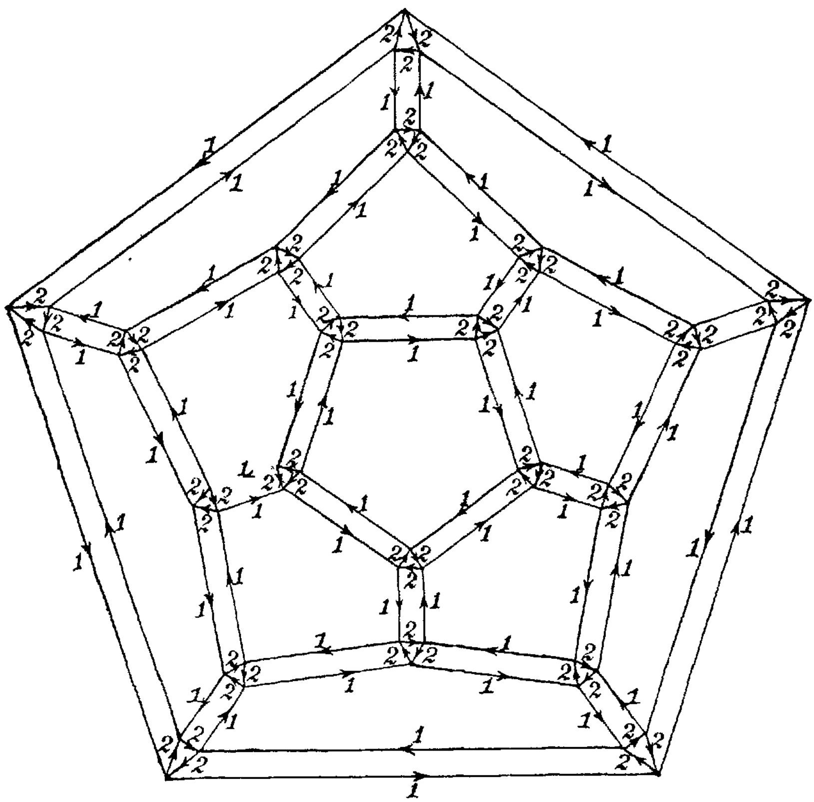

Fig. 7.

§ 2.

Die Fundamentalgruppe eines Flächenkomplexes.

Um Eigenschaften unendlicher Gruppen für die Topologie zu verwerten, bedürfen wir der folgenden Überlegungen:

1. *In einem Streckenkomplex* C_1 *mit* α_0 *Ecken und* α_1 *Seiten kann man* $\alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \mu$ *Kreise (geschlossene Streckenzüge)* $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$, *die durch einen Punkt* O *von* C_1 *gehen, so auswählen, daß jeder andere Kreis von* C_1 *stetig auf* C_1 *in einen Kreis* k' *hinübergeführt werden kann, der aus Kreisen* $a_1, \cdots, a_\mu$, *in passender Aufeinanderfolge und Richtung durchlaufen, entsteht.*

Wir schreiben:

$$k = k' = a_{k_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{k_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{k_n}^{\varepsilon_\mu} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon_i = +1 \\ \text{oder} \quad -1 \\ k_i = 1, 2 \cdots, \\ \text{oder } \mu \end{array}\right),$$

was bedeutet, daß k' entsteht, wenn man erst a_{k_1}, dann $a_{k_2} \cdots$, endlich a_{k_n} durchläuft und zwar in positiver oder negativer Richtung, je nachdem $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ gleich $+1$ oder gleich -1 ist.

Der Beweis für den Satz wird unmittelbar durch die bekannten Sätze über die Reduktion von Kurven auf geschlossenen zweiseitigen Flächen gegegeben, wenn man die zweiseitige Fläche vom Geschlecht $p = \mu$ betrachtet, die aus dem C_1 folgendermaßen entsteht: Man ersetzt jeden n-fachen Knotenpunkt durch ein Blatt mit $n-1$ Löchern, jede Strecke durch eine 2 solche Löcher an den 2 zu ihr gehörigen Knotenpunkten verbindende Röhre.

2. Wir wandeln den C_1 in einen Flächenkomplex C_2 um, indem wir durch m Kreise $k_1, k_2, \cdots, k_m$ Elementarflächenstücke legen.

Es mögen $k_1, k_2, \cdots$ die Darstellungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = a_{k_1^{(1)}}^{\varepsilon_1^{(1)}} a_{k_2^{(1)}}^{\varepsilon_2^{(1)}} \cdots a_{k_{n_1}^{(1)}}^{\varepsilon_{n_1}^{(1)}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_m = a_{k_1^{(m)}}^{\varepsilon_1^{(m)}} \cdots\cdots a_{k_{n_m}^{(m)}}^{\varepsilon_{n_m}^{(m)}} \end{array}\right\} A.$$

Dann bilden wir die Gruppe, deren einzige Operationen $a_1, \cdots, a_\mu$ sind und deren Relationen durch A geliefert werden, wenn man statt der linken Seite überall 1 schreibt. Diese Gruppe heißt die *Fundamentalgruppe G_{c_2} des Flächenkomplexes C_2. Jedem Kreis k von C_2 entspricht durch seine Darstellung in den a_i eine Operation dieser Gruppe und umgekehrt jeder Operation der Gruppe ein Kreis des C_2.*

Wenn man bedenkt, a) daß jede Operation von G_{c_2}, die gleich 1 ist, durch Komposition und Transformation aus den $k_1, \cdots, k_m$ entsprechenden Operationen der Gruppe entsteht, b) daß jedes aus mehreren Flächenstücken zusammengesetzte Elementarflächenstück mindestens ein solches besitzt, dessen Wegnahme es wieder in ein Elementarflächenstück verwandelt, so ergibt sich leicht:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Kreis k in dem C_2 ein Elementarflächenstück begrenzt, ist, daß die k entsprechende Operation der Fundamentalgruppe des C_2 in dieser gleich 1 *ist.*

§ 3.

Ein topologischer Hilfssatz (das „Lemma").

Wir werden des öfteren uns des folgenden Satzes aus der Topologie der Flächenkomplexe bedienen müssen, den wir wegen seiner ausgezeichneten Stellung in dieser Arbeit kurz das *Lemma* nennen wollen.

Ein Flächenkomplex C_2 möge ganz im Inneren einer homogenen Mannigfaltigkeit M_n $(n > 2)$ liegen. Auf dem C_2 möge die Kurve k ein Elementarflächenstück E_2' begrenzen. Hat E_2' auf seinem Rande keine Singularitäten, dann begrenzt k in der M_n auch ein völlig singularitätenfreies Elementarflächenstück.

Dieser Satz ist selbstverständlich, wenn die M_n mehr als drei Dimensionen hat, denn in einer solchen Mannigfaltigkeit ist jedem zweidimensionalen Gebilde ein homöomorphes ohne Singularitäten benachbart. Wir können also $n = 3$ annehmen.

1. a) Es sei AB eine mehrfach zu zählende Strecke $(A \neq B)$, an der eine Reihe von Blättern hängen, d. i. Paare von Flächenstücken, die je auf dem singularitätenfreien Abbild E_2^0 von E_2' aneinandergrenzen. Da wir uns nach Voraussetzung im Innern einer homogenen M_3 befinden, so ist die Umgebung von AB in der M_3 ein Elementarraumstück, und wir können davon reden, daß sich zwei jener Blätter längs AB durchsetzen (schneiden) oder berühren.

Nehmen wir nun an, daß sich sämtliche Blätter längs AB berühren, so wird es jedenfalls ein Blatt geben, auf dessen einer Seite kein anderes der Blätter liegt, und wir können dieses Blatt durch ein anderes ersetzen, das auf dieser Seite liegt und keinen inneren Punkt der Strecke AB enthält, ohne daß es etwa neue Punkte mit den anderen Blättern gemeinsam hat. Wir können dann mit einem weiteren der an AB hängenden Blätter genau so verfahren und so erreichen, daß sich keine zwei Blätter mehr längs AB berühren, daß AB also aufhört, singuläre Kante zu sein, ohne daß etwa neue Singularitäten hereingekommen wären.

b) Sei ferner A ein mehrfach zu zählender Punkt, an dem eine Reihe von Blättern hängen, die aber keine von A ausgehende gemeinsame Strecke haben. Da die Umgebung von A in der M_3 wieder ein Elementarraumstück ist, so können wir ein Blatt finden, auf dessen einer Seite kein anderes der Blätter liegt, und dasselbe durch ein anderes Blatt ersetzen, das auf dieser Seite liegt und nicht mehr durch A hindurchgeht, ohne daß es etwa neue Punkte mit den anderen gemeinsam hat. Auf diese Weise fortfahrend, können wir A als singulären Punkt fortschaffen, ohne neue Singularitäten einzuführen.

Aus a) und b) erkennen wir, daß wir eine E_2' mit Singularitäten durch eine singularitätenfreie E_2 ersetzen können, wofern nur an sämtlichen singulären Kanten bloß einander berührende Blätter vorkommen. Wir werden also unsern Satz bewiesen haben, wenn wir ein Verfahren angeben können, das eine gegebene E_2' in eine solche transformiert, bei der allen singulären Strecken obige Eigenschaft zukommt.

