

# XIX. Über das in den Symbolen mit vier Indices enthaltene Zonengesetz.

Von

C. Viola in Parma (früher in Rom).

(Mit 4 Textfiguren.)

Die Indices  $m, n, q$  einer Zone, die zwei Krystallflächen angehören, deren Symbole  $(h_1 i_1 l_1)$  und  $(h_2 i_2 l_2)$  sein mögen, werden bekannterweise durch folgende Verhältnisse berechnet:

$$m : n : q = (i_1 l_2 - i_2 l_1) : (l_1 h_2 - l_2 h_1) : (h_1 i_2 - h_2 i_1). \quad (1)$$

Ganz analog werden die Indices einer Fläche bestimmt, die zwei Zonen angehören.

Dieses einfache Zonenprinzip wird noch mehr vereinfacht und in Gebrauch gesetzt durch das bekannte Schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} h_1 & i_1 & l_1 & h_1 & i_1 & l_1 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ h_2 & i_2 & l_2 & h_2 & i_2 & l_2 \end{array},$$

aus welchem durch kreuzweise Multiplication und nachherige Subtraction die obigen Verhältnisse abgeleitet werden.

Sind aber die Symbole der Flächen und der Zonen mit vier Indices gegeben, wie sie im hexagonalen Systeme durchweg und zuweilen auch im trigonalen Systeme gebraucht werden, so läßt sich das oben citierte Zonenprinzip nicht ohne weiteres anwenden. Manche Lehrbücher der Krystallographie erwähnen dies nur beiläufig, ohne dafür Methoden anzugeben, die als selbstverständlich angesehen werden. Die meisten Lehrbücher beschäftigen sich damit garnicht.

Tschermak in seinem ausgezeichneten Lehrbuche der Mineralogie VI. Aufl. 1905 spricht von dem Zonenprinzip im hexagonalen Systeme S. 63 (unten) folgendermaßen: »Für die Zonenrechnung wird das Bravais'sche Symbol  $(hikl)$  so verwendet, daß nach Weglassung von  $k$  bloß die

übrigen drei Indices benutzt werden. Man erhält als Resultat wiederum nur drei Indices, der Wert von  $k$  wird hierauf als negative Summe der beiden ersten eingesetzt.»

Jedermann kann sich leicht überzeugen, daß die Berechnung des Symbols einer Zone oder umgekehrt einer Fläche mit vier Indices nach der Angabe Tschermaks falsche Resultate liefert. Es genügt hier nur ein Beispiel.

Die Symbole zweier Flächen seien gegeben  $(\bar{1}2\bar{1}0)$  und  $(0004)$ , und es handelt sich um die Bestimmung des Symbols  $[mnpq]$  der gemeinschaftlichen Zone.

Nach Tschermak soll zuerst der Index  $\bar{1}$  im ersten Symbol und 0 im zweiten Symbol weggelassen werden. Die Rechnung folgt dann wie gewöhnlich mit den Symbolen  $(\bar{1}20)$  und  $(004)$ . Um das Symbol  $[mnpq]$  der gemeinschaftlichen Zone zu finden, bildet man das Schema

$$\begin{array}{c|cc|cc|c} \bar{1} & 2 & 0 & \bar{1} & 2 & 0 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

und berechnet daraus die Verhältnisse

$$2 \times 1 - 0 \times 0 : 0 \times 0 - 1 \times \bar{1} : \bar{1} \times 0 - 2 \times 0,$$

d. h.  $2 : 1 : 0.$

Dann folgt  $m : n : q = 2 : 1 : 0.$

Der Wert von  $p_1$  wird, nach Tschermak, hierauf als die negative Summe der beiden ersten eingesetzt. Man hat also

$$p = -(m + n) = -(2 + 1) = \bar{3}.$$

Das verlangte Symbol der gemeinschaftlichen Zone mit vier Indices sollte daher nach Tschermak sein