2. a) Zunächst kann man alle etwa vorhandenen n-fach $(n > 2)$ zu zählenden singulären Strecken fortschaffen, indem man die einzelnen Blätter durch benachbarte ersetzt, gerade so, wie man den n-fachen Punkt einer Kurve durch stetige Abänderung derselben in Doppelpunkte auflösen kann.

b) Durch Abänderung nach 1) schaffen wir sich an Punkten oder Kanten berührende Blätter fort. Es können ferner singuläre Punkte vorkommen, an denen sich zwei Blätter mehrfach durchsetzen (d. i. es kann Durchdringungslinien mit entsprechenden mehrfachen Punkten geben). Durch Ersetzen dieser Blätter durch benachbarte beseitigen wir diese Erscheinung. Endlich können wir jeden n-fachen Punkt $(n > 3)$ durch dasselbe Verfahren in bloß dreifache Punkte auflösen. Nach diesen Transformationen ist *jeder singuläre Punkt:* entweder ein allgemeiner Punkt auf einer singulären zweifach zu zählenden Linie oder ein gewöhnlicher dreifacher Punkt, durch den drei Blätter hindurchgehen, wie die drei Koordinatenebenen des Cartesischen Systems durch den Anfangspunkt („Verzweigungspunkte" sind nach unserer Bezeichnung nicht singuläre Punkte, da ja nur *ein* [sich selbst durchdringendes] Blatt durch einen solchen Punkt hindurchgeht). An *singulären Linien* hat die E_2' nur noch: 1. Paare von singulären Strecken mit gemeinsamen Endpunkten, die ungeschlossene, in einfachen Verzweigungspunkten endende Doppellinien bilden, 2. geschlossene Linien, die, entweder zyklisch auf sich selbst bezogen oder paarweise auf einander bezogen, geschlossene Doppellinien bilden. — Keine einzelne Strecke (des singularitätenfreien Abbilds) hört in einem Punkte auf, ohne daß sich eine weitere singuläre Strecke an diesen Punkt anschließt. Andernfalls müßte der dem Endpunkte entsprechende Punkt auf dem Rande der E_2' liegen gegen die Voraussetzung: *der Rand würde die E_2' in einem inneren Punkte schneiden.*

A) Wir wollen zunächst die *ungeschlossenen Doppellinien behandeln.* Seien l' und l'' zwei Strecken auf dem singularitätenfreien Abbild E_2^0 von E_2' mit denselben Anfangs- und Endpunkten A und B. Die Linien l' und l'' fallen in E_2' zusammen und bilden eine Doppellinie l. A und B sind die zu ihr gehörigen Verzweigungspunkte. l' und l'' können Doppelpunkte haben und auch einander schneiden. Sei C ein solcher Schnittpunkt, so entspricht $C = C'$ auf l' etwa C'' auf l'', und wir können

C' und C'' voneinander verschieden annehmen, da andernfalls C als zu der Doppellinie gehöriger End- und Verzweigungspunkt angesehen werden kann (s. Fig. 1).

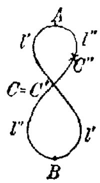

Fig. 1.

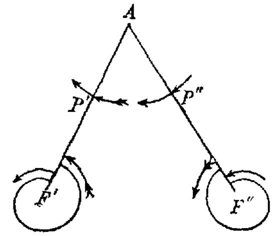

Fig. 2.

Seien nun AF' und AF'' (s. Fig. 2) zwei einander entsprechende singularitätenfreie Strecken von l' und l'' ohne gemeinsame Punkte, dann können wir längs des entsprechenden Stückes AF von l eine „*Umschaltung*“ vornehmen, d. i. die Blatthälften, in die jedes Blatt durch AF zerfällt, in anderer Weise aneinanderheften, so zwar, daß sich die neuen Blätter längs AF berühren und die Umgebung von A zweiblättrig wird. Das können wir so machen, daß wir jede Blatthälfte mit derjenigen Hälfte der anderen Blätter verbinden, die von ihr in $E_2{}^0$ durch keine der Linien AF' oder AF'' getrennt wird (s. Fig. 2, wo diese Verbindung durch verschiedenartige Pfeile angedeutet ist). Dadurch wird der früher einfach zu zählende Punkt A in einen zweifachen verwandelt; der zweifache Punkt F in einen einfachen. Die Anzahl α_0 der Ecken von E_2' bleibt also unverändert, und damit auch ihre Charakteristik, und da die neue Fläche auch nicht zerfällt, wie z. B. ein Blick auf die Figur zeigt, so ist sie *einfach* zusammenhängend geblieben. Von dem Punkt F geht wieder eine ungeschlossene Doppellinie k aus, welche aber nicht notwendig mit einem Teil von l identisch ist. Da die Schnittpunkte der die Doppellinie bildenden Strecken sich nicht selbst entsprechen, so können wir diesen Prozeß so lange wiederholen, bis als Doppellinie bloß ein Stück $DE = \{(DE)', (DE)''\}$ übrig bleibt, auf der kein Schnittpunkt der Stücke $(DE)'$ und $(DE)''$ und kein Doppelpunkt derselben liegt. $(DE)'$ und $(DE)''$ sind also singularitätenfreie Strecken ohne gemeinsame Punkte.

Es ist nun leicht einzusehen, daß wir längs dieser Doppellinien das Schneiden der Blätter durch Umschalten der Blatthälften in Berührung verwandeln können, so zwar, daß die Umgebungen von D und E *ein*blättrig bleiben. Die aneinander zu heftenden Blätter sind in der Fig. 3 durch gleiche Schraffur ausgezeichnet. Wieder bleibt die Anzahl der Ecken ungeändert, die neue Fläche zusammenhängend und also auch *einfach* zusammenhängend. Schaffen wir also noch die Berührung längs

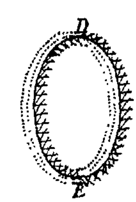

Fig. 3.

AB gemäß 1. a) fort, so haben wir die Singularität von l beseitigt, ohne neue Singularitäten einzuführen oder den Zusammenhang zu ändern. Auf diese Weise können wir an die Stelle von E_2' ein Elementarflächenstück E_2'' mit derselben Randkurve setzen, dessen Singularitäten bloß in geschlossenen Doppellinien bestehen.

B) Es bleibt noch übrig, die geschlossenen Doppellinien wegzuschaffen. Wir ordnen sie in Gruppen zusammen, und zwar betrachten wir als zu einer Gruppe gehörig die Strecken, die eine Doppellinie bilden, ferner die Strecken aller derjenigen singulären Linien, die durch die singulären Punkte der ersten Doppellinie hindurchgehen; und weiter die Strecken aller derjenigen singulären Linien, die durch die singulären Punkte jener zweiten Schar von Kurven hindurchgehen usw. Die Strecken einer Gruppe bilden nach dem oben Auseinandergesetzten eine Reihe von geschlossenen Kurven auf dem singularitätenfreien Abbild der Mannigfaltigkeit. Haben wir also irgend zwei Punkte der Mannigfaltigkeit, die nicht auf diesen Linien liegen, so haben alle Verbindungsstrecken derselben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Punkten mit jenen Linien gemeinsam. Wir nehmen nun irgend ein Paar entsprechender Strecken der Linien einer Gruppe und schalten längs derselben die an ihr hängenden Halbblätter um, und zwar so, daß zwei Halbblätter ineinander übergehen, bei denen je zwei Punkte Verbindungsstrecken haben, die eine ungerade Anzahl von Punkten mit den Linien der Gruppe gemeinsam haben. Wir behaupten nun folgendes: Wenn wir jene Umschaltung nach der einen Seite der Strecke genügend lang stetig fortsetzen, so kommen wir zu allen Strecken der Gruppe, mit Ausnahme eines Paares entsprechender Strecken, auf denen kein singulärer Punkt liegt. Die Mannigfaltigkeit geht über in eine zwei- oder einseitige Fläche mit der Zahl $p = 1$ resp. $k = 2$, auf der die übrigbleibenden Strecken eine geschlossene, singularitätenfreie, nicht zerstückelnde, zweirandige Kurve zusammensetzen. Schneiden wir längs dieser die Fläche auf und heften die Strecken jeder der beiden Randkurven zusammen, so ist die Umschaltung für die Linien der Gruppe vollendet, d. h. wir haben die Mannigfaltigkeit ohne Hinzufügung neuer Singularitäten übergeführt in eine neue, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, bei der die Singularität längs der Linien der Gruppe nach 1. fortgeschafft werden kann. Durch den Beweis der obigen Behauptung wird also das Lemma vollständig bewiesen sein.

1. Zeigen wir, daß wir bei Fortsetzung der Umschaltung zu allen Strecken der Gruppe kommen: Verlängern wir die Umschaltung über den nächsten singulären Punkt herüber, so erhalten wir eine offenbar zusammenhängende Mannigfaltigkeit, bei der nun die von dem Endpunkt der Umschaltung ausgehende singuläre Linie sich verändert hat: Vor der Um-

schaltung lief sie noch ein zweites Mal durch den singulären Punkt. Durch die Umschaltung werden nun die beiden außer der Umschaltungsstrecke durch den singulären Punkt gehenden Zweige selbst umgeschaltet, wie das in der Figur 4 durch die punktierten Linien angedeutet ist. Kommen wir also jetzt von dem Endpunkt der Umschaltungsstrecke fortschreitend zu dem singulären Punkt zurück, so müssen wir auf dem andern Zweige uns wieder von demselben entfernen. Dieser andere Zweig gehört einer zweiten, ebenfalls zur betrachteten Gruppe gehörigen, Doppellinie an. Beim Durchlaufen derselben kommen wir wieder zu dem singulären Punkt zurück (n. Vs. ist die Linie ja geschlossen) und entfernen uns von dem Punkt auf der noch übrigbleibenden Strecke, die der ersten singulären Linie angehört. Verfolgen wir diese weiter, so kommen wir zum Anfangspunkt der Umschaltungsstrecke zurück. Wir sehen also: die vom Endpunkt der Umschaltungsstrecke auslaufende singuläre Linie besteht aus dem übrigbleibenden Teil der ersten singulären Linie und der anderen Linie, die von dem singulären Punkt ausgeht, und für diese neue Doppellinie ist der betreffende Punkt nicht mehr singulär. In dieser Weise fortfahrend, erkennen wir, daß wir bei stetiger Fortsetzung der Umschaltung in der Tat, alle Linien der Gruppe durchlaufend, endlich als vom Endpunkte der Umschaltung auslaufende singuläre Linie eine im Anfangspunkt endigende Strecke übrig behalten, die keinen singulären Punkt mehr hat. Neue singuläre Strecken sind dabei nicht entstanden.

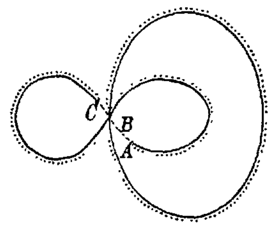

Fig. 4.

2. Durch die Umschaltung bleibt die Fläche offenbar zusammenhängend. Die Multiplizität aller Punkte bleibt unverändert, nur Anfangs- und Endpunkt der Umschaltung, die vorher zweifache Punkte waren, sind jetzt einfache Punkte geworden. Also hat die neue Fläche die Zahl $p = 1$ resp. $k = 2$.

3. Mögen $A'B'$ und $A''B''$ (s. Fig. 5) die singularitätenfreie Strecke bilden, längs deren wir mit der Umschaltung begonnen haben. Diese ist aber so eingerichtet, daß wir zwei Punkte P' und P'' auf Seiten von $B'A'$ und $B''A''$, die ineinander übergehen, durch einen Streckenzug Π verbinden können, der eine ungerade Anzahl von Punkten mit den Strecken der Gruppen, die als singulär übrig bleiben, gemeinsam hat. Setzen wir nun die Umschaltung über den nächsten

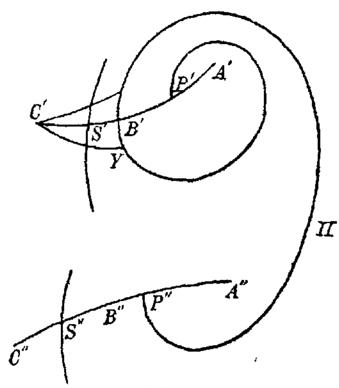

Fig. 5.

singulären Punkt S hinüber etwa bis (C', C'') fort, so können wir auch jetzt eine Kurve Π' finden, die eine ungerade Anzahl von Punkten mit den als singulär übrig bleibenden Strecken der Gruppe gemeinsam hat; wir brauchen nur jede die Strecken $B'C'$ oder $B''C''$ schneidende Strecke XY von Π durch das Streckenpaar YC', $C'X$ resp. YC'', $C''X$ zu ersetzen, das drei Punkte mit jenen Strecken gemeinsam hat. Durch diesen Prozeß entsteht aus Π wieder eine *geschlossene* Kurve mit der verlangten Eigenschaft. Auf diese Weise fortfahrend behalten wir endlich von den Strecken der Gruppe nur noch zwei singularitätenfreie Strecken AZ übrig, und wir können eine geschlossene Kurve Π^0 finden, die eine ungerade Anzahl von Punkten mit diesen beiden Strecken gemeinsam hat. Diese bilden also eine *nicht zerstückelnde* Kurve der Fläche.

4. Wir haben endlich nachzuweisen, daß die aus den beiden Strecken AZ gebildete Kurve zweirandig ist. Wir betrachten die Kurve, die aus den beiden Strecken $A'B'$ und $A''B''$ gebildet ist, mit denen wir die Umschaltung begonnen haben. Diese Kurve ist sicher zweirandig; ihre beiden Ränder werden aus den beiden Seiten von $A'B'$ resp. aus den Seiten von $A''B''$ gebildet.*) Daran ändert sich auch nichts, wenn wir die Umschaltung bis zum Punkte C über einen singulären Punkt fortsetzen. Andererseits ist die Kurve $(A'B', A''B'')$ resp. $(A'C', A''C'')$ eine nicht zerstückelnde, denn es gibt eine geschlossene Kurve Π, resp. Π', die sie nur in einem Punkte trifft. Führen wir die Umschaltung bis zum Punkte Z, so erhalten wir demzufolge eine zweirandige, nicht zerstückelnde, doppelpunktlose Kurve, die von der aus den beiden Strecken AZ gebildeten Kurve in zwei Punkten, nämlich A und Z, *geschnitten* wird. Folglich ist auch diese letztere Kurve zweirandig, womit unser Beweis vollendet ist.

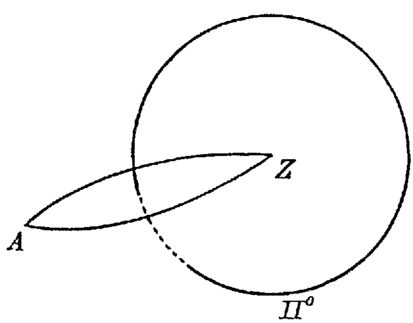

Fig. 6.

Zusatz. Wir werden das Lemma noch in folgender Form gebrauchen: *Auch dann wird unter sonst gleichen Voraussetzungen K ein singularitätenfreies Elementarflächenstück begrenzen, wenn im ursprünglich gegebenen E_2' zwar Singularitäten auf K liegen, aber K nicht das Innere von E_2' schneidet (d. i. von der einen Seite von E_2' zu der anderen durchdringt).*

---

*) Die von A ausgehenden zwei singulären Strecken liegen auf *verschiedenen* Rändern der Kurve $(A'B', A''B'')$.

In der Tat genügt diese Voraussetzung, um, was allein zum Beweis nötig ist (s. S. 148), die Unmöglichkeit singulärer Strecken, die im Innern von E_2^0 aufhören, ohne daß sich eine zweite singuläre Strecke anschließt, herbeizuführen.

Kapitel II.

Knoten und Gruppen.

§ 1.

Definition.

Gehen zwei Gebilde G und G' des gewöhnlichen Raumes durch eine stetige Deformation des Gesamtraumes ineinander über, so werden G und G' im Enzyklopädieartikel als *isotop* in bezug auf den Raum bezeichnet. Zwei singularitätenfreie Strecken, Elementarflächenstücke, Kugelflächen oder Elementarraumstücke sind je miteinander isotop. Dagegen gibt es homöomorphe, aber nicht isotope geschlossene Kurven, berandete oder geschlossene Flächen von höherem Geschlecht: Sei U die Randkurve eines singularitätenfreien Elementarflächenstückes, K eine weitere geschlossene Raumkurve ohne Singularitäten. Dann ist K nur dann isotop mit U, wenn es auch ein von K berandetes singularitätenfreies Elementarflächenstück gibt. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall, nämlich immer dann nicht, wenn K im gewöhnlichen Sinne eine verknotete Kurve ist.

Definition: *Eine geschlossene (singularitätenfreie) Kurve K heißt dann und nur dann unverknotet, wenn sie isotop ist mit der Begrenzung eines singularitätenfreien Elementarflächenstückes.*

Wir werden im dritten Paragraphen dieses Kapitels eine Methode entwickeln, um für jede topologisch definierte Raumkurve zu entscheiden, ob sie verknotet ist oder nicht.

Während für später die Benutzung unendlicher Gruppen erforderlich ist, wollen wir zunächst rein geometrisch Eigenschaften von Knoten entwickeln, die auch für das Folgende von Wichtigkeit sind.

§ 2.

Der verknotete Schlauch.

Die Begrenzung der Umgebung einer geschlossenen Raumkurve K ist eine Ringfläche R (ein Schlauch). Wir finden sie als die Begrenzung einer aus zwei Elementarraumstücken E_3^1 und E_3^2 bestehenden Domäne J: E_3^1 und E_3^2 haben zwei Elementarflächenstücke E_2^1 und E_2^2 gemeinsam, und die Raumkurve K besteht aus zwei Strecken, die zwei Punkte von E_2^1 und E_2^2 im Innern von E_3^1 und E_3^2 miteinander verbinden. Wir erkennen: jede doppelpunktlose Kurve auf Σ, die die Begrenzung von E_2^1 und E_2^2 je einmal schneidet (sie zerstückelt Σ nicht), begrenzt mit K zusammen ein in J liegendes singularitätenfreies Band und ist daher in J mit K isotop. Ist also K verknotet, so muß es auch jene Kurve sein. — Die Domäne, die zusammen mit dem Innern J des Schlauches den Gesamtraum bildet, wollen wir als Außenraum A bezeichnen, ferner die Begrenzung von E_2^1, die nach Konstruktion in J ein einfach zusammenhängendes Flächenstück begrenzt, mit $\mathfrak{J}$. Wir zeigen, daß es unter jenen $\mathfrak{J}$ einmal schneidenden Kurven solche gibt, die in A begrenzen (homolog Null sind). In der Tat: fügen wir zu A das Elementarraumstück E_3^1 hinzu, so wird A zu einem Elementarraumstück, in dem jede geschlossene Kurve homolog Null ist. Es ist also jede Kurve von A homolog mit einer Anzahl von Kurven auf der Begrenzung von E_3^1. Da aber von diesen bloß die Begrenzungen von E_2^1 und E_2^2 in A nicht begrenzen und alle beide mit $\mathfrak{J}$ homolog sind, so ergibt sich, daß jede Kurve in A und auf seiner Begrenzung mit der mehrfach gezählten Kurve $\mathfrak{J}$ homolog Null ist. Sei also C eine beliebige, $\mathfrak{J}$ einmal schneidende Kurve des Schlauches, so ist in A

$$C \sim n\mathfrak{J},$$

also

$$C - n\mathfrak{J} \sim 0.$$

Aber man kann stets eine $\mathfrak{J}$ einmal schneidende, singularitätenfreie Kurve $\mathfrak{A}$ finden, die mit $C - n\mathfrak{J}$ homolog ist. Es folgt also, daß

$$\mathfrak{A} \sim 0$$

ist im Außenraum A, wie behauptet. Und zwar wird das von $\mathfrak{A}$ in A begrenzte Flächenstück dann und nur dann einfach zusammenhängend sein können, wenn K unverknotet ist. Denn in diesem Falle werden wir durch Hinzufügung des oben erwähnten singularitätenfreien Bandes ein von K begrenztes Elementarflächenstück ohne Randsingularitäten und folglich nach dem Lemma ein solches überhaupt ohne Singularitäten erhalten, woraus folgt, daß K unverknotet ist. Hierauf werden wir im nächsten Paragraphen zurückkommen.