$$[mnpq] = [2\bar{1}\bar{3}0].$$

Daß das nicht das richtige Symbol sein kann, dafür brauchen wir nur eine Controlle auszuführen. Wir nehmen jetzt zwei Flächen, deren Symbole folgende sind:

$$\begin{array}{c} (\bar{1}\bar{1}20) \\ (0004). \end{array}$$

Ihre gemeinschaftliche Zone ist offenbar mit der vorigen gleichwertig, da ja die zwei Flächen  $(\bar{1}2\bar{1}0)$  und  $(\bar{1}\bar{1}20)$  auch äquivalent sind. Ist die Angabe Tschermaks richtig, so müssen wir für diese Zone ein ähnliches Symbol erhalten wie das vorhergehende. Das ist nun nicht der Fall. Wird  $k$  weggelassen, also 2 im Symbol  $(\bar{1}\bar{1}20)$  und 0 im Symbol  $(0004)$ , so geht die Rechnung darauf hinaus, das Symbol  $[mnpq]$  zu berechnen aus den zwei Symbolen  $(\bar{1}\bar{1}0)$  und  $(004)$ . Wird wie vorher verfahren, so erhält man nacheinander

$$\begin{array}{c|ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\bar{1} \times 1 - 0 \times 0 : 0 \times 0 - 1 \times \bar{1} : \bar{1} \times 0 - 0 \times \bar{1},$$

$$\bar{1} : 1 : 0,$$

$$m : n : q = \bar{1} : 1 : 0,$$

$$p = -(m + n) = -(\bar{1} + 1) = 0$$

und somit

$$[mnpq] = [\bar{1}100].$$

Wir haben also folgendes:

Zone  $[24\bar{3}0]$  der Flächen  $(\bar{1}2\bar{1}0)$ ,  $(0004)$ ;

-  $[\bar{1}100]$  - -  $(\bar{1}\bar{1}20)$ ,  $(0004)$ .

Da beide Zonen gleichwertig sind und gleich bezeichnet werden sollten, so folgt, daß das eine oder das andere der berechneten Symbole falsch sein muß. Ich behaupte aber, daß beide unrichtig sind.

Ich glaube es genügt, dies Beispiel angeführt zu haben, um zu recht fertigen, daß eine so einfache Frage wieder aufgenommen wird.

Ich will vorerst einige bekannte Sachen wiederholen, welche mit den Beziehungen zwischen Flächen und Zonen im Zusammenhange stehen.

Die bekannte Beziehung, welche zwischen den Indices einer Fläche und denen einer Zone besteht, wenn Zone und Fläche einander gegenseitig angehören, geht aus der Gleichung in schiefen Coordinaten der durch den Ursprung gehenden Ebene hervor.

Sind daher

$$x_1, x_2, x_3$$

die schiefen Coordinaten eines Punktes der Ebene, und  $a_1 : a_2 : a_3$  die Verhältnisse der Parameter einer parallelen Ebene, so ist die Gleichung der durch den Ursprung der Coordinaten gehenden Ebene:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0. \quad (2)$$

Man führt nun die Fundamentalparameter ein, d. h. das Verhältnis der Krystallaxen, das gegeben sein mag, nämlich:

$$a_1^0 : a_2^0 : a_3^0,$$

und zwar führt man dieselben in der Art ein, daß man die Gleichung der Ebene (2) Glied für Glied mit den resp. Einheiten multipliziert:

$$\frac{a_1^0}{a_1^0}, \frac{a_2^0}{a_2^0}, \frac{a_3^0}{a_3^0}.$$

Man erhält dadurch wiederum die Gleichung der Ebene, d. h.

$$\frac{a_1^0}{a_1} \cdot \frac{x_1}{a_1^0} + \frac{a_2^0}{a_2} \cdot \frac{x_2}{a_2^0} + \frac{a_3^0}{a_3} \cdot \frac{x_3}{a_3^0} = 0,$$

Da nun die Verhältnisse der Indices einer Fläche folgende sind:

$$h : i : l = \frac{a_1^0}{a_1} : \frac{a_2^0}{a_2} : \frac{a_3^0}{a_3} \quad (3)$$

und diejenigen der Indices einer Zone:

$$m : n : q = \frac{x_1}{a_1^0} : \frac{x_2}{a_2^0} : \frac{x_3}{a_3^0}, \quad (4)$$

so erhält man die bekannte Beziehung:

$$hm + in + lq = 0, \quad (5)$$

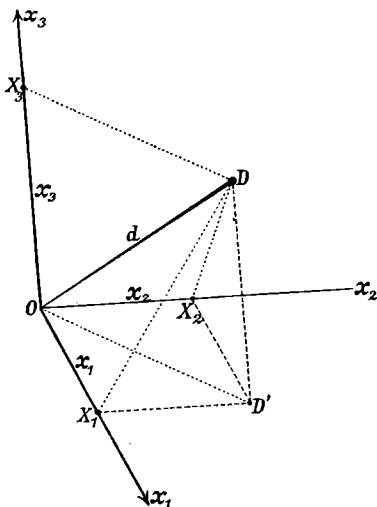
die immer zur Geltung kommt, wenn eine Krystallfläche  $(h i l)$  in eine Krystallzone  $[m n q]$  fällt.

Sind ferner  $(h_1 i_1 l_1)$  und  $(h_2 i_2 l_2)$  die Symbole zweier gegebenen Flächen, welche in derselben Zone  $[m n q]$  liegen, so gibt die Gleichung (5) folgende zwei Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} h_1 m + i_1 n + l_1 q &= 0, \\ h_2 m + i_2 n + l_2 q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Berechnet man daraus die Verhältnisse  $m : n : q$ , so erhält man diejenigen (4). Man darf also umgekehrt schließen, daß, wenn die Indices einer Zone durch die Verhältnisse (4) gegeben sind, sie auch durch die

Fig. 4.



Verhältnisse (4) definiert werden können; d. h. die Indices einer Zone verhalten sich direct wie die schiefen Projectionen  $x_1 = OX_1$ ,  $x_2 = OX_2$ ,  $x_3 = OX_3$  (Fig. 4) einer in der Zonenaxe gemessenen Strecke  $d = OD$ , und umgekehrt wie die fundamentalen Parameter  $a_1^0 : a_2^0 : a_3^0$  oder, was dasselbe heißt, umgekehrt wie die schiefen Projectionen auf dieselben Krystallachsen  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  einer in der Zonenaxe der Einheitszone gemessenen Strecke  $d$ .

Diese bekannte Definition der Indices einer Zone, welche soeben in Erinnerung gebracht worden ist, kann leicht durch eine andere ersetzt werden,

welche mit derjenigen einer Krystallfläche große Ähnlichkeit hat, und nützlicher werden könnte für manche Fragen der geometrischen Krystallographie. Wir wollen nun zu dieser Aufgabe übergehen.

Die Krystallaxen  $x_1, x_2, x_3$ , die Zonenaxe  $OD$  und die schiefen Projectionen einer in der gegebenen Zonenaxe angenommenen Strecke  $d = OD$ , nämlich  $x_1 = OX_1, x_2 = OX_2, x_3 = OX_3$ , sind in Fig. 2 wie in Fig. 4 dargestellt. Aber überdies ist in der Fig. 2 etwas hinzugefügt, was in der Fig. 4 nicht gezeichnet ist. Es sind nämlich hier drei neue Axen  $y_1, y_2, y_3$  von  $O$  aus gezogen, die zu den Coordinatenebenen resp.  $(x_2x_3), (x_3x_1)$  und  $(x_1x_2)$  senkrecht stehen und Polaraxen genannt werden.

Die schraffierte Ebene  $\pi$ , Fig. 2, ist senkrecht zur gegebenen Zone  $OD$ , und stellt somit die Polarebene der Zone dar, welche die Polaraxen  $y_1, y_2, y_3$  in den Punkten  $B_1, B_2, B_3$  trifft, so daß die Strecken

$$b_1 = OB_1, \\ b_2 = OB_2, b_3 = OB_3$$

Polarparameter der Polarebene genannt sein können.