§ 3.

Konstruktion der zu einem Knoten gehörigen Fundamentalgruppe.

Ein jeder Streckenkomplex liefert (s. Kap. I, § 2) eine mehrfach zusammenhängende Fläche: Die Strecken werden mit Röhren umgeben, die an den Knotenpunkten ineinander übergehen. Wir wollen speziell diese Flächen betrachten für die ebene Projektion eines Knotens. Es liefert

z. B. die einfachste Projektion des einfachsten Knotens, die Kleeblattschlinge, eine Fläche vom Geschlecht 4. Allgemein liefert eine Projektion mit $n-1$ Überkreuzungsstellen eine Fläche F vom Geschlecht $p=n$.

Um eine bestimmte Anschauung den folgenden Erörterungen zugrunde legen zu können, denken wir uns die Fläche F symmetrisch in bezug auf die Projektionsebene. Sie kann dann ferner so gelegt werden, daß sie $n+1$ Kurven mit der Projektionsebene gemeinsam hat: den äußeren Umriß und die Umrisse der n Parzellen. Diese letzteren Kurven transformieren wir auf F durch einander und die Umrisse nicht schneidende Doppelstrecken, die zwei Nachbarpunkte mit je einem der inneren Umrisse und außerdem alle einen etwa auf der Oberseite von F liegenden Punkt P gemeinsam haben. Wir bezeichnen die so entstehenden n auf der Fläche und durch P laufenden, singularitätenfreien Kurven mit $C_{n+1}, C_{n+2}, \cdots, C_{2n}$. Wir legen durch P noch weitere n Kurven $C_1, \cdots, C_n$ von der Art, daß C_i die Kurve C_{n+i} in P *schneidet* (d. i. von der einen Seite von C_{n+i} auf die andere übergeht), C_i die Kurve C_{n+h} $(h \neq i)$ nicht schneidet und daß zwei Kurven C_i und C_k außer P überhaupt keinen Punkt gemeinsam haben. Dann wird die Fläche durch Zerschneiden längs $C_1, \cdots, C_{2n}$ in ein Polygon verwandelt, dessen Berandung bei geeigneter Bezeichnung durch die Kurven $C_1, C_{n+1}, C_1^{-1}, C_{n+1}^{-1}, \cdots$ in der angegebenen Weise durchlaufen gebildet wird. Jede Kurve L auf F_h ist äquivalent mit einer Anzahl von Kurven C_i in bestimmtem Sinn nacheinander durchlaufen, wie etwa der Ausdruck angibt

$$C_{l_1}^{\varepsilon_1} C_{l_2}^{\varepsilon_2} \cdots C_{l_m}^{\varepsilon_m} \qquad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

Bilden wir die unendliche (Fuchssche) Gruppe mit den erzeugenden Operationen $C_1, C_2, \cdots, C_{2n}$ und der einzigen Relation

$$C_1 C_{n+1} C_1^{-1} C_{n+1}^{-1} \cdots = 1,$$

dann entspricht jedem Element der Gruppe eine Kurve auf F und umgekehrt; ferner jedem Element der Gruppe, das sich vermöge der Relation als $=1$ erweist, eine Kurve, die auf der Fläche ein einfach-zusammenhängendes Flächenstück begrenzt und umgekehrt.

Bilden wir nun eine neue Gruppe mit denselben erzeugenden Relationen und

$$C_{n+1} = C_{n+2} = \cdots = C_{2n} = 1,$$

so folgt die obige Relation und ferner wird jede Kurve auf F, deren zugehörige Substitution in dieser neuen Gruppe $=1$ ist, im zu F gehörenden Außenraum ein Elementarflächenstück begrenzen, da ja dies für $C_{n+1}, \cdots, C_{2n}$ der Fall ist. Aber auch umgekehrt, jeder Flächenkurve L, die in jenem Außenraum ein Elementarflächenstück begrenzt, entspricht eine Substitution in der Gruppe, die gleich 1 ist. Um dies einzusehen, konstruiere man von $C_{n+1}, \cdots, C_{2n}$ begrenzte, im Außenraum gelegene, singularitätenfreie Elementarflächenstücke. Werden diese doppelt genommen, so bildet F zusammen mit ihnen eine Kugelfläche. Ein Elementarflächenstück E, dessen Rand L ist und das wir uns dem Lemma zufolge etwa singularitätenfrei vorstellen können, schneidet diese Kugel möglicherweise in geschlossenen Kurven. Jedes der Stücke, in die E zerfällt, ersetzen wir durch ein Stück der Kugeloberfläche und erhalten so ein von L begrenztes Elementarflächenstück, das bloß aus Flächenstücken jener Kugeloberfläche zusammengesetzt ist. Diese sind aber von den Kurven $C_{n+1}, \cdots, C_{2n}$ oder von der Kurve $C_1 C_{n+1} C_1^{-1} C_{n+1}^{-1} \cdots$ begrenzt, woraus folgt, daß das der Kurve L entsprechende Element der Gruppe $= 1$ ist. — Da wir aus einer Gruppe erzeugende Elemente, die gleich 1 sind, fortlassen können, so erhalten wir als den Kurven der Fläche F in bezug auf den Außenraum entsprechende Gruppe diejenige, in der $C_1, \cdots, C_n$ erzeugende Elemente sind, zwischen denen keine Relation besteht.

Wir wollen nun zu dem Außenraum von F noch $n-1$ Elementarraumstücke hinzufügen, entsprechend den $n-1$ Überkreuzungspunkten der Projektionsfigur: Sei $ABCD$ (s. Fig. 8) eine einen Überkreuzungspunkt umgebende Kurve auf der Fläche, und zwar sollen die Punkte $ABCD$ auf solchen Umrißteilen liegen, die dem Zweig entsprechen, der *unterhalb* des anderen durch den Überkreuzungspunkt hindurchgeht. Ferner sollen die Strecken AB und CD auf der Oberseite, die Strecken BC und AD auf der Unterseite von F verlaufen. $A'B'C'D'$ sei eine Nachbarkurve von $ABCD$ auf F. Dann nehmen wir aus dem Innenraum von F ein Elementarraumstück heraus, das von diesen beiden Kurven, dem zwischen ihnen liegenden Streifen von F und zwei von ihnen im Innenraum begrenzten Elementarflächenstücken begrenzt wird, und fügen es zu dem Außenraum hinzu. Ebenso verfahren wir bei den anderen Überkreuzungspunkten. Wir erhalten dann einen Außenraum A, der begrenzt ist von einer Ringfläche R, die genau so verknotet ist wie die ursprünglich gegebene Kurve K.

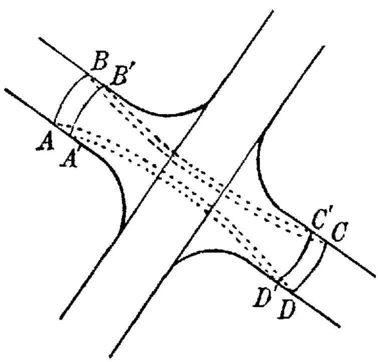

Fig. 8.

Die $n-1$ Kurven $ABCD$ usw. sind im Außenraum von F, wie oben gezeigt, auf Kurven von der Form

$$C_{l_1}^{\varepsilon_1} C_{l_2}^{\varepsilon_2} \cdots \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon_k = \pm 1 \\ l_i = 1, 2, \cdots \text{ oder } n \end{pmatrix}$$

reduzierbar. Wir wollen die $n-1$ Kurven in dieser Form etwa mit $S_1, \cdots, S_{n-1}$ bezeichnen.

In bezug auf den Außenraum A von R haben die Kurven von R folglich die Gruppe:

$$G_K \begin{cases} \text{erzeugende Elemente: } C_1, C_2, \cdots, C_n, \\ \text{Relationen: } S_1 = S_2 = \cdots = S_n = 1. \end{cases}$$

Diese Gruppe G_k wollen wir die Fundamentalgruppe der geschlossenen Raumkurve K nennen.

Wir wollen noch angeben, wie man in einfachster Weise die $n-1$ Relationen direkt aus der Projektionsfigur ablesen kann: Seien (Fig. 9) m_1, m_2, m_3, m_4 die Nummern der Parzellen, die in einem Überkreuzungspunkt zusammenstoßen und in der Reihe $m_1 m_2 m_3 m_4$ aufeinander um den Punkt herum folgen. Möge nun m_4 und m_1, sowie m_2 und m_3 je an dem untern Zweig zusammenstoßen, so lautet die *zum Kreuzungspunkt m gehörige Relation:*

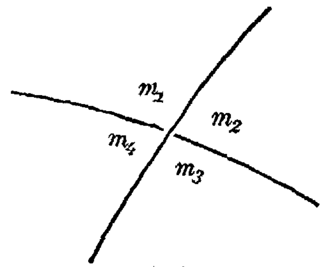

Fig. 9.

$$S_m \equiv C_{m_1} C_{m_2}^{-1} C_{m_3} C_{m_4}^{-1} = 1,$$

wenn der Umlaufssinn der C_i geeignet gewählt ist. Für die Kreuzungspunkte, die auf dem äußeren Umriß liegen, ist das in bezug auf diesen vorkommende Glied in der Relation einfach fortzulassen. Der Beweis für diese Behauptung ist leicht mit Hilfe der Sätze über die Reduktion von Kurven auf Flächen zu führen.

Alle Relationen der Gruppe G_k sind also drei- oder viergliedrig. Wir erhalten auf diese Weise für die Kleeblattschlinge (Fig. 10) die Fundamentalgruppe:

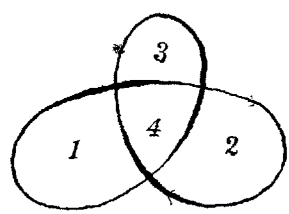

Fig. 10.

$$\begin{cases} \text{erzeugende Elemente: } C_1, C_2, C_3, C_4; \\ \text{Relationen: } \begin{cases} C_1 C_4^{-1} C_2 = C_2 C_4^{-1} C_3 \\ \quad = C_3 C_4^{-1} C_1 = 1. \end{cases} \end{cases}$$

§ 4.

Unverknotete Raumkurven.

Eine unverknotete Raumkurve ist dadurch charakterisiert, daß sie die Begrenzung eines singularitätenfreien Elementarflächenstückes ist. Da nun die Ringfläche R wie die gegebene Kurve K verknotet ist, so ist die im Außenraum A von R begrenzende Kurve $\mathfrak{A}$ auf R verknotet oder unverknotet, je nachdem es K ist. Ist K unverknotet, so wird $\mathfrak{A}$ im Außenraum A ein singularitätenfreies Elementarflächenstück begrenzen. Ist also $S_{\mathfrak{A}}$ die $\mathfrak{A}$ in der Gruppe G_k darstellende Substitution, so muß $S_{\mathfrak{A}} = 1$ sein, wenn K unverknotet ist. Umgekehrt: ist $S_{\mathfrak{A}} = 1$, so begrenzt $\mathfrak{A}$ im Außenraum ein Elementarflächenstück, das, da $\mathfrak{A}$ auf der Begrenzung von A liegt, keine wesentlichen Randsingularitäten haben kann. Folglich begrenzt $\mathfrak{A}$ dann auch nach dem Lemma ein singularitätenfreies Elementarflächenstück in A. Wir haben damit den Satz:

Satz 1. *Damit die Raumkurve K unverknotet ist, ist notwendig und hinreichend, daß in der zu K gehörenden Gruppe G_K eine bestimmte Substitution $S_{\mathfrak{A}} = 1$ ist.*

Im Falle daß K unverknotet ist, also auch der Schlauch R, sind alle Kurven auf R in dem Außenraum A reduzierbar auf die Potenz einer einzigen Kurve, der im Innern begrenzenden Kurve $\mathfrak{J}$ auf R. Es ist also in diesem Falle G_K isomorph mit der (Abelschen) Gruppe, die aus einer einzigen erzeugenden Operation ohne Relation besteht. Umgekehrt, wenn G_K eine Abelsche Gruppe ist, so folgt, daß K unverknotet ist. Denn da $\mathfrak{A}$ im Außenraum homolog Null ist, so folgt, daß

$$\mathfrak{A} \equiv \sum_1^n \nu_i C_i \equiv \sum_1^{n-1} \lambda_j s_j$$

sein muß, wo s_j an der Stelle der der Substitution S_j entsprechenden Kurve von R steht. Aus dieser Kongruenz folgt aber, wenn Vertauschung der Reihenfolge der Substitutionen erlaubt ist, sofort

$$S_{\mathfrak{A}} = 1,$$

womit die in Satz 1 aufgestellte hinreichende Bedingung erreicht ist. Wir haben also den

Satz 2. *Dann und nur dann ist K unverknotet, wenn die Fundamentalgruppe von K abelsch ist.*

Ist eine Knotengruppe abelsch, so ist sie isomorph mit der Gruppe $\{S^\alpha\}$.

Noch eine dritte Methode kann man anwenden, um die unverknoteten Kurven zu erkennen: Sei $\mathfrak{R}$ irgend eine singularitätenfreie Kurve auf der Ringfläche R, für die die Homologie besteht

$$\mathfrak{R} \sim \mathfrak{J} + m\mathfrak{A}.$$

(Jede Kurve $\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{A}$ nur einmal schneidet, wird eine Homologie dieser Art befriedigen.) $\mathfrak{J}$ (die im Inneren begrenzende Kurve) kann dargestellt werden durch die Substitution C_i (wo i der Index einer Parzelle ist, die mit dem Außenrand eine Strecke gemeinsam hat). $\mathfrak{R}$ sei dargestellt durch die Substitution $S_{\mathfrak{R}}$ von G_K. Ist nun G_K abelsch, so ist

$$S_{\mathfrak{A}} = 1 \quad \text{und } S_{\mathfrak{R}} = C_i.$$

Fügt man nun zu A eine in J liegende, von einem Streifen längs $\mathfrak{J}$ begrenzte Scheibe hinzu, so wird A für jeden Knoten ein Elementarraumstück. Die Gruppe der Kurven auf R in bezug auf dieses Elementarraumstück entsteht aber aus G_K, wenn man die Relation $C_i = 1$ hinzufügt. Da aber alle Kurven auf R in diesem Elementarraumstück ein Elementarflächenstück begrenzen, so muß die Gruppe, die aus G_K durch Hinzufügen von $C_i = 1$ entsteht, die Identität sein. Folglich muß nach obigem, wenn K unverknotet ist, auch G_K zur Identität werden, wenn man $S_{\mathfrak{R}} = 1$ hinzufügt. Ist aber K verknotet, so wird das im allgemeinen nicht der Fall sein, wie wir an Beispielen im nächsten Paragraphen zeigen werden. Vielmehr entstehen aus verknoteten Schläuchen Mannigfaltigkeiten von der Art, wie sie von Poincaré (Pal. Rend. 1904) entdeckt sind und die wir deshalb *Poincarésche Räume* nennen wollen. Dies sind geschlossene M_3 ohne Torsion mit einfachem Zusammenhang, d. i. jede geschlossene Kurve begrenzt in den M_3 einmal genommen. Aber sie sind im allgemeinen nicht mit dem gewöhnlichen Raum homöomorph. Eine solche Mannigfaltigkeit kann, in diesem allgemeinen Falle, wie im letzten Kapitel bewiesen wird, nicht als Fundamentalgruppe die Identität haben. Folglich haben wir (s. über Konstruktion der Fundamentalgruppe in M_3, Kapitel III, § 3):

K ist verknotet, wenn durch Hinzufügen irgend einer von gewissen Relationen $S_{\mathfrak{R}} = 1$ zur Fundamentalgruppe G_K diese nicht zur Identität wird.

§ 5.

Spezielle Knoten und Poincarésche Räume.

a) *Die Kleeblattschlinge.*

Die Fundamentalgruppe der Kleeblattschlinge ist, wie oben gezeigt:

$$\begin{cases} \text{erzeugende Substitutionen: } C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4; \\ \text{Relationen:} \\ C_1 C_4^{-1} C_2 = C_2 C_4^{-1} C_3 = C_3 C_4^{-1} C_1 = 1. \end{cases}$$

Das *Gruppenbild* (s. Kap. I, § 1) setzen wir zusammen aus Parallelstreifen (Fig. 11), die begrenzt sind von Linien, die aus Strecken C_4 bestehen. Wir zeichnen nun zwei gleichlaufende Ketten von Strecken C_4, die wir durch einen Streckenzug $C_1 C_2 C_3\ C_1 C_2 C_3$ etc. so verbinden, daß die Ecken dieses Streckenzuges abwechselnd auf den beiden C_4-Ketten liegen. Wir erhalten auf diese Weise drei verschiedene Arten von Ecken bei den Streifen: solche, von denen C_1 und C_2^{-1}, solche, von denen C_2 und C_3^{-1}, endlich solche, von denen C_3 und C_1^{-1} ausgehen. Wir nehmen nun einen Streifen und heften an seinen einen Rand zwei weitere Streifen, mit ihren Rändern gleichlaufend, so an, daß an jedem der Eckpunkte des gemeinsamen Randes jetzt alle drei Arten von Ecken zusammenstoßen. Wir brauchen nur dafür zu sorgen, daß dies an einem einzigen Eckpunkt der Fall ist, dann wird von selbst die Forderung für alle Eckpunkte erfüllt sein. An den drei freien Rändern dieses Streifentripels heften wir wieder in derselben Weise je zwei weitere Streifen an und fahren so fort. Wir erkennen leicht, daß der so entstehende unendliche Streckenkomplex tatsächlich das Bild der vorgegebenen Gruppe ist. Denn von jedem Punkte gehen die acht Strecken

$$C_1\, C_2\, C_3\, C_4\, C_1^{-1}\, C_2^{-1}\, C_3^{-1}\, C_4^{-1}$$

aus und an jeder der Strecken hängen die zwei resp. drei Kreise, die den zwei resp. drei verschiedenen Arten entsprechen, wie die betreffenden Substitutionen in den Relationen vorkommen.