Sind die Verhältnisse  $b_1 : b_2 : b_3$

gegeben, so ist die Lage der Polarebene und damit auch diejenige der dazu gehörenden Zone bekannt. Wir sehen daraus, daß eine Zone durch die Indices einer Ebene, der Polarebene, festgestellt werden kann.

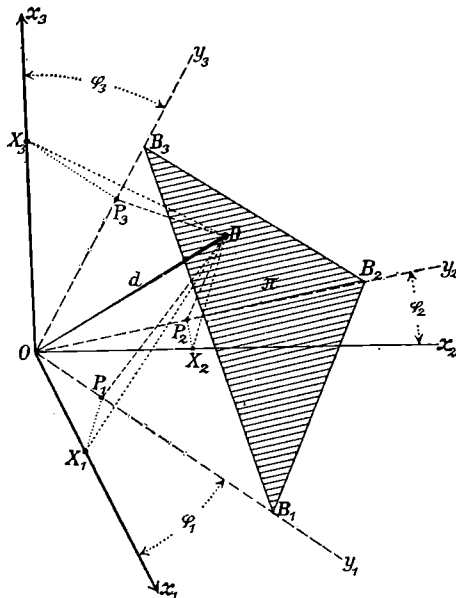
Um dies analytisch darzustellen, seien  $P_1, P_2, P_3$  die orthogonalen Projectionen auf die Polaraxen resp.  $y_1, y_2, y_3$  des in der Axe der Zone angenommenen Punktes  $D$ , Fig. 2, durch welchen auch die Polarebene der Zone geführt worden ist. Die orthogonalen Projectionen auf  $y_1, y_2, y_3$  der in der Axe der Zone abgemessenen Strecke  $d = OD$  werden also sein

$$p_1 = OP_1, p_2 = OP_2, p_3 = OP_3.$$

Bezeichnet man mit  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die Winkel, die die Zonenaxe  $OD$  mit den Polaraxen resp.  $y_1, y_2, y_3$  einschließt, so können folgende Beziehungen niedergeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= d \cos \omega_1, & p_2 &= d \cos \omega_2, & p_3 &= d \cos \omega_3, \\ b_1 &= \frac{d}{\cos \omega_1}, & b_2 &= \frac{d}{\cos \omega_2}, & b_3 &= \frac{d}{\cos \omega_3}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Fig. 2.



aus welchen durch Elimination der Cosinusse erhalten wird:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{d^2}{p_1}, \\ b_2 &= \frac{d^2}{p_2}, \\ b_3 &= \frac{d^2}{p_3}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir können jetzt leicht die schiefen Projectionen  $x_1, x_2, x_3$  der Strecke  $d = OD$  einführen. Man bemerke, daß die schiefen Projectionen auf  $x_1, x_2, x_3$  erhalten werden, indem durch den Punkt  $D$  Ebenen gezogen werden, die parallel den Coordinatenebenen resp.  $(x_2 x_3), (x_3 x_1), (x_1 x_2)$  sind; sie sind aber auch senkrecht zu den Polaraxen resp.  $y_1, y_2, y_3$ . Daraus folgt, daß die orthogonalen Projectionen  $p_1 = OP_1, p_2 = OP_2, p_3 = OP_3$  keine andere Bedeutung haben, als die, daß sie die Orthogonalprojectionen der resp. Strecken  $x_1 = OX_1, x_2 = OX_2, x_3 = OX_3$  sind. Bezeichnet man daher mit  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , Fig. 2, die Winkel, welche die Polaraxen  $y_1, y_2, y_3$  mit den resp. Krystallaxen  $x_1, x_2, x_3$  einschließen, so hat man