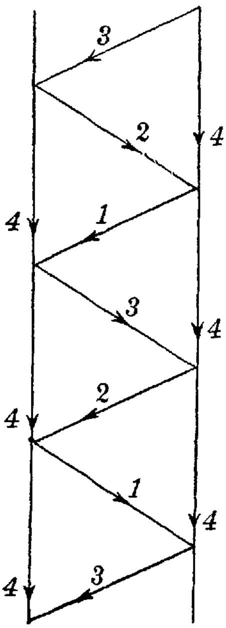

Fig. 11.

Wir erkennen nun sofort, daß die Gruppe nicht isomorph ist mit der Gruppe $\{S^\alpha\}$, daß sie nicht abelsch ist. Zum Beispiel ist der Streckenzug $C_1\, C_4\, C_1^{-1}\, C_4^{-1}$ nicht geschlossen.

Der im Außenraum begrenzenden Kurve $\mathfrak{A}$ auf R entspricht die Substitution $S_{\mathfrak{A}} = C_1\, C_2\, C_3\, C_2^{-1}\, C_2^{-1}\, C_2^{-1}$. Wir erkennen auf dem Gruppenbild sofort, daß $S_{\mathfrak{A}}$ durch einen ungeschlossenen Streckenzug dargestellt wird, also $\mathfrak{A}$ begrenzt im Außenraum kein Elementarflächenstück, sondern nur eine Fläche höheren Zusammenhangs, wie es sein muß, da K verknotet ist.

Wir wollen nun den zur *Kleeblattschlinge gehörigen Poincaréschen Raum* (s. S. 159) betrachten: Eine die Kurven $\mathfrak{A}$ und C_1 einmal schneidende Kurve $\mathfrak{R}$ der Ringfläche wird durch die Substitution $S_{\mathfrak{R}} = C_1\, C_2\, C_3\, C_2^{-1}\, C_2^{-1}$ dargestellt. Fügen wir zu dem Außenraum längs $\mathfrak{R}$ eine Scheibe hinzu, so entsteht ein von einer Kugelfläche begrenzter *Poincaréscher* Raum Φ. Die Gruppe dieses Raumes ist, da alle Kurven des Außenraumes A auf Kurven der Ringfläche reduzierbar sind, gleich der Gruppe der auf der Ringfläche liegenden Kurven in bezug auf Φ, d. i. sie ist folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\text{erzeugende Elemente: } C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4;\\ \text{Relationen: 1) } C_1\, C_4^{-1}\, C_2 = \text{2) } C_2\, C_4^{-1}\, C_3 = \text{3) } C_3\, C_4^{-1}\, C_1 = 1\\ \qquad\qquad\quad \text{4) } C_1\, C_2\, C_3\, C_2^{-1}\, C_2^{-1} = 1\end{array}\right\}\ G_\Phi.$$

Wir wollen das Gruppenbild konstruieren: Dazu betrachten wir die folgende dodekaedrische Figur 12. Die den Strecken beigefügten Pfeile und Zahlen bedeuten, daß die Strecken, im Pfeilsinn durchlaufen, die erzeugenden Operationen mit dem der Zahl entsprechenden Index darstellen. Die Figur besteht aus neun Fünfecken, einem Sieben- und einem Achteck

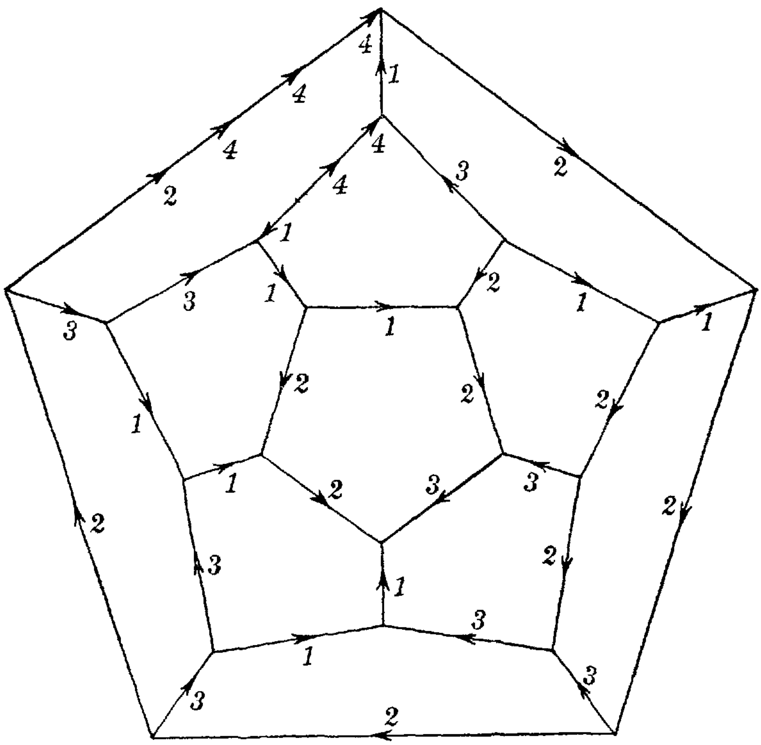

Fig. 12.

und dem Randpolygon. Jedes Polygon stellt, in einem bestimmten Sinn durchlaufen, den Ausdruck der linken Seite der 4$^{\text{ten}}$ Relation dar, resp. diesen Ausdruck transformiert durch die ersten drei Relationen. Wir erkennen, daß aus den vier Relationen die (dem Randpolygon entsprechende) Relation

$$5)\quad C_2^{5}\, C_4^{3} = 1$$

folgt. Andererseits erhalten wir durch Transformation der 4$^{\text{ten}}$ Relation mit Hilfe der drei anderen

$$6)\quad C_2^{5}\, C_4^{-3} = 1\,,$$

woraus folgt:

$$7)\quad C_1^{10} = C_2^{10} = C_3^{10} = C_4^{6} = 1\,.$$

Wir wollen, ehe wir diese Relationen benutzen, noch etwas darauf eingehen, wie man die Behauptung nachweist, daß die den Polygonen der

Fig. 12 entsprechenden Relationen, sowie 6) aus der Relation 4) vermöge 1), 2) und 3) hervorgehen. Zu dem Zwecke konstruieren wir uns einen Teil des Gruppenbildes für die Gruppe der Kleeblattschlinge, in der der Ausdruck auf der linken Seite von 4) dargestellt wird. Dieser Teil besteht aus fünf Streifen (s. Fig. 13). Aus der Relation 4) folgt, daß die beiden freien Ränder zusammenfallen, und zwar so, daß die Endpunkte des den Ausdruck 4) darstellenden Streckenzuges aufeinander fallen und dementsprechend die anderen Punkte der beiden Ränder. Dann folgt durch direkte Betrachtung der Figur, daß die anderen behaupteten Relationen gelten: Die sie darstellenden Streckenzüge endigen in korrespondierenden Punkten der beiden Ränder. (In der untenstehenden Fig. 13 wird die Bezeichnung einer Strecke durch eine aus ihr durch horizontale Verschiebung entstehenden Strecke gegeben. Von den Strecken C_4 sind nur die Randstrecken und von diesen nur die Richtung je einer angegeben. Die Relation 4) ist in der Figur durch einen stark ausgezogenen Streckenzug, die den Polygonen der Dodekaederfigur entsprechende Relation durch punktierte, resp. strichpunktierte Streckenzüge, der Streckenzug der Relation 6) durch eine gewellte Linie dargestellt).

Unter Benutzung der Relation 7) erhalten wir nun folgende Konstruktion des Gruppenbildes: Aus den fünf in der Figur 13 dargestellten Streifen konstruieren wir eine *Ringfläche*, indem wir erstens entsprechend der Relation 4) die beiden freien Ränder zusammenheften, ferner der Relation $C_4^6 = 1$ entsprechend je auf einer Kette von C_4 um sechs Strecken auseinanderliegende Punkte als identisch erklären. Dadurch erhalten wir eine Ringfläche.

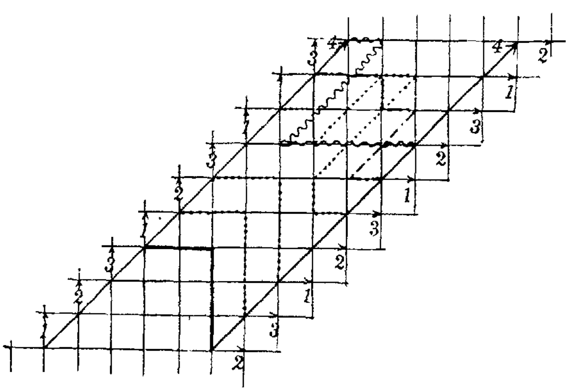

Fig. 13.