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= x_1 \cos \varphi_1, \\ p_2 &= x_2 \cos \varphi_2, \\ p_3 &= x_3 \cos \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Führt man diese Werte in (8) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{d^2}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{1}{x_1}, \\ b_2 &= \frac{d^2}{\cos \varphi_2} \cdot \frac{1}{x_2}, \\ b_3 &= \frac{d^2}{\cos \varphi_3} \cdot \frac{1}{x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wir wollen nun auch die Polarebene der Einheitszone [111] in Rechnung bringen. Eine in der Zonenaxe der Einheitszone gemessene Strecke  $d$  hat auf den Krystallaxen  $x_1, x_2, x_3$  schiefe Projectionen, die sich verhalten wie

$$a_1^0 : a_2^0 : a_3^0.$$

Ferner schneidet die Polarebene der Einheitszone auf den Polaraxen  $y_1, y_2, y_3$ , Polarparameter, die leicht zu berechnen sind. Sie mögen sich verhalten wie folgt

$$b_1^0 : b_2^0 : b_3^0.$$

Wendet man die Gleichungen (10) auf die Einheitszone und ihre Polarebene an, so werden wir haben:

$$\left. \begin{aligned} b_1^0 &= \frac{d^2}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{1}{a_1^0}, \\ b_2^0 &= \frac{d^2}{\cos \varphi_2} \cdot \frac{1}{a_2^0}, \\ b_3^0 &= \frac{d^2}{\cos \varphi_3} \cdot \frac{1}{a_3^0}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

abgesehen von einer Verhältniskonstante.

Werden endlich die Gleichungen (11) durch die Gleichungen (10) beziehungsweise dividiert, so erhält man die Verhältnisse

$$\frac{b_1^0}{b_1} : \frac{b_2^0}{b_2} : \frac{b_3^0}{b_3} = \frac{x_1}{a_1^0} : \frac{x_2}{a_2^0} : \frac{x_3}{a_3^0} = m : n : q. \quad (12)$$

Dieses Ergebnis läßt sich mit Worten aussprechen:

Die Indices einer Zone verhalten sich umgekehrt wie die durch ihre Polarebene auf den Polaraxen bestimmten Polarparameter, und direct wie die durch die Polarebene der Einheitszone auf denselben Axen bestimmten Polarparameter.

Wenn daher die Krystallaxen durch Polaraxen und die Zone durch ihre Polarebene ersetzt werden, so erhalten die Indices der Krystallzone genau dieselbe Bedeutung wie die Indices einer Krystallfläche; und somit können alle zwischen den Indices und Lagen der Krystallflächen bestehenden Beziehungen ohne weiteres auf die Indices und Lagen der Krystallzonen übertragen werden.

Im kubischen, tetragonalen und rhombischen Systeme fallen alle drei Polaraxen mit den Krystallaxen zusammen. Eine Polaraxe fällt mit einer Krystallaxe zusammen im monoklinen und hexagonalen Systeme.

Wir wollen von dieser Eigenschaft der Indices einer Zone Gebrauch machen, um die im Anfang dieser Note aufgestellte Frage zu lösen.

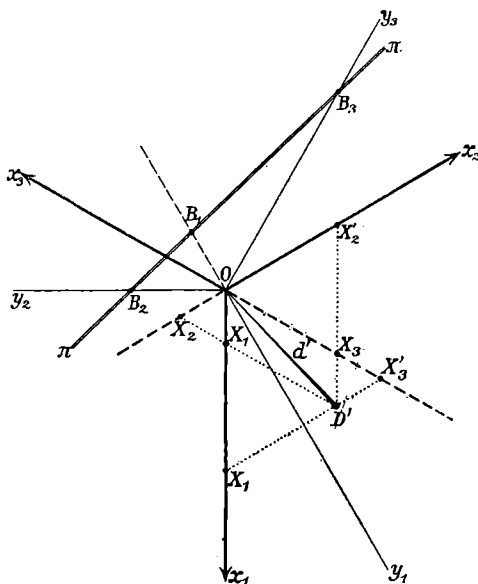
Während bei den Symbolen mit drei Indices die drei schiefen Projectionen einer in der Axe der Zone gemessenen Strecke unzweideutig bestimmt sind, geschieht es nicht mehr, wenn vier Indices, also vier Axen in Anwendung kommen, von denen drei von einander abhängig sind.

In Fig. 3 (S. 352) sind die drei positiven,  $120^\circ$  mit einander einschließenden, zur verticalen Axe  $z$  senkrecht stehenden Axen  $x_1, x_2, x_3$  von  $O$  aus gezogen. Dabei bedeutet  $d' = OD'$  die orthogonale Projection einer in der Zonenaxe abgemessenen Strecke  $d$  in derselben Ebene. Es ist klar, daß die schiefen Projectionen von  $d$  oder  $d'$  auf die Axen  $x_1, x_2, x_3$  zwei Werten für jede Axe entsprechen, nämlich  $OX_1$  und  $OX_1'$  auf  $x_1$ ,  $OX_2$  und  $OX_2'$  auf  $x_2$ ,  $OX_3$  und  $OX_3'$  auf  $x_3$ , wo

$$OX_1 = OX_3', \quad OX_2 = OX_1', \quad OX_3 = OX_2'$$

ist. Wir können daher behaupten, daß die ersten drei Indices  $m, n, p$  einer Zone  $[mnpq]$  nicht zu den schiefen Projectionen einer in der Zonenaxe gemessenen Strecke direct proportional sein können; wir müssen vielmehr sagen, daß eine solche Definition hier nicht anwendbar ist.

Fig. 3.



Wenn wir dagegen die Polaraxen  $y_1, y_2, y_3$ , Fig. 3, ziehen, die Polarebene der Zone,  $\pi\pi$  in Fig. 3, einführen, welche auf den Polaraxen die Parameter

$$b_1 = OB_1, \quad b_2 = OB_2, \\ b_3 = OB_3$$

bestimmt, so können die drei Indices  $m, n, p$  der Zone  $[mnpq]$  mit Hilfe der Polarparameter bestimmt werden; sie sind nämlich umgekehrt proportional den Parametern  $b_1, b_2, b_3$  und direct proportional den Parametern der Einheitszone. Es bleibt nur eine kleine Unbestimmtheit zurück, d. h. Reihenfolge und Sinn der genannten drei Polaraxen.

Um auch hier die Unbestimmtheit aufzuheben, betrachten wir die ganz specielle Aufgabe, welche darin besteht, die Indices  $m, n, p, q$  einer Zone zu berechnen, wenn die Symbole  $(h_1 i_1 k_1 l_1)$  und  $(h_2 i_2 k_2 l_2)$  zweier Flächen gegeben sind, die eben zur Zone gehören.

Da wir hier die Bedingungen haben

$$h_1 + i_1 + k_1 = 0 \quad \text{und} \quad h_2 + i_2 + k_2 = 0$$

so müssen wir auch für die Indices der Zone dieselbe Bedingung aufstellen

$$m + n + p = 0,$$

insofern die positiven Richtungen der Polaraxen  $y_1, y_2, y_3$   $120^\circ$  mit einander einschließen. Lassen wir die Indices  $k_1$  und  $k_2$  weg, so reducirt sich die Aufgabe auf die Berechnung der drei Indices  $m, n, q$  derselben Zone aus den Symbolen  $(h_1 i_1 l_1)$  und  $(h_2 i_2 l_2)$  derselben Fläche. Diese Aufgabe ist aber sofort gelöst, denn wir brauchen nur das Schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} h_1 & i_1 & l_1 & h_1 & i_1 & l_1 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ h_2 & i_2 & l_2 & h_2 & i_2 & l_2 \end{array}$$