Jedes der Polygone der Dodekaederfigur ist eine nicht zerstückelnde geschlossene Kurve auf dieser Ringfläche; wir können deswegen durch jedes der Polygone eine solche Ringfläche hindurchlegen. Da an jeder Ecke der Dodekaederfigur drei Strecken zusammenstoßen, die den drei verschiedenen Ecken der Strecken entsprechen, so haben wir in der Gesamtheit der Punkte und Streifen auf den 12 Ringflächen, die sich paarweise längs eines Streifens berühren und zu dreien in einer Kante zusammenstoßen, den gesuchten, das Gruppenbild darstellenden Streckenkomplex.

Die Gruppe unseres Poincaréschen Raumes ist also endlich, sie besteht aus 120 Substitutionen, denn auf jeder Ringfläche liegen 30 Punkte, jeder Punkt liegt aber auf drei Ringflächen, so daß wir als Anzahl der Substitutionen $\frac{12 \cdot 30}{3} = 120$ erhalten. Diese Zahl läßt vermuten, daß die Gruppe *mit der durch die Spiegelung erweiterten Ikosaedergruppe isomorph* ist, eine Vermutung, die sich leicht verifizieren läßt. In der Tat lassen sich C_1, C_2, C_3 als Drehungen um die drei Ecken einer Ikosaederfläche verbunden mit Spiegelung am Mittelpunkt, C_4 als Drehung um den Mittelpunkt der Fläche verbunden mit Spiegelung am Mittelpunkt des Ikosaeders auffassen.

Die Fundamentalgruppe eines zur Kleeblattschlinge gehörigen Poincaréschen Raumes ist isomorph mit der durch Spiegelung erweiterten 120-gliedrigen Ikosaedergruppe.

Es ist leicht, die *Gruppen anderer zur Kleeblattschlinge gehöriger Poincaréscher Räume* zu finden. *Sie sind*, mit Ausnahme natürlich des trivialen Falles des gewöhnlichen Raumes, *alle unendlich*. Den einfachsten Fall erhält man, wenn man zur G_K der Kleeblattschlinge die Relation:

$$8) \quad C_1 C_2 C_3 C_1 C_2 C_3 C_2^{-5} = 1$$

setzt. Geometrisch bedeutet das, daß man zum Außenraum längs einer $\mathfrak{J}$ zweimal und $\mathfrak{A}$ einmal schneidenden Kurve einen Elementarraumteil hinzufügt. Der entstehende Poincarésche Raum hat die Gruppe, die durch die erzeugenden Operationen mit den Relationen 1), 2), 3), 8) gegeben ist. Mit Hilfe der Relationen können wir (analog wie vorhin) 8) transformieren in

$$9) \quad C_2^{-11} C_4^{6} = 1.$$

Wir erkennen, daß das Gruppenbild folgendermaßen zu konstruieren ist: Die Ränder eines aus 11 Streifen zusammengesetzten Blattes lassen wir passend zusammenfallen und erhalten dadurch einen Zylinder. Wir nehmen ferner ein reguläres Netz in der Lobatschewskyschen Ebene, das aus Elfecken besteht, die zu je dreien an einen Punkt hängen. Durch die Netzmaschen legen wir Zylinder, die paarweise einen Streifen und zu dreien eine Kante gemeinsam haben. Wir haben die Zylinder derartig einzusetzen, daß an einer Kante je drei Streifen in der Weise zusammenstoßen, wie es bei dem Gruppenbild der Kleeblattschlinge der Fall ist. Das ist, wie unschwer einzusehen, ohne weiteres möglich. Die Punkte und Strecken auf diesen Zylindern liefern das Bild der gegebenen Gruppe, die also unendlich ist. Analoges gilt für die anderen Poincaréschen Gruppen, die durch die $\mathfrak{J}$ n-mal und $\mathfrak{A}$ einmal schneidenden Kurven des Ringes erzeugt werden. Wir haben das Resultat:

Alle Poincareschen Räume, die zur Kleeblattschlinge gehören, haben, mit Ausnahme der oben untersuchten und des gewöhnlichen Raumes, unendliche Gruppen, deren Bilder durch reguläre Polygoneinteilung der Nicht-Euklidischen Ebene, bei der je drei $(6n-1)$*-Ecke* $(n>1)$ *in einem Punkte zusammenstoßen, erzeugt werden.*

Um die Bedeutung des Gruppenbildes stärker hervortreten zu lassen, sei bemerkt, daß jeder geschlossenen Kurve auf dem Bild eine Substitution entspricht, die $=1$ ist, und eine Kurve der Mannigfaltigkeit, die auf Null zusammenziehbar ist, d. i. ein einfach zusammenhängendes Flächenstück begrenzt. Die Aufstellung des obigen Gruppenbildes hilft nicht nur zum Beweis, daß die Raumkurven verknotet oder die Räume dem gewöhnlichen nicht homöomorph sind, sondern *es wird dadurch auch die Aufgabe gelöst, von jeder gegebenen Kurve des Außenraums, bezw. der verschiedenen Poincaréschen Räume, in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob sie auf Null zusammenziehbar ist oder nicht.*

b) *Andere Knoten.* Hier soll nur eine Gruppe von ganz besonders einfachen Knoten behandelt werden, die eng mit der Kleeblattschlinge verwandt sind. Die ersten beiden Glieder sind in den nebenstehenden Figuren 14, 15 angedeutet, die anderen werden analog fortschreitend erhalten. Sie haben $5, 7, \cdots, 3+2n$ Kreuzungspunkte und gehen durch

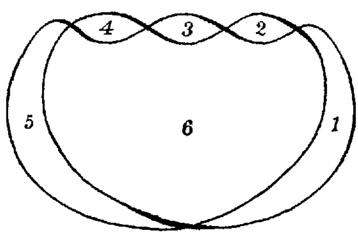

Fig. 14.

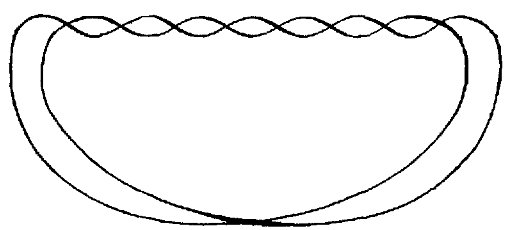

Fig. 15.

$1, 2, \cdots, n$ Umschaltungen an den Kreuzungspunkten in die Kleeblattschlinge über. Man erkennt nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Regel leicht, daß für $n=1$ die Gruppe gegeben ist durch

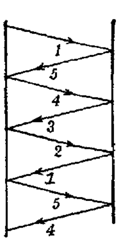

Fig. 16.

$$\begin{cases} \text{Erzeugende Operationen: } C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. \\ \text{Relationen: } \begin{cases} C_1 C_6^{-1} C_2 = C_2 C_6^{-1} C_3 = C_3 C_6^{-1} C_4 \\ = C_4 C_6^{-1} C_5 = C_5 C_6^{-1} C_1 = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Das Gruppenbild setzt sich aus ähnlichen Streifen zusammen, wie bei der Kleeblattschlinge (s. Fig. 16), je fünf Streifen stoßen an einer C_6-Kette zusammen. — Ähnliches gilt für $n>1$. — Fügen wir im Falle $n=1$ zu den Relationen die neue Relation

$$C_1 C_4 C_2 C_5 C_3 C_2^{-4} = 1$$

hinzu, so entsteht die Gruppe eines zu dem Knoten gehörigen Poincaréschen Raumes. Man erkennt, daß das Gruppenbild erzeugt wird durch Zylinder, die aus je neun Streifen zusammengesetzt sind, die zu je fünf längs einer C_6-Kette zusammenhängen. Die Durchschnitte der Zylinder entsprechen einer regulären Polygoneinteilung der hyperbolischen Nicht-Euklidischen Ebene in 9-Ecke, die zu je fünfen in einer Ecke zusammenstoßen. Ähnliches gilt für $n > 1$. Wir haben also:

Die Poincaréschen Räume, die zu den angeführten Knoten gehören, haben sämtlich unendliche Gruppen, die durch reguläre Gebietseinteilungen der hyperbolischen Ebene erzeugt werden.

Außer der Ikosaedergruppe und der Identität haben wir also bloß unendliche Gruppen für Poincarésche Räume bekommen. Für Mannigfaltigkeiten mit Torsion sind die zyklischen Gruppen die einzigen bekannten endlichen Gruppen.

Weitere Untersuchungen über Knotengruppen, sowohl im speziellen, als im allgemeinen, d. i. Aufsuchung von Eigenschaften, die allen Knotengruppen eigentümlich sind, sollen weiteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

Kapitel III.

Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Allgemeines (Konstruktion des Nahtkomplexes und der Fundamentalgruppe).