zu lösen. Wir erhalten nämlich daraus





dieser Annahme zu genügen, brauchen wir nur den Sinn einer der zwei Axen  $y_1$  und  $y_2$  zu ändern. Wird dies bei der Axe  $y_2$  getan, so bleiben die positiven Polaraxen nach  $Oy_1$  und  $Oy_2'$ , Fig. 4. Gleichzeitig wird auch der Polarparameter  $b_2$  negativ, wenn  $b_1$  positiv ist, und somit muß der Index  $n$  negativ werden, wenn  $m$  positiv bleibt. Als Resultat hat man also

$$m : n : q = m' : -n' : q'. \quad (14)$$

Wir können schließlich zusammenfassen, wie sich die Rechnung gestaltet, um die vier Indices einer Zone  $[mnpq]$  zu bestimmen, wenn sie zwei gegebene Flächen  $(h_1 i_1 k_1 l_1)$  und  $(h_2 i_2 k_2 l_2)$  enthalten soll. Die Berechnung erfolgt durch die Beziehungen:

$$m : n : q = (i_1 l_2 - i_2 l_1) : -(l_1 h_2 - l_2 h_1) : (h_1 i_2 - h_2 i_1), \quad (15)$$

$$m + n + p = 0. \quad (16)$$

Man hat also aus dem Schema

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} h_1 & i_1 & l_1 & h_1 & i_1 & l_1 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ h_2 & i_2 & l_2 & h_2 & i_2 & l_2 \end{array}$$

die Verhältnisse (13) nach der gewöhnlichen Methode abzuleiten, nachher das Zeichen des ersten oder zweiten der so erhaltenen Indices zu ändern, und schließlich den dritten Index aus der Summe der beiden ersten mit geändertem Zeichen zu berechnen.

Diese Methode hat eine geometrische Bedeutung, die wir gleich hervorheben wollen.

Die Beziehung, welche bestehen soll, wenn eine Fläche  $(h i l)$  in einer Zone  $[m n q]$  liegt, ist

$$h m + i n + l q = 0. \quad (5)$$

Wir haben aber soeben gesehen, daß das Zeichen von  $n$  geändert werden muß, falls die Polaraxen  $y_1$  und  $y_2$   $120^\circ$  einschließen sollen; daraus folgt, daß die Beziehung zwischen den Indices einer Zone und einer ihr angehörenden Fläche folgende sein muß:

$$h m - i n + l q = 0. \quad (17)$$

Bedenken wir, daß die Beziehung (5) keine andere Bedeutung hat als diejenige, daß sie die Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Ebene darstellt. Dieselbe Bedeutung hat infolgedessen auch die Gleichung (17) mit dem Unterschiede, daß die Coordinatenachsen für die Parameter der Ebene nicht vollständig übereinstimmen mit den Coordinatenachsen für die schiefen Projectionen des Punktes, d. h. sie stimmen nicht vollständig überein insofern, als ihre resp. Richtungen zwar dieselben sind, aber der Sinn einer Axe verschieden ist.

Als Beispiel seien wieder die Symbole  $(\bar{1}2\bar{1}0)$  und  $(0004)$  zweier Flächen gegeben, und es fragt sich um das Symbol  $[mnpq]$  der gemeinschaftlichen Zone.

Indem zuerst die Indices  $\bar{1}$  im ersten Symbol und 0 im zweiten weggelassen werden, reducirt sich die Aufgabe darauf, das Symbol  $[mnq]$  der verlangten Zone zu bestimmen aus den Symbolen  $(\bar{1}20)$  und  $(001)$  der gegebenen Flächen. Man bildet das Schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} \bar{1} & 2 & 0 & \bar{1} & 2 & 0 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Man leitet die Verhältnisse ab:

$$m':n':q' = 2 \times 1 - 0 \times 0 : 0 \times 0 - 1 \times \bar{1} : \bar{1} \times 0 - 0 \times 2$$