Sei M_3 eine geschlossene Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, S_3' ein beliebiges konstituierendes Raumstück derselben, Π_2' die S_3' begrenzende Kugelfläche. S_3^2 sei eines von den konstituierenden Raumstücken, die mit S_3' mindestens *ein* Elementarflächenstück gemeinsam haben. Wir bilden aus S_3' und S_3^2 ein Elementarraumstück Σ_3^2, indem wir S_3^1 und S_3^2 längs *eines* gemeinsamen Elementarflächenstückes zusammenheften. Die Σ_3^2 begrenzende Kugelfläche Π_2^2 besitzt nur solche Flächen, die auch der M_3 angehören, aber es kann mehreren Paaren solcher Flächen auf Π_2^2 je nur eine einzige Fläche in M_3 entsprechen, wenn nämlich S_3^1 und S_3^2 mehr als ein Elementarflächenstück gemeinsam haben. An Σ_3^2 heften wir nun ein drittes Raumstück S_3^3 der M_3, das mit Π_2^2 mindestens *ein* Elementarflächenstück gemeinsam hat, und zwar längs eines solchen Flächenstückes. Σ_3^2 und S_3^3 mögen zusammen Σ_3^3 mit der Begrenzung Π_2^3 bilden. In dieser Weise fahren wir fort, bis wir ein Elementarraumstück Σ_3 erhalten, das sämtliche konstituierende Raumstücke der M_3 enthält, und das begrenzt sein möge von der Kugelfläche Π_2. Jede Fläche von Π_2 kommt auch in M_3 vor, je zwei Flächen von Π_2 entspricht eine und dieselbe Fläche in M_3, da ja M_3 nach Voraussetzung geschlossen ist. Wir nennen Π_2 „*Schnittfläche* der M_3". *Die M_3 ist demnach homöomorph mit einem* von der Schnittfläche begrenzten *Elementarraumstück, wenn die Flächen derselben in bestimmter,* aus der obigen Konstruktion sich ergebender, *Weise paarweise als identisch erklärt werden* (erste allgemeine Erzeugungsweise einer M_3). Durch diese Beziehung der Flächen von Π_2 aufeinander werden gleichzeitig ihre Indikatrizen (Umlaufssinne) einander zugeordnet. Aus der Definition der Zwei- resp. Einseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten ergibt sich dann unmittelbar das Resultat: Haben zwei entsprechende Flächen der Π_2 mit *in obiger Weise* zugeordnetem Umlaufssinn *in bezug auf die* Π_2 allemal verschiedenen Umlaufssinn, so ist die M_3 zweiseitig, andernfalls einseitig. So bietet uns die Π_2 ein bequemes Mittel, um diese erste Frage nach dem Charakter der vorgelegten M_3 zu entscheiden. Wir lassen nun entsprechende Flächen der Schnittfläche Π_2 zusammenfallen und erhalten einen Flächenkomplex N_2, den wir die *Nahtfläche* der M_3 nennen. Diese Bezeichnung deutet an, daß man aus einem Kugelraum durch Zusammenheften längs des N_2 die vorgelegte M_3 erhält. Dem C_2 entspricht bei zweidimensionaler Mannigfaltigkeit ein Schnittsystem, durch das die M_2 in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandelt wird. Es ergeben sich dann folgende Resultate:

1) Jeder Streckenkomplex und jeder Flächenkomplex der M_3 ist homotop mit einem Strecken- resp. Flächenkomplex der Nahtfläche (d. i. in einen solchen stetig mit Selbstdurchdringung auf der M_3 überführbar). Denn jeder Strecken- oder Flächenkomplex, der nicht der Nahtfläche N_2 angehört, liegt im Kugelraum Σ_3 und ist also homotop mit einem Komplex auf der Begrenzung Π_2 und also auch mit einem solchen auf N_2. Begrenzt also eine Kurve (oder auch ein Kurvenkomplex) ein Elementarflächenstück resp. ein Flächenstück höheren Zusammenhangs in M_3, so begrenzt eine entsprechende Kurve (oder auch ein entsprechender Kurvenkomplex) von N_2 ein Elementarflächenstück resp. eine Fläche höheren Zusammenhangs auf N_2, und umgekehrt. Sind zwei Kurvensysteme auf N_2 nicht ineinander stetig überführbar, so ist dies auch für die M_3 nicht der Fall; ist eine Kurve auf N_2 speziell nicht auf einen Punkt zusammenziehbar (begrenzt kein Elementarflächenstück auf N_2), so ist sie auch in der M_3 nicht auf einen Punkt zusammenziehbar. *Wir bezeichnen* deswegen mit Recht *die Fundamentalgruppe von N_2 als die Fundamentalgruppe der* M_3: $G_{N_2} \equiv G_{M_3}$. Die Konstruktion von G_{N_2} durch die Darstellung der begrenzenden Kreise in einem passend gewählten System von durch einen Punkt laufenden Kurven auf N_2 ist in Kapitel I, § 2 entwickelt.

Der N_2 liegt ein Streckenkomplex zugrunde, den wir mit N_1 bezeichnen. Die Umgebung dieses Komplexes wird in der M_3, falls sie zweiseitig ist, begrenzt von einer zweiseitigen geschlossenen Fläche F vom Geschlecht $p = \mu = \nu_1 - \nu_0 + 1$ (ν_1: Anzahl der Strecken, ν_0: Anzahl der Ecken von N_1) (s. Kapitel I, § 2). Diese Umgebung J_3 entsteht aus einem Elementarraumstück durch Hinzufügung von p weiteren Elementarraumstücken („Henkeln"), die mit dem ersten je zwei Anheftungsflächen gemein haben. Sie ist also in unserem gewöhnlichen Raum repräsentierbar. Wir bezeichnen sie etwa als *gewöhnlichen zweiseitigen mehrfachen Ringraum.* Desgleichen wird der Teil von M_3, der übrig bleibt, wenn man J_3 wegläßt, der „Außenraum" A_3 von N_1, ein solcher gewöhnlicher mehrfacher Ringraum sein, wie sich aus der Konstruktion unmittelbar ergibt. Im Falle, daß die M_3 einseitig ist, sind J_3 und A_3 von einer einseitigen Fläche gerader Charakteristik begrenzt. J_3 und A_3 bilden gewöhnliche einseitige mehrfache Ringräume. Wir haben also als zweite Erzeugungsweise:

Die allgemeinste homogene geschlossene M_3 erhält man durch Verschmelzung der Oberfläche zweier gewöhnlicher mehrfacher Ringräume.

Daraus folgt:

Jede homogene geschlossene M_3 ist in vier singularitätenfreie Elementarraumstücke zerlegbar.

Jede Kurve des Raumes ist mit einer Kurve auf der Fläche F, die A_3 und J_3 trennt, isotop. Man kann dann ohne weiteres die Poincaréschen Sätze über die Beziehung zwischen dem Kurven- und dem Flächenzusammenhang ableiten, worauf wir hier nicht weiter eingehen. Es sei nur bemerkt, daß sich diese Überlegungen unmittelbar auf beliebig viele Dimensionen erweitern lassen, woraus unter anderm folgt, daß jede homogene M_n, für jedes beliebige n, sich aus vier Elementarmannigfaltigkeiten zusammensetzen läßt, dann aber auch sich ein einfacher Beweis für die entsprechenden Poincaréschen Sätze für eine M_n $(n > 3)$ ergibt.

§ 2.

Der gewöhnliche Raum.

Daß die Fundamentalgruppe des gewöhnlichen Raumes die Identität ist, sieht man gleich ein. Denn es begrenzt ja jede Kurve im Raume ein Elementarflächenstück (ev. mit Singularitäten), also auch jede Kurve der N_2 auf der N_2, woraus nach Kapitel 1, § 2 folgt, daß die Fundamentalgruppe von N_2 oder, was dasselbe ist, von M_3 die Identität ist.

Ist umgekehrt die Fundamentalgruppe G_{N_2} der N_2 gleich der Identität, dann begrenzt jede Kurve auf N_2. Unter dieser Voraussetzung wird die N_2 keine geschlossene zweiseitige Fläche enthalten, woraus folgt, daß keine ungeschlossene Strecke der N_2 für sich allein ein Elementarflächenstück begrenzt. Enthält dann N_1 eine ungeschlossene Strecke, so können wir diese durch Zusammenziehen beseitigen, d. i.: legen wir in der modifizierten N_1 durch geeignete Kreise Elementarflächenstücke, so bilden diese doppelt genommen wieder eine Kugelfläche, und erklären wir bei einem von dieser Kugelfläche begrenzten Elementarraumstück die entsprechende Flächen der Begrenzung als identisch, so erhalten wir eine der gegebenen M_3 homöomorphe M_3. Auf diese Weise können wir alle ungeschlossenen Strecken der N_1 entfernen: derselbe besteht dann aus lauter Kreisen mit *einem* gemeinsamen Punkt O. Ist nun G_N die Identität, so begrenzt jeder dieser Kreise ein Elementarflächenstück, dessen einzige singuläre Linien die Kreise durch O sind. Könnten wir nun zeigen, daß keine diese Flächen wesentliche Randsingularitäten (s. Kap. I, § 3) hat, so würde sofort aus dem Lemma folgen, daß es ein System von singularitätenfreien Elementarflächenstücken gibt, die je von einem der Kreise begrenzt werden und außer O keinen gemeinsamen Punkt haben. Die Umgebung eines solchen Flächenkomplexes in einer homogenen M_3 ist aber ein Kugelraum. Wir können also N_1 in einen Kugelraum E_3^i einschließen. Die Begrenzung K_2 dieses Kugelraumes liegt aber nach der Auseinandersetzung des vorigen Paragraphen in einem passend gewählten Außenraum A_3 und begrenzt in diesem ein Elementarraumstück E_3^a. Denn jede geschlossene Fläche begrenzt in einem gewöhnlichen mehrfachen Ringraum, speziell die Kugelfläche ein Elementarraumstück, und zwar gilt dies, ohne daß vorausgesetzt zu werden braucht, daß der Ringraum zweiseitig ist. Die E_3^a aber und E_3^i ergeben, längs der begrenzenden Kugelfläche K verschmolzen, die gegebene M_3 und diese ist folglich homöomorph mit einem gewöhnlichen Raume. Aber unsere Annahme des Nichtvorhandenseins wesentlicher Randsingularitäten ist nicht ohne weiteres zu begründen. Dazu ist es nötig, die Fälle, bei denen G_N zur Identität wird, näher zu studieren.