d. h.  $m':n':q' = 2:1:0.$

Man ändert das Zeichen des zweiten Index und man erhält

$$m:n:q = 2:\bar{1}:0.$$

Aus  $n+m+p=0$

bestimmt man  $p = -(m+n) = -(2+\bar{1}) = \bar{1}$

und man hat schließlich das Symbol der verlangten Zone

$$[mnpq] = [2\bar{1}\bar{1}0].$$

Als zweites Beispiel wollen wir aus den Symbolen  $(\bar{1}\bar{1}20)$  und  $(0001)$  das Symbol ihrer gemeinschaftlichen Zone  $[mnpq]$  berechnen. Es werden wie vorher die Indices  $\bar{1}$  im ersten Symbol und 0 im zweiten weggelassen, und das Symbol der Zone  $[mnq]$  aus den Symbolen  $(\bar{1}\bar{1}0)$  und  $(001)$  bestimmt.

Indem wie vorher verfahren wird, erhält man nach einander

$$\begin{array}{c|ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$m':n':q' = \bar{1} \times 1 - 0 \times 0 : 0 \times 0 - 1 \times \bar{1} : \bar{1} \times 0 - 0 \times \bar{1},$$

$$m':n':q' = \bar{1}:1:0,$$

$$m:n:q = \bar{1}:\bar{1}:0,$$

$$p = -(m+n) = -(\bar{1}+\bar{1}) = 2,$$

$$[mnpq] = [\bar{1}\bar{1}20].$$

Als drittes Beispiel wollen wir von den Symbolen  $[11\bar{2}2]$  und  $[\bar{2}112]$  zweier Zonen ausgehen, und die ihnen gemeinschaftliche Fläche  $(hikl)$  ableiten. Werden zuerst die zwei Symbole auf die Symbole mit drei Indices  $[112]$  und  $[\bar{2}12]$  reducirt, so verlangt man zuerst das Symbol  $(hikl)$  der gemeinschaftlichen Fläche. Man erhält nach einander:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ \bar{2} & 1 & 2 & \bar{2} & 1 & 2 \end{array}$$

$$h': i': l' = 1 \times 2 - 1 \times 2 : 2 \times \bar{2} - 2 \times 1 : 1 \times 1 - \bar{2} \times 1,$$

$$h': i': l' = 0 : \bar{6} : 3 = 0 : \bar{2} : 1,$$

$$h : i : l = 0 : 2 : 1,$$

$$k = - (h + i) = - (2 + 0) = \bar{2},$$

$$(hikl) = (02\bar{2}1).$$

Endlich sei eine Zone  $[\bar{3}122]$  und eine Fläche  $(1\bar{1}01)$  gegeben. Es fragt sich, ob die Fläche in der Zone liegt. Zu diesem Zwecke lassen wir die ersten Indices beider Symbole weg und berechnen das Trinom

$$ni - pk + ql,$$

also  $1 \times \bar{1} - 2 \times 0 + 2 \times 1 = \bar{1} + 2 = 1.$

Da das Trinom nicht Null ist, so wiederholt man die Rechnung, indem die zweiten Indices weggelassen werden und das Trinom

$$mh - pk + ql$$

berechnet wird. Man hat

$$\bar{3} \times 1 - 2 \times 0 + 2 \times 1 = -3 + 2 = -1.$$

Da wieder das Trinom nicht Null geworden ist, so wiederholt man die Rechnung mit Weglassung der dritten Indices und mit dem Trinom

$$mh - ni + ql.$$

Man hat

$$\bar{3} \times 1 - 1 \times \bar{1} + 2 \times 1 = -3 + 1 + 2 = 0.$$

Dieses Trinom ist Null und infolgedessen liegt die Fläche  $(1\bar{1}01)$  in der Zone  $[\bar{3}122]$ . Die Bedingung also, daß eine Fläche in einer Zone enthalten sei, besteht in dem Verschwinden des Trinoms

$$mh - ni + ql,$$

wobei  $m$  und  $n$  sowie  $h$  und  $i$  zwei beliebige der drei ersten Indices in den Symbolen  $[mnpq]$  und  $(hikl)$  bedeuten